8

Estabilidad aplicada

Instituto Técnico
de la Estructura
en Acero



ITEA

ÍNDICE DEL TOMO 8

ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico estable e Inestable 1

1 INTRODUCCIÓN 4
2 ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTABLES E INESTABLES 5
3. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA 6
4 PANDEO BIFURCADO 7
5 COMPORTAMIENTO POSTCRÍTICO DE LOS SISTEMAS PERFECTOS E IMPERFECTOS 9
6 PUNTO LÍMITE DE PANDEO 11
7 COINCIDENCIA DE VARIOS MODOS DE INESTABILIDAD 12
8 RESUMEN FINAL 13
9 BIBLIOGRAFÍA 13

Lección 8.2: Criterios generales de Estabilidad Elástica 15

1 INTRODUCCIÓN 19
2 GENERALIDADES 19
3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES 21
4 PRINCIPIO DEL VALOR ESTACIONARIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL 23
5 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO 24
6 EQUILIBRIO NEUTRO-CARGAS CRÍTICAS 26
7 EJEMPLOS BÁSICOS 27
8 RESUMEN FINAL 32
9 BIBLIOGRAFÍA 32

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica 33

1 INTRODUCCIÓN 36
2 PANDEO FLEXURAL DE COLUMNAS 38
3. PANDEO LATERAL 41
4 PANDEO DE PLACAS 43
5 RESUMEN FINAL 45
6 BIBLIOGRAFÍA 45

Problema resuelto 8.2: Métodos de Energía 47

CONTENIDO 49
SOLUCIÓN 50

Lección 8.4: Métodos Generales para la Determinación de Cargas Críticas 53

1 INTRODUCCIÓN 56
2 MÉTODOS ENERGÉTICOS GENERALES APLICABLES A SISTEMAS ELÁSTICOS 57
3 COEFICIENTE DE RAYLEIGH 58
4 EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ 59
5 EL MÉTODO DE GALERKIN 60
6 MÉTODOS NUMÉRICOS 61
7 ALGUNAS EXPRESIONES TÍPICAS DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN 62
8 EJEMPLO USANDO LOS DIFERENTES MÉTODOS 63
9 RESUMEN FINAL 67
10 BIBLIOGRAFÍA 67

Lección 8.5: Métodos iterativos para resolver problemas de estabilidad 69

1 INTRODUCCIÓN 72
2 MÉTODO DE VIANELLO 73

3. REPASO DEL MÉTODO DE NEWMARK 74
3.1 Convenio de signos 74
3.2 Conceptos 74
4 MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK 77
5 CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO 78
6 RESUMEN FINAL 79
7 BIBLIOGRAFÍA 79

Problema resuelto 8.3 (i), (ii) y (iii): Aplicación de los métodos Vianello, Newmark y Vianello-Newmark 81

EJEMPLO 1: APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO 84
EJEMPLO 8.3(II): APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK 90
EJEMPLO 8.3(III): APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK 94
8.3(iii) PROBLEMA 2: PILAR ESCALONADO 98
8.3(iii) PROBLEMA 3: PILAR SOMETIDO A CARGA VARIABLE 102
8.3(iii) PROBLEMA 4: VIGA-PILAR 108

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales I 113

1 INTRODUCCIÓN 116
2 CONSECUENCIAS DE LA PLASTICIDAD DEL MATERIAL 117
2.1 Modelo de comportamiento rígido-plástico ideal 117
2.2 Modelo de comportamiento elasto-plástico ideal 117
2.3 Curva de resistencia para una barra ideal 118
2.4 Consecuencias del comportamiento elasto-plástico del material ... 118
3 RESISTENCIA DE BARRAS REALES 120
3.1 Efecto de las imperfecciones geométricas 120
3.1.1 Falta de rectitud 120
3.1.2 Excentricidad de la carga 123
3.2 Efecto de las tensiones residuales 124
3.3 Influencia combinada de las imperfecciones 126
4 RESUMEN FINAL 128
5 BIBLIOGRAFÍA 128

Lección 8.6.2: Pandeo de elementos estructurales reales II 129

1 INTRODUCCIÓN 132
2 PANDEO DE PLACAS 133
3 PANDEO TORSIONAL DE COLUMNAS 139
4 PANDEO FLEXURAL-TORSIONAL 141
5 PANDEO LATERAL-TORSIONAL DE VIGAS 143
6 PANDEO DE LÁMINAS 145
7 MEJORA DE LA RESISTENCIA AL PANDEO 147
8 ESTABILIDAD DE PÓRTICOS 148
9 RESUMEN FINAL 149
10 BIBLIOGRAFÍA 150
DIAPOSITIVAS COMPLEMENTARIAS 151

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

OBJETIVOS\CONTENIDO

Se introducirán los principales conceptos y definiciones para la comprensión del equilibrio elástico estable e inestable de las estructuras.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Ninguno.

LECCIONES AFINES

Lección 8.2: Criterio General de Estabilidad Elástica

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

RESUMEN

Esta lección comienza definiendo los estados de equilibrio estable e inestable de un sistema mecánico. La ley de energía potencial mínima y su relación con la estabilidad de la estructura se introducen sin hacer uso de consideraciones matemáticas. Igualmente se presentan los conceptos de pandeo por bifurcación, para sistemas ideales, y de pandeo por divergencia, para sistemas no ideales. Se abordarán el comportamiento post-crítico de un sistema y el deterioro de la estabilidad por la coincidencia de varios modos estables.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la teoría de estabilidad es determinar las condiciones bajo las cuales el sistema estructural, que se encuentra en equilibrio, deja de estarlo. La inestabilidad depende fundamentalmente de la geometría de la estructura en sus extremos; por ejemplo, riostras largas y esbeltas, placas delgadas o depósitos cilíndricos delgados. Normalmente, los sistemas de estudio tendrán un parámetro variable N, que suele ser la carga externa, pero que puede ser también una temperatura (pandeo térmico) u otro fenómeno. Para cada valor de la variable N existe únicamente una configuración estable.

En los problemas de pandeo clásicos, el sistema es estable si N es suficientemente pequeña, y se vuelve inestable cuando N es grande. El valor de N para el cual el sistema deja de ser estable se denomina valor crítico N_{cr}. Pero además debe conocerse lo siguiente:

- las configuraciones de equilibrio de la estructura bajo las cargas prescritas.
- qué configuraciones son estables.
- los valores críticos de las cargas y las consecuencias en el comportamiento para esos niveles de carga.

2. ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTABLES E INESTABLES

En términos generales, la estabilidad puede ser definida como la capacidad de un sistema físico para volver a la posición de equilibrio cuando sufre una leve perturbación.

Para un sistema mecánico, se puede recurrir a la definición dada por Dirichlet: "El equilibrio de un sistema mecánico es estable si, al desplazar los puntos del sistema de sus posiciones de equilibrio en una cantidad infinitesimal dando a cada uno de ellos una velocidad inicial, los desplazamientos de los distintos puntos del sistema permanecen, a lo largo del movimiento, entre unos límites pre-establecidos".

Esta definición muestra claramente que la estabilidad es una propiedad de un estado - un estado de equilibro - del sistema, y que el problema de determinación de la estabilidad de un estado tiene que ver con la "vecindad" de ese estado particular.

Si se considera un sistema elástico conservativo, que inicialmente está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, el sistema se separará de su estado de equilibrio sólo si actúan sobre él fuerzas perturbadoras. Si la energía suministrada al sistema por dichas fuerzas es W, entonces:

$$W = T + V = \text{constante} \qquad (1)$$

por aplicación del principio de conservación de la energía.

En esta expresión, T es la energía cinética del sistema y V es la energía potencial. Un pequeño incremento en T, va acompañada por una disminución, igualmente pequeña en V, o viceversa. Si el sistema se encuentra inicialmente en una posición de equilibrio con un mínimo de energía potencial, entonces la energía cinética T durante el movimiento libre decrece mientras V debe crecer. Por ello el desplazamiento con respecto a la posición inicial será pequeño y el estado de equilibrio es estable.

Para cuerpos rígidos, la estabilidad puede ilustrase por el conocido ejemplo de una bola sobre una superficie curva (Figura 1). Descansando sobre una superficie cóncava (Figura 1a) el equilibrio es estable; si se da a la bola una pequeña velocidad inicial, comenzará a oscilar, pero permanecerá en la proximidad de su estado de equilibrio. Por otro lado, si el sistema no se encuentra en una situación de mínima V (energía potencial), entonces el impulso implica largos desplazamientos y velocidades que se alcanzan rápidamente, diciéndose que el sistema es inestable. Este es el caso en el que la bola descansa sobre la cresta de una superficie convexa (Figura 1b) o en posición horizontal en un punto de inflexión (Figura 1c). Si la bola permanece en el plano horizontal, el equilibrio se denomina "neutro" (Figura 1d).

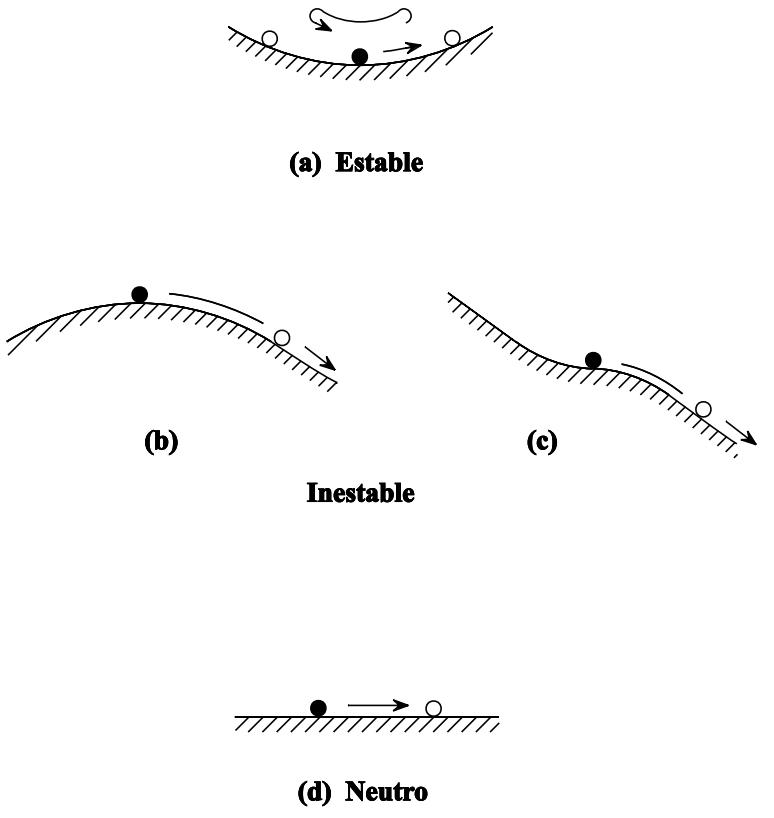


Figura 1 Los tres estados de equilibrio

3. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA

El ejemplo intuitivo de la bola lleva al enunciado de la ley de mínima energía potencial de un sistema: “Un sistema elástico conservativo está en un estado de equilibrio estable si, y sólo si, el valor de la energía potencial es un mínimo relativo”.

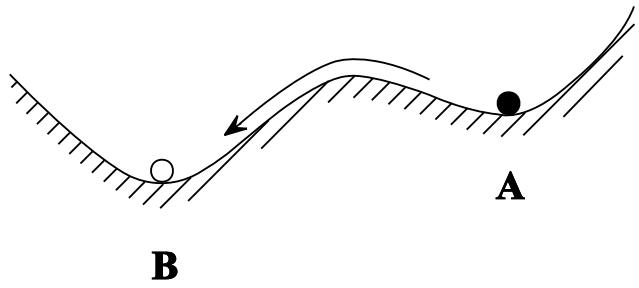


Figura 2 Carácter relativo del equilibrio

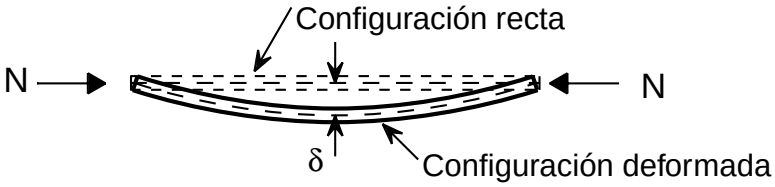
La expresión “mínimo relativo” se usa porque puede haber un mínimo próximo con un valor inferior de la energía potencial separados por pequeños “montes” pero el paso de uno a otro requiere grandes perturbaciones (Figura 2). La existencia de un mínimo relativo de la energía potencial en la posición de equilibrio es, estrictamente hablando, únicamente una condición suficiente para la estabilidad. Sin embargo, este principio es aceptado generalmente en la práctica como una condición necesaria y suficiente para la estabilidad.

4. PANDEO BIFURCADO

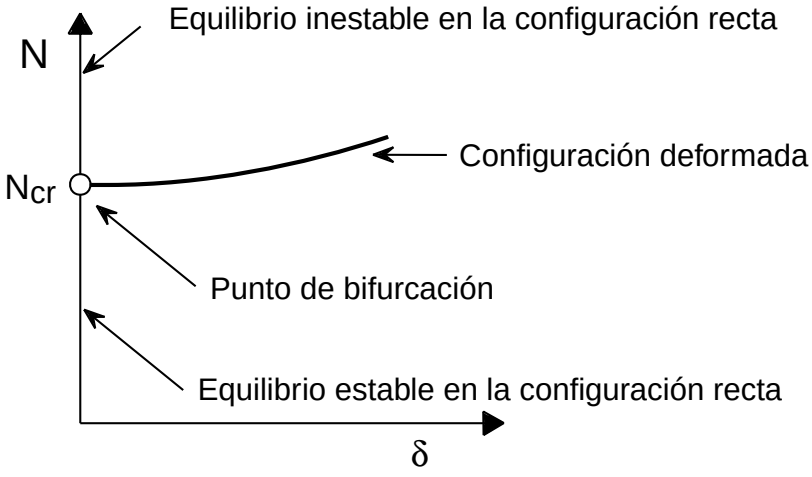
Se ha podido ver como el concepto de estabilidad está relacionado con la energía potencial del sistema. Sin embargo, la estabilidad de un sistema estático, o de una estructura, puede ser explicada en términos de rigidez. En la Figura 1a, se puede ver como la derivada de la energía potencial con respecto al desplazamiento es igual al la rigidez (en la figura, la pendiente de la superficie) del sistema.

Una rigidez positiva indica un estado de equilibrio estable, mientras que al borde de la estabilidad la rigidez se anula. Para una estructura, la rigidez se presenta en forma matricial, y sólo una matriz definida positiva garantiza la estabilidad de la estructura. El punto en el cual el estado del sistema pasa de un equilibrio neutro a un equilibrio estable se denomina “límite de estabilidad”.

El sistema formado por la bola y la superficie curva (donde la estabilidad depende únicamente de la pendiente de la superficie) puede ser comparado con una estructura, por ejemplo, una columna comprimida. En este caso, la columna puede ser estable o inestable, dependiendo de la magnitud de la carga axial, que es el parámetro que controla el sistema (Figura 3a). Inicialmente el elemento se encuentra recto y la carga es axial, y por ello la estructura se mantendrá estable para valores pequeños de N; si una perturbación produjese desplazamientos, la columna volvería a su posición recta. Cuando la carga alcanza un cierto valor, llamado “carga crítica”, el equilibrio estable llega a su límite. Con esta carga Ncr, aparece otra configuración de equilibrio con una leve deformación de la columna; si, con esta carga, el elemento se desplaza por la acción de una fuerza, no retornará a su posición recta.



(a) Columna simplemente apoyada

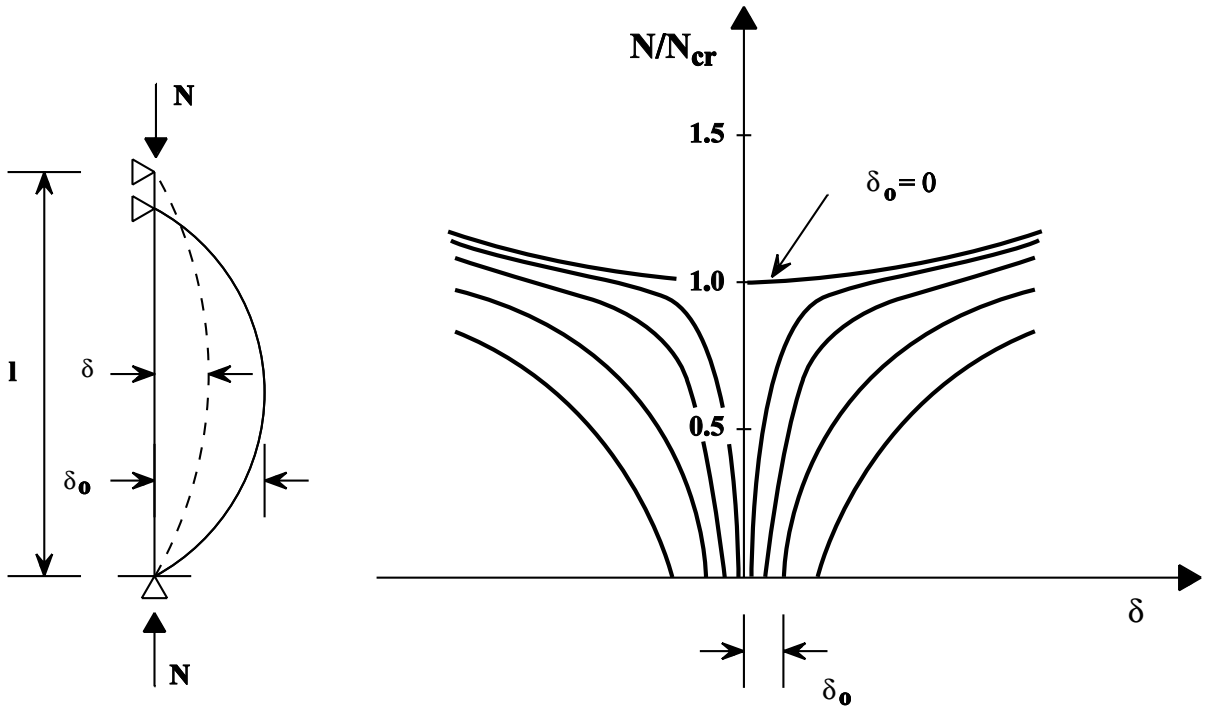


(b) Relación fuerza axial VS deformación

Figura 3 Estabilidad de una columna comprimida

Si la carga excede el valor crítico, la posición recta es inestable y cualquier perturbación conlleva largos desplazamientos del elemento y, finalmente, a un colapso de la columna por pandeo. El punto límite, después del cual las deformaciones en el elemento son muy grandes, se llama el “punto de bifurcación ” del sistema (Figura 3b).

Si la columna no está inicialmente perfectamente recta, las deformaciones aparecen desde el comienzo de la carga y no hay un pandeo súbito por bifurcación, y sí un incremento continuo de los desplazamientos (Figura 4). Este fenómeno



(a) Columna imperfecta simplemente apoyada

(b) Relación fuerza axial VS deformación

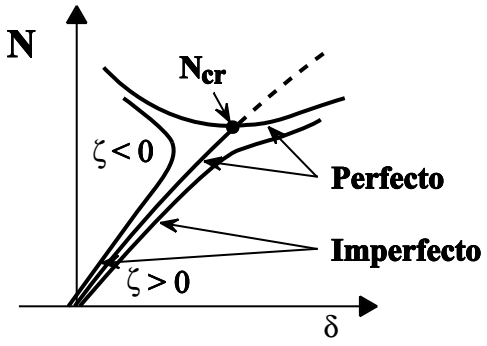
Figura 4 Estabilidad de una columna imperfecta comprimida

se conoce como “divergencia del equilibrio” y estrictamente no hay un límite en la estabilidad . Si el material continúa siendo elástico la rigidez de la columna (representada por la pendiente de la curva N. δ) es siempre positiva, pero una pequeña perturbación produce grandes desplazamientos.

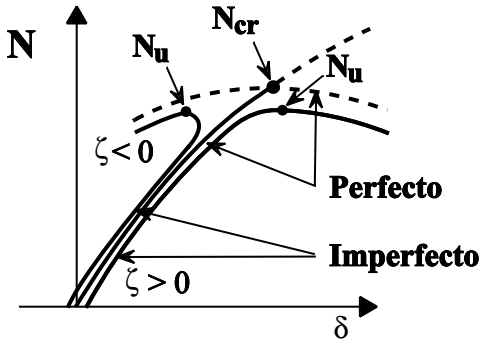
La reducción en la rigidez de un elemento estructural se debe, en general, a cambios, bien en su geometría, bien en sus propiedades mecánicas. La disminución de la rigidez debido a cambios en la geometría no produce pérdida de la estabilidad pero origina grandes deformaciones. Por otro lado, grandes cambios en las propiedades mecánicas (fluencia o fractura del material) originan enormes reducciones de la rigidez, que pueden acabar colapsando la estructura. Este importante tema será tratado más ampliamente en lecciones posteriores.

5. COMPORTAMIENTO POSTCRÍTICO DE LOS SISTEMAS PERFECTOS E IMPERFECTOS

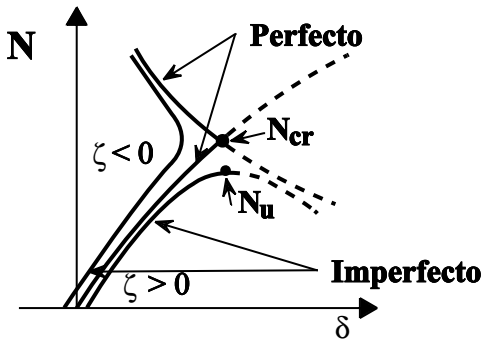
Una vez superado el punto de bifurcación, pueden darse tres situaciones diferentes, dependiendo del tipo de sistema en estudio (Figura 5). En la Figura 5, N es la carga aplicada, δ es el desplazamiento de un punto del sistema y ζ es la amplitud de la imperfección. En la Figura 5 se pueden ver las líneas que representan los puntos de equilibrio de los sistemas perfectos (líneas gruesas), de los sistemas imperfectos (líneas finas), los estados de equilibrio estable (líneas continuas) y los estados de equilibrio inestable (líneas discontinuas):



(a) Punto de bifurcación estable - asimétrico



(b) Punto de bifurcación inestable - asimétrico



(c) Punto de bifurcación asimétrico

Figura 5 Comportamiento postcritico

- Figura 5a: punto de bifurcación simétrico-estable.

  Pequeñas imperfecciones positivas y negativas tienen efectos similares y conducen a sucesivos equilibrios estables y crecientes. El pandeo se caracteriza por un rápido crecimiento de las deformaciones cuando se acerca la carga crítica del sistema perfecto. Este caso tiene una gran importancia práctica puesto que las columnas, vigas y placas presentan este tipo de comportamiento postcrítico.

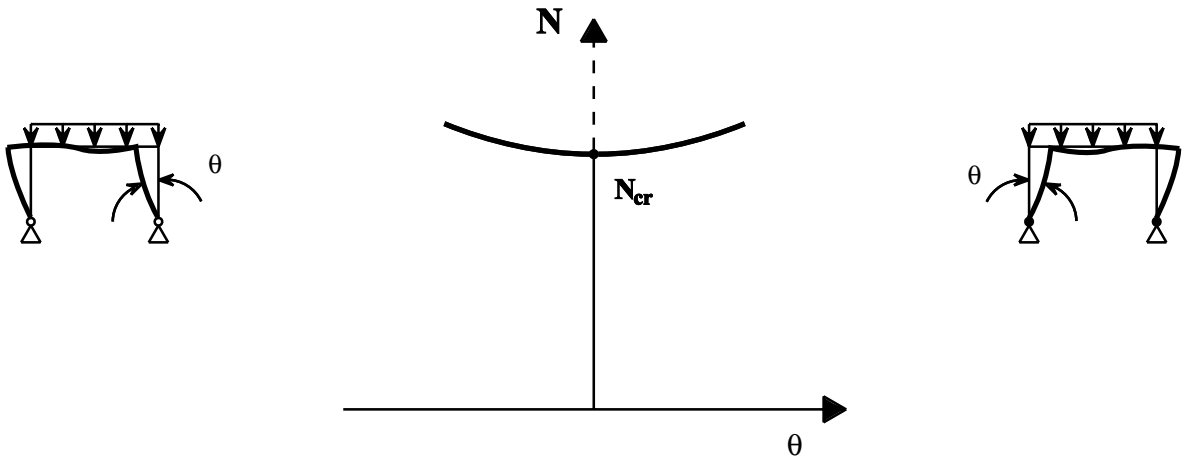
- Figure 5b: punto de bifurcación simétrico inestable.

  Las imperfecciones juegan un papel importante en la modificación del comportamiento del sistema. Pequeñas imperfecciones, de ambos signos, provocan una reducción en la carga crítica. Este es el caso, por ejemplo, de algunos sistemas compuestos de barras articuladas.

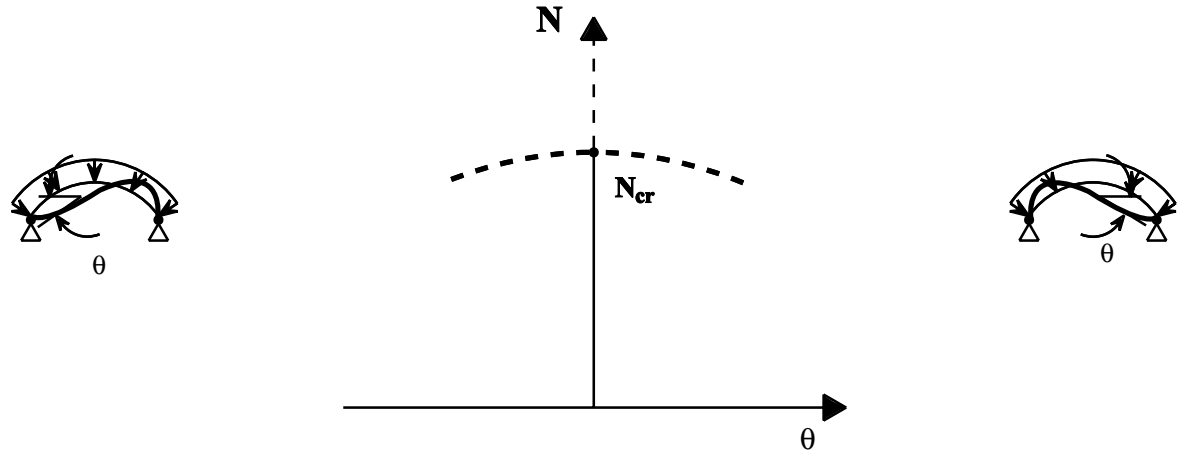
- Figure 5c: punto de bifurcación asimétrico.

  Con pequeñas imperfecciones positivas, el sistema pierde su estabilidad en un punto límite (carga última), muy inferior en comparación con el punto crítico. Por otro lado, pequeñas imperfecciones negativas conducen a estados de equilibrio estables y crecientes. En este caso, el sistema es muy sensible con respecto a las imperfecciones iniciales de signo positivo. Este es el caso de algunas arcos.

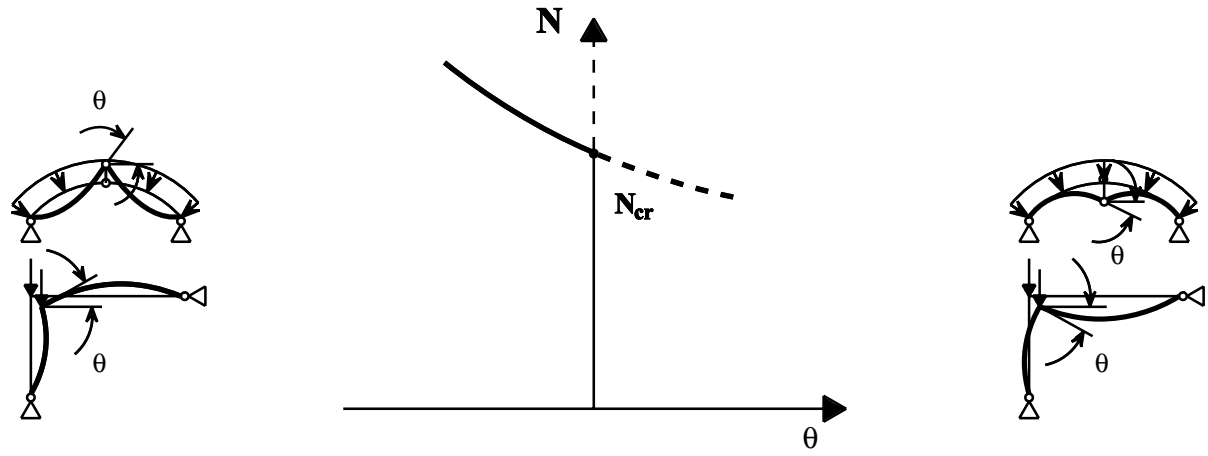
La Figura 6 ilustra estos tres casos de comportamiento post-crítico.



(a) Punto de bifurcación estable - simétrico



(b) Punto de bifurcación inestable - simétrico

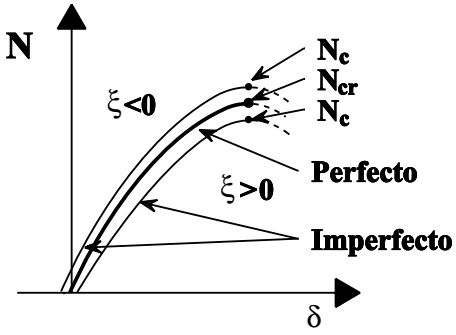


(c) Punto de bifurcación asimétrico

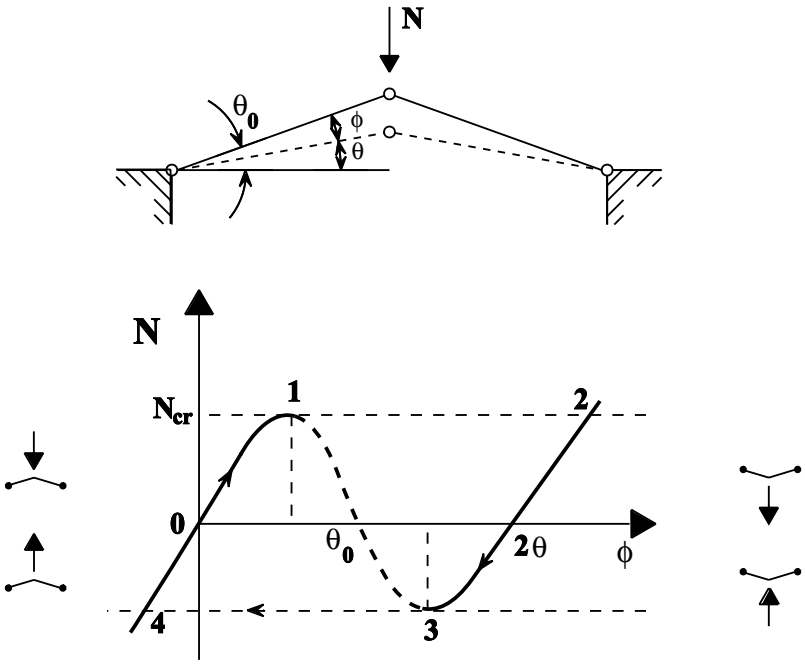
Figura 6 Ejemplos de comportamiento post-crítico

6. PUNTO LÍMITE DE PANDEO

El pandeo asociado con la bifurcación del equilibrio no es la única forma de inestabilidad que puede darse. En el caso de arcos bajos, bóvedas esféricas y celosías de poco canto, por ejemplo, puede darse un pandeo brusco cuando la trayectoria inicialmente estable alcanza la proximidad de un máximo local de la carga, que se suele llamar "punto límite" del sistema. Esto se muestra en la Figura 7a, que también ilustra como la respuesta de un sistema imperfecto es similar al de un sistema perfecto.



(a) Punto límite de pandeo en un sistema perfecto e imperfecto



(b) Punto límite de pandeo en una viga de poco canto

Figura 7 Punto límite de pandeo

La Figura 7b ilustra el comportamiento a pandeo presentando una estructura formada por dos barras articuladas. Cuando se aplica la carga por primera vez el camino seguido es el 0 -1. En el punto 1, se pierde la estabilidad y se produce un salto dinámico a través de un estado de desequilibrio desde el punto 1 al 2, estando la estructura en una posición invertida (pandeo brusco acompañado de un "crac" característico). El punto 2 también se encuentra en una posición estable, y el proceso de carga puede continuar. Por ejemplo, podría darse un proceso de descarga siguiendo la trayectoria del punto 2 al 3 en el cual, una vez más, se perdería la estabilidad produciéndose un salto dinámico desde el punto 3 al 4. En el punto 4, la estructura se encuentra en su trayectoria original y la carga puede volver a comenzar. En este ejemplo se puede ver que la trayectoria entre los puntos 1 y 3, que representa los estados de equilibrio inestable, es totalmente inaccesible durante el proceso de carga.

7. COINCIDENCIA DE VARIOS MODOS DE INESTABILIDAD

En ciertos casos, las estructuras pueden exhibir varios modos o configuraciones inestables casi con la misma carga crítica o con cargas críticas que son casi iguales. En estas situaciones, llamadas bifurcaciones acopladas, la existencia de imperfecciones pueden significar una reducción importante en la carga última en comparación con las de cada uno de los modos. Las estructuras con bifurcaciones acopladas son, en general, difíciles de analizar. A continuación se enumeran algunos de las inestabilidades acopladas que se pueden presentar en las estructuras metálicas:

- el acoplamiento del pandeo de columnas y de placas en columnas de espesor muy delgado.
- el acoplamiento de pandeo lateral y pandeo de placas en vigas de pequeño espesor.
- el acoplamiento del pandeo general y del pandeo de un miembro en pilares compuestos.
- el acoplamiento del pandeo individual de una columna y el pandeo del pórtico al que pertenece.
- el acoplamiento del pandeo de los rigidizadores y el pandeo de la chapa en el caso de chapas rigidizadas o cerramientos.

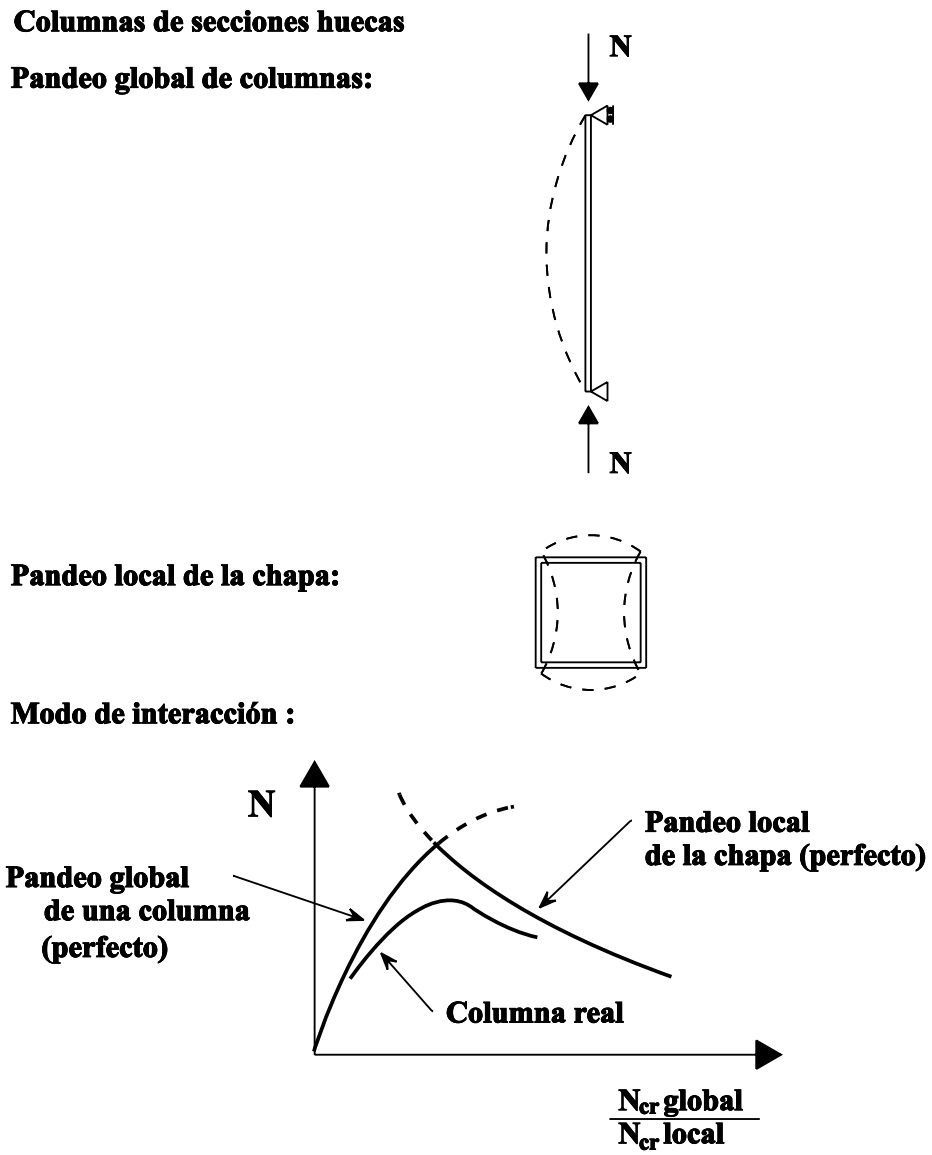


Figura 8 Acoplamiento de dos modos de pandeo

La Figura 8 muestra la reducción en la carga crítica debida al acoplamiento de los modos de pandeo local y global siguientes:

- pandeo local de las placas que forman las cuatro lados de la sección tubular.
- pandeo global euleriano de la columna.

8. RESUMEN FINAL

1. El equilibrio estable o inestable de un sistema estructural puede definirse a través de la energía potencial del sistema; la existencia de un mínimo relativo de dicha energía es una condición suficiente para la estabilidad.
2. El punto de bifurcación o el punto límite definen el tipo de inestabilidad del sistema estructural.
3. El comportamiento postcrítico es una característica importante de toda estructura.
4. Si la estructura presenta varios modos inestables en la cercanía de una carga crítica, la existencia de imperfecciones estructurales conlleva una disminución en la carga última cuando ésta se compara con las cargas últimas de cada uno de los modos por separado.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill, 2nd Edition, New York, 1961.

2. Allen, H. G. and Bulson, P. S., “Background to Buckling”, McGraw-Hill, London, 1980.

3. Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W., “A General Theory of Elastic Stability”, John Wiley and Sons, London, 1973.

4. Galambos, T. V. (editor), “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”, John Wiley and Sons, 4th Edition, New York, 1988.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.2: Criterios Generales de Estabilidad Elástica

OBJETIVOS/CONTENIDO

Establecer criterios generales para la estabilidad elástica y el equilibrio neutro como preparación al estudio de los métodos energéticos para el cálculo de las cargas críticas que se expondrá en la Lección 8.4.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

LECCIONES AFINES

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

Lección 8.4: Métodos Generales para el Cálculo de Cargas Críticas

Lección 8.5: Métodos Iterativos para resolver Problemas de Estabilidad

RESUMEN

El diseño de estructuras requiere que la posición de equilibrio de la estructura, bajo las cargas prescritas, sea estable; el análisis de los problemas de estabilidad se suele realizar empleando los métodos energéticos. En esta lección, se introducirán el Principio de los Trabajos Virtuales y el Principio de Conservación de la Energía. Como consecuencia directa de estos principios se establecerá el criterio general de estabilidad estática y se calcularán las cargas críticas correspondientes al equilibrio neutro. El estudio se limitará a los sistemas conservativos. El criterio de estabilidad se ilustrará mediante dos ejemplos.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de cualquier estructura implica la determinación de los esfuerzos internos en el equilibrio (momentos, cortantes, etc.), bajo la carga establecida, y también la confirmación de que la estructura es estable bajos dichas condiciones. Es de vital importancia asegurarse de que si la estructura es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio por fuerzas, impactos, vibraciones, imperfecciones, tensiones residuales, etc., volverá a ella al cesar dichas perturbaciones; esta exigencia de estabilidad estática es aún más crítica en nuestros días debido al incremento en el uso de materiales de alta resistencia que posibilitan el uso de elementos más ligeros y esbeltos.

La teoría sobre la estabilidad elástica, más conocida como pandeo, proporciona métodos para determinar:

- la estabilidad de una configuración de equilibrio.
- el valor de la carga crítica bajo la cual se produce la inestabilidad.

La mayor parte de estos métodos se derivan de los criterios generales de energía que tienen su origen en los principios energéticos de la Mecánica. El objetivo de esta lección será presentar brevemente, al estudiante o ingeniero, los principios de la Mecánica necesarios para entender los criterios de estabilidad y los métodos empleados en las investigaciones sobre pandeo, que se estudian más profundamente en la Lección 8.4.

Los contenidos de esta lección se limitan a los siguientes sistemas:

- sistemas elásticos conservativos con cargas igualmente conservativas (sistemas completamente conservativos).
- sistemas cuyas posiciones puedan ser expresadas como funciones de un número finito de parámetros de desplazamiento.

Es necesario añadir que sólo se tratarán los aspectos estáticos de la estabilidad.

2. GENERALIDADES

En esta lección se estudiarán los cambios de configuración de un sistema con respecto a su posición inicial; todo cambio de configuración es considerado un desplazamiento del sistema. Una posición puede ser definida empleando un número finito de variables independientes, llamadas coordenadas generalizadas, que se llamarán q_1, q_2, ... q_n o abreviadamente q_i. Una viga con un solo vano puede tener un número infinito de coordenadas generalizadas que representen su deformada, como los coeficientes q_i de una serie de Fourier:

$$y = \sum_i q_i \sin i\pi x / L$$

Esta serie, sin embargo, puede ser aproximada por un número finito de términos con un número finito de coordenadas generalizadas, que indicarán los grados de libertad del sistema. Si se considera la viga de la Figura 1, las coordenadas generalizadas pueden ser los grados de libertad de los nudos i y j en los extremos de la viga: dos desplazamientos u y v y una rotación θ por nudo (todos en el plano). Si se admite que la deformada elástica de la viga puede ser definida usando funciones de interpolación, entonces el vector desplazamiento de la viga puede expresarse de la siguiente forma $D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j)$.

En los apoyos, las condiciones de contorno imponen restricciones a las coordenadas generalizadas. En la Figura 2, por ejemplo, las condiciones de contorno imponen la nulidad del vector desplazamiento en el empotramiento de la viga en voladizo: $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Un sistema estructural se encuentra sometido, en general, a fuerzas internas y externas; las fuerzas internas suelen ser fuerzas de tracción, como las debidas a tensiones que aparecen en las caras de los cubos infinitesimales del material. Las fuerzas externas actúan sobre el volumen (por ejemplo la gravedad) y/o sobre la superficie de los elementos del sistema (fuerzas de contacto o momentos).

Al producirse un cambio en la configuración del sistema la Ley de Conservación de la Energía puede expresarse como:

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \qquad (1)$$

donde: W_{ext} es el trabajo desarrollado sobre el sistema por las fuerzas externas

Q es el calor que entra en el sistema

ΔT es el incremento de la energía cinética

ΔU es el incremento de la energía interna

ΔU también se le conoce como energía de deformación.

Por otro lado, la Ley de la Energía Cinética se puede expresar como:

$$W = W_{ext+W_{int}} = \Delta T \qquad (2)$$

donde: W_{int} es el trabajo desarrollado por las fuerzas internas

W es trabajo total ejercido sobre el sistema por todas las fuerzas

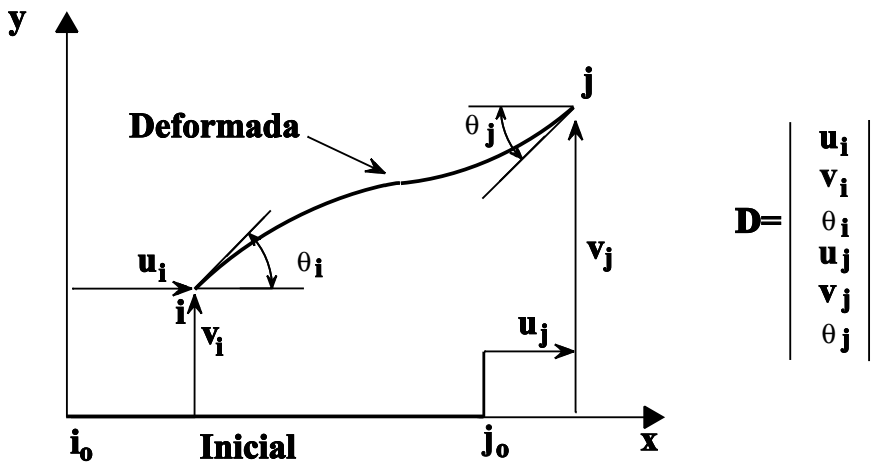
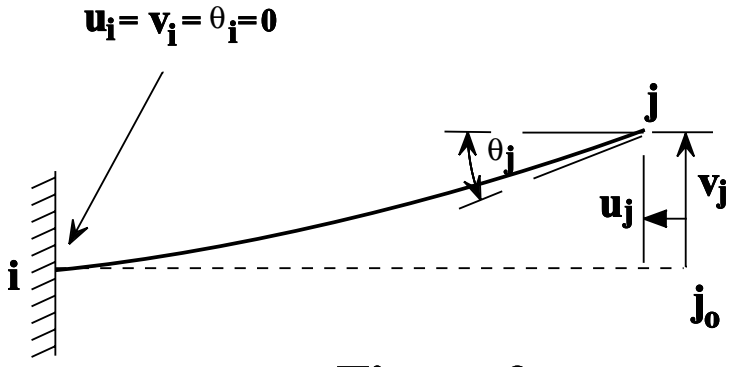


Figura 1



$$D = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix}$$

Figura 2

Nota: ΔU sólo tiene sentido en sistemas deformables; para sistemas rígidos:

$$\Delta U = 0$$

por lo que

$$W_{int} = 0 \quad (5)$$

Si tan sólo se consideran los aspectos estáticos, no habrá variación en la energía cinética durante el desplazamiento (velocidad muy baja):

$$\Delta T = 0 \quad (6)$$

y las Ecuaciones (1), (2) y (5) derivan en:

$$W_{ext} = \Delta U \quad (7)$$

$$W_{ext} + W_{int} = 0 \quad (8)$$

Ecuaciones (1) y (2) derivan en:

$$W_{int} = Q \cdot \Delta U \quad (3)$$

Puesto que sólo se consideran procesos adiabáticos, Q = 0 y la Ecuación (3) se puede rescribir en la siguiente forma:

$$W_{int} = -\Delta U \quad (4)$$

3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales que se discutirá en esta sección es ampliamente usado en la resolución de problemas de estabilidad. El primer paso será establecer cuál es la configuración de equilibrio del sistema para después estudiar su estabilidad.

Un sistema dado puede tomar cualquiera de las posibles configuraciones que sean compatibles con sus condiciones de contorno, pero sólo en una de ellas las fuerzas aplicadas estarán en condición de equilibrio con las reacciones en los apoyos.

Supóngase que el sistema en esa situación de equilibrio está definido por las coordenadas generalizadas q_1, q_2, ... q_n.

El sistema podría verse sometido a un pequeño desplazamiento arbitrario en su configuración, que le permitiría seguir cumpliendo las condiciones de contorno, pero de forma que las fuerzas siguieran actuando con sus valores iniciales. Estos pequeños desplazamientos no tienen por que ocurrir en la realidad; son imaginarios y tienen por único objeto realizar comparaciones, por lo que se denominan desplazamientos virtuales; estos desplazamientos virtuales son independientes de la carga y se denotarán como δq_i. Por lo tanto, toda la energía o trabajo desarrollado sobre el sistema será trabajo o energía virtual.

Para un sistema rígido las ecuaciones (5) y (8) llevan a:

$$\delta W_{ext} = 0 \qquad (9)$$

donde δW_{ext} es el trabajo virtual de las fuerzas externas realizado a lo largo del desplazamiento virtual; el Principio de los Trabajos Virtuales se expresará como sigue:

"Un sistema rígido se encuentra en una configuración de equilibrio si el trabajo virtual de todas las fuerzas externas actuantes sobre él es nulo para cualquier desplazamiento virtual que cumpla las condiciones de contorno."

Para un sistema deformable, la Ecuación (7) es:

$$\delta W_{ext} = \delta U \qquad (10)$$

donde δU es la variación de la energía de deformación debida al desplazamiento virtual, y el Principio de los Trabajos Virtuales tomará la forma:

"Un sistema deformable estará en su situación de equilibrio si el trabajo virtual de todas las fuerzas externas actuando sobre él es igual a la variación de la energía de deformación para cualesquiera desplazamientos virtuales compatibles con las condiciones de contorno."

Esta es la expresión del Principio que se usa frecuentemente en el análisis estructural; usando la Ecuación (8), es equivalente a la condición:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \qquad (11)$$

Configuración de Equilibrio Verdadera

Para un sistema con un número finito de coordenadas generalizadas (q_1, q_2, ...q_n), el trabajo virtual δW correspondiente a un desplazamiento virtual desde la posición (q_1, q_2, ...q_n) hasta una posición vecina ($q_1 + \delta q_1$, ...$q_n + \delta q_n$) puede representarse como una función lineal de las coordenadas:

$$\delta W = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots = \sum_i Q_i \, \delta q_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (12)$$

donde Q_1, Q_2, ...Q_n son ciertas funciones de las coordenadas generalizadas qi, y de las fuerzas internas (para sistemas deformables) y externas.

Por analogía con el trrabajo desarrollado por una fuerza, las funciones Q_1, Q_2, ... Q_n se llaman componentes de las fuerzas generalizadas. Los términos Qi no tienen necesariamente dimensiones de una fuerza, y frecuentemente

no tienen las mismas dimensiones; su dimensión está condicionada por el hecho de que el producto $Q_i\ \delta q_i$ tiene dimensiones de trabajo. Las Ecuaciones (11) y (12) llevan a:

$$\sum_i Q_i\ \delta q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

Como δq_i son arbitrarios, independientes de las variaciones en qi, las Ecuación (13) implica que:

$$Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

La solución de estas n ecuaciones simultáneas de equilibrio suministran los valores de las coordenadas qi en la configuración verdadera de equilibrio.

4. PRINCIPIO DEL VALOR ESTACIONARIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL

Las fuerzas internas y externas serán ambas conservativas (sistema completamente conservativo). Las fuerzas internas derivan de una función escalar de las coordenadas generalizadas $U(q_1, q_2, ...q_n)$ siendo U la energía de deformación que se definió en la Ecuación (4). Igualmente, las fuerzas externas provienen de una función $\Omega(q_1, q_2, ...q_n)$ siendo Ω la energía potencial de dichas fuerzas. De ello se deduce que todas las fuerzas son función de una sola función escalar $V (q_1, q_2, ...q_n)$ llamada función potencial total, siendo su valor la energía potencial total del sistema. Esta energía potencial total puede expresarse como:

$$V = U + \Omega \qquad (15)$$

La cantidad de energía potencial generalmente se desconoce. Sólo los cambios en la energía potencial son medibles.

Como el sistema se supone conservativo,

$$\delta W = -\delta V \qquad (16)$$

donde δV es la variación de la energía potencial total debida a un desplazamiento virtual, y las Ecuaciones (11) y (16) se convierten en:

$$\delta V = 0 \qquad (17)$$

La Ecuación (17) es la expresión analítica del Principio del Valor Estacionario de la Energía Potencial Total que puede enunciarse del siguiente modo:

"De todas las configuraciones geométricamente posibles que un sistema puede adoptar, la que corresponde a un estado de equilibrio entre fuerzas aplicadas y reacciones inducidas, es aquélla en la cual la energía potencial total del sistema tiene un valor estacionario."

Configuración de Equilibrio Verdadera

Como $V = V(q_1, q_2, ...q_n)$, δV puede expresarse así:

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\delta V}{\delta q_2} \cdot \delta q_2 + \ldots = \sum_i \frac{\delta V}{\delta q_i} \cdot \delta q_i \qquad (18)$$

En donde los valores de δqi son arbitrarios e independientes por lo que si $\delta V = 0$, entonces:

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots, n \qquad (19)$$

El Principio suministra n ecuaciones de equilibrio en términos de las cargas aplicadas y de las coordenadas generalizadas q_i de las que se pueden deducir los valores de q_i, que definen la configuración de equilibrio.

No debe olvidarse que las Ecuaciones (12), (16), (18) y (19), y el hecho de que los valores de δq_i sean arbitrarios e independendientes implican que:

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = -Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (20)$$

En resumen, debe tenerse en cuenta que para sistemas conservativos, el Principio de los Trabajos Virtuales se convierte en el Principio del Valor Estacionario de la Energía Potencial Total. Este Principio es muy potente y puede ser usado para desarrollar métodos aproximados para resolver problemas de estabilidad en el diseño de estructuras.

5. ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Un sistema se dice que está en una posición de equilibrio estable si, después de desplazarlo ligeramente de dicho equilibrio tiende a retornar a su estado inicial. Si la perturbación provoca una separación de la configuración de equilibrio, entonces el equilibrio es inestable. Se puede imaginar una situación intermedia en la cual la configuración perturbada permanece una vez desaparecida la causa que la creó. Esta situación recibe el nombre de equilibrio neutro y se ilustró en la Lección 8.1 con el bien conocido ejemplo de la bola y la superficie. Evidentemente, las pequeñas separaciones deben cumplir las condiciones de contorno de manera que provoque pequeñas variaciones en las coordenadas generalizadas del sistema, de este modo se puede basar en desplazamientos virtuales la discusión de la estabilidad de la posición de equilibrio.

El Principio de los Trabajos Virtuales implica que la energía potencial es estacionaria en la posición de equilibrio. También se mostró, en la Lección 8.1, que el equilibrio es estable cuando se alcanza un mínimo local. La condición de estabilidad puede enunciarse en la forma siguiente:

"La existencia de un mínimo local de la energía potencial total en la configuración de equilibrio constituye una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de dicha configuración."

Si por ΔV se denota el incremento de la energía potencial total como consecuencia de un desplazamiento virtual con respecto a la posición de equilibrio, entonces:

$\Delta V > 0$ para equilibrio estable

$\Delta V = 0$ para equilibrio neutro (21)

$\Delta V < 0$ si el equilibrio es inestable

Se puede ver como, puesto que la energía potencial es estacionaria en el equilibrio ($\delta V = 0$), la discusión de la estabilidad conlleva la discusión de los términos de orden superior que aparecen en el incremento de la energía potencial ΔV.

La función $V(q_1, q_2, ...q_n)$ y sus derivadas parciales hasta tercer orden con respecto a qi se supondrán funciones continuas de q_i; por lo que usando el desarrollo en serie de Taylor en la vecindad del equilibrio inicial, el incremento ΔV de V correspondiente a variaciones virtuales δq_i de q_i, se tiene:

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 0(\delta^3) \qquad i, j = 1, \ldots, n \qquad (22)$$

$$\text{o} \qquad \Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + 0(\delta^3) \qquad (23)$$

$$\text{con} \quad \delta^2 V = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} \delta q_i \delta q_j \quad i, j = 1, \ldots, n \qquad (24)$$

siendo $0(\delta^3)$ un cero de tercer orden.

El Principio de los Trabajos Virtuales implica que una condición necesaria para el equilibrio es que δV sea nulo para todo δq_i:

$$\delta V = 0 \quad \text{o} \quad \partial V / \partial q_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (25)$$

El signo de ΔV está gobernado por el signo de $\delta^2 V$, por lo que teniendo en cuenta la Ecuación (21), la condición para la estabilidad se convierte en:

$$\delta^2 V > 0 \qquad (26)$$

$$\text{Si :} \qquad a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \qquad (27)$$

$$\text{entonces} \quad \delta^2 V = \sum_i \sum_j a_{ij} \delta q_i \delta q_j \qquad i,j = 1,2,...,n \qquad (28)$$

Introduciendo la matriz [a] de coeficientes a_{ij}, la Ecuactión (28) se convierte en:

$$\delta^2 V = \{\delta q\}^t [a] \{\delta q\}$$

La condición de estabilidad (Ecuación (26)) requiere que:

[a] = a matriz definida positiva

que significa que todos los menores principales de [a] deben ser positivos.

Los coeficientes a_{ij} son funciones de las cargas aplicadas y de las propiedades del sistema, por lo que la definición positiva de [a] es la condición que las cargas deben cumplir para que el sistema sea estable.

6. EQUILIBRIO NEUTRO-CARGAS CRÍTICAS

La existencia de un mínimo relativo para la energía potencial total cuando la configuración es estable, y sabiendo que el equilibrio neutro es el límite de la estabilidad, la condición de equilibro neutro puede escribirse como:

$$\delta^2 V = 0 = \text{mínimo} \qquad (30)$$

Considerando la Ecuación (29), para el caso no trivial $\{\delta q\} \neq 0$, la situación de equilibrio neutro se produce cuando la matriz [a] es singular.

Los coeficientes a_{ij} de [a] son función de las propiedades geometricas y mecánicas del sistema, así como de las cargas aplicadas.

Es de gran importancia práctica la determinación de las cargas críticas que corresponden a un equilibrio neutro en la estructura, pues ellas determinan el límite para el cambio de la estabilidad del sistema.

Introduciendo un multiplicador común α para todos las componentes de las cargas y definiendo un sistema de referencia S_1 (correspondiente a $\alpha = 1$), las cargas, en cualquier momento de una historia temporal proporcional, serán iguales a:

$$S = \alpha S_1 \qquad (31)$$

Sólo se desconoce el multiplicador α por lo que la condición de equilibrio neutro requiere la solución de un problema de autovalores:

$$\det [a(\alpha)] = 0 \qquad (32)$$

Resolviendo la Ecuación (32) se obtiene un conjunto de soluciones α, llamadas α_{cr}, cuyo número es igual al de coordenadas generalizadas del sistema. Los vectores propios representan las configuraciones deformadas asociadas a cada solución α. Muchas de estas soluciones matemáticas no son interesantes para el el diseñador, que está interesado únicamente en las cargas bajo las cuales el sistema, estable cuando esta descargado, se vuelve inestable. Estas cargas se obtienen con el menor valor positivo α°_{cr} de las α_{cr} y, por ello, las cargas críticas son:

$$S_{cr} = \alpha^{\circ}_{cr} S_1 \qquad (33)$$

7. EJEMPLOS BÁSICOS

Ejemplo 1

Es interesante ilustrar los criterios de estabilidad con el ejemplo básico de un elemento biarticulado sometido a compresión, como se muestra en la Figura 3; para facilitar los cálculos de la energía de deformación, se ha supuesto la flexibilidad del elemento concentrada en un muelle elástico rotacional, situado en el medio del vano, como se indica en la Figura 4. Las dos barras, cada una de longitud L/2, son rígidas, por lo que su energía de deformación es cero. El valor K del muelle, constante en B, se determinará después. Los movimientos laterales de las articulaciones A y C están impedidos. La carga P actúa verticalmente hacia C, y la carga externa F, presente desde el principio del proceso de carga, actúa horizontalmente hacia la izquierda de B.

Debido a las condiciones de contorno, el sistema sólo tiene un grado de libertad. Se ha elegido como coordenada generalizada, δ, el desplazamiento del punto B, ver Figura 5. (Otra posibilidad hubiera sido escoger la rotación de las articulaciones superior o inferior). Antes de estudiar la estabilidad de este sistema, se determinará la configuración de equilibrio bajo las cargas P y F. Los desplazamientos se supondrán suficientemente pequeños de modo que las funciones trigonométricas se reduzcan al primer término de su desarrollo en serie.

La energía del sisteme en su posición deformada es la del muelle, que es:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} K\theta^2 \qquad (34)$$

donde U_0 es la energía potencial del sistema en su posición incial

θ es el giro en el muelle (ver Figura 5).

Es fácil demostrar que $\theta = 4\delta/L$ lo que deriva en:

$$U = U_0 + 8K\delta^2 / L^2 \qquad (35)$$

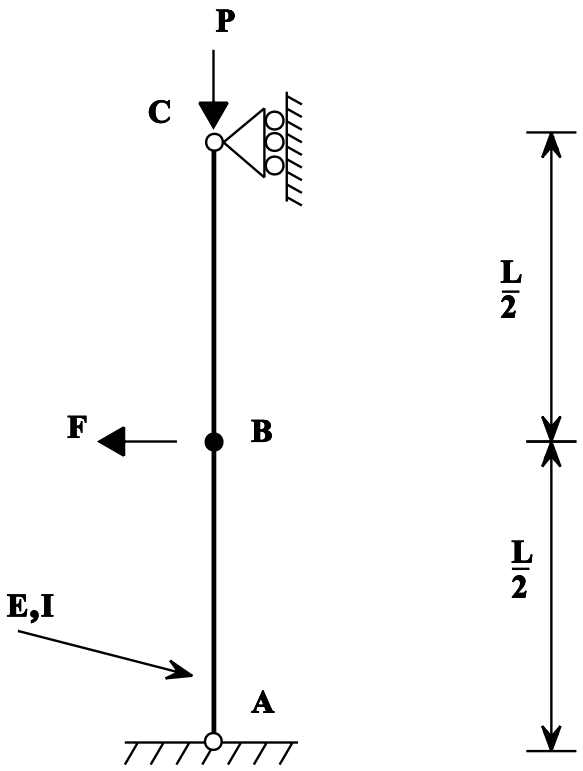


Figura 3

La energía potencial de las cargas externas es:

$$\Omega = \Omega_0 - P_\varepsilon - F_\delta \qquad (36)$$

donde Ω_0 es la energía potencial de las cargas externas cuando el sistema está en su conficuración inicial

ε es el desplazamiento vertical inducido en C (ver Figura 5)

Se puede demostrar que, para pequeños displazamientos, $\varepsilon = 2\delta^2/L$ y esto ahace que:

$$\Omega = \Omega_0 - 2P\delta^2 / L - F\delta \qquad (37)$$

La energía potencial total es:

$$V = U + \Omega = V_0 + 8K\delta^2 / L^2 - 2P\delta^2 / L - F\delta \qquad (38)$$

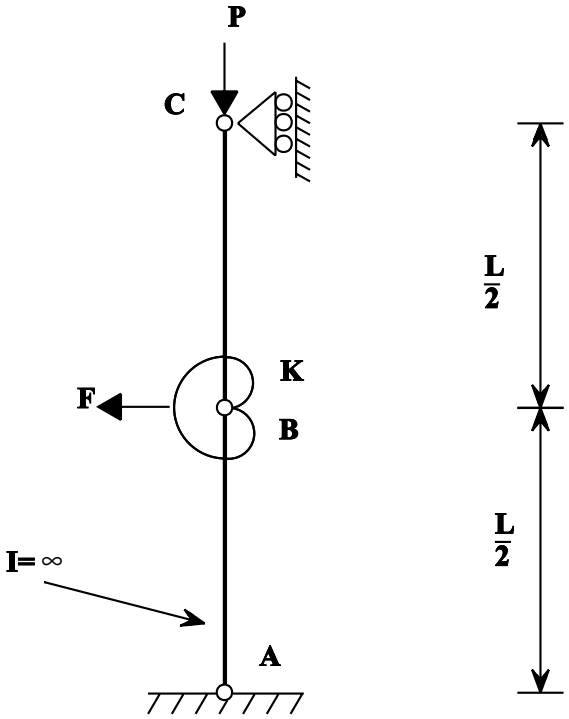


Figura 4

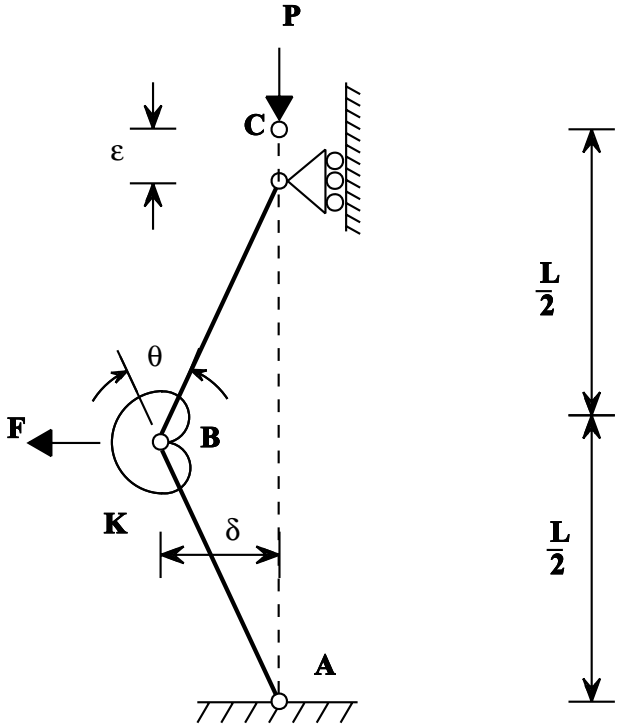


Figura 5

donde V_0 es la energía potencial inicial del sistema.

De acuerdo con la Ecuación (19), la configuración de equilibrio es la solución de:

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = (16K - 4PL)\,\delta / L^2 - F = 0 \qquad (39)$$

Que deriva en:

$$\delta = FL^2 / (16K - 4PL) \qquad (40)$$

La condición de estabilidad, según la Ecuación (26), puede expresarse como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = (16K - 4PL) / L > 0 \qquad (41)$$

La condición que debe cumplir el sistema para mantenerse estable es:

$$P < 4K / L \qquad (42)$$

El valor de límite de P es la carga crítica P_{cr} en la que se produce el pandeo elástico. Es importante advertir que este valor crítico es independiente de la fuerza F que actúa sobre el sistema. En particular, esta carga crítica es válida para el caso particular F = 0, que es el problema clásico del pandeo de una columna frente a una carga axial.

En la descripción del problema se dijo que la flexibilidad K se suponía concentrada en el punto central. Para que sea idéntica a la del elemento continuo debe ser tal que dé el mismo desplazamiento δ en B debido a F, suponiendo que P sea cero.

Para un elemento continuo, la resistencia de materiales permite calcular:

$$\delta = FL^3 / (48\,EI) \qquad (43)$$

donde I es el momento de inercia de la sección del elemento

E es el módulo de Young.

Para un sistema de barra y muelle, la expresión del momento en B siendo $\theta = 4\delta/L$ conduce a:

$$\delta = FL^2/(16K) \qquad (44)$$

Las Ecuaciones (43) y (44) nos dan un valor equivalente de la rigidez del muelle: $K = 3EI/L$, siendo el valor crítico de P igual a:

$$P_{cr} = 12EI/L^2 \qquad (45)$$

Este valor debe ser comparado con el conocido resultado de Euler $\pi^2 EI/L^2$; la exactitud del resultado depende, en efecto, de las suposiciones realizadas para la determinación de la rigidez equivalente K.

Ejemplo 2

Se considera a continuación el sistema de barras y muelles de la Figura 6. Las dos barras

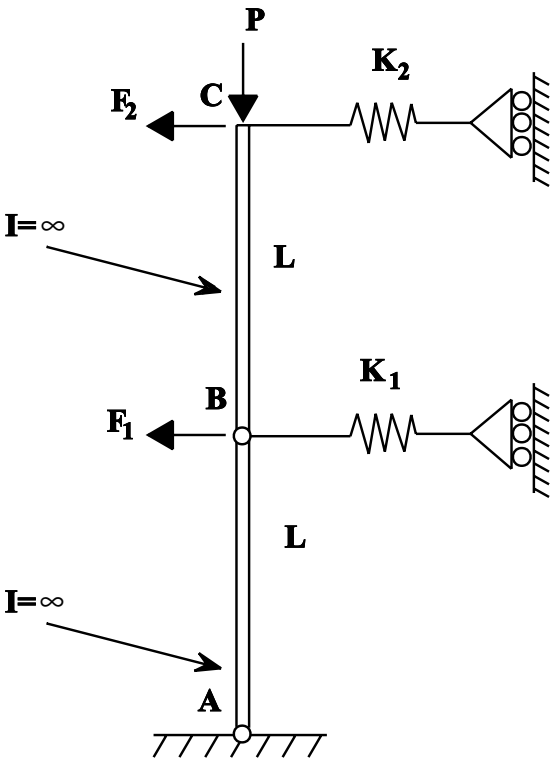


Figura 6

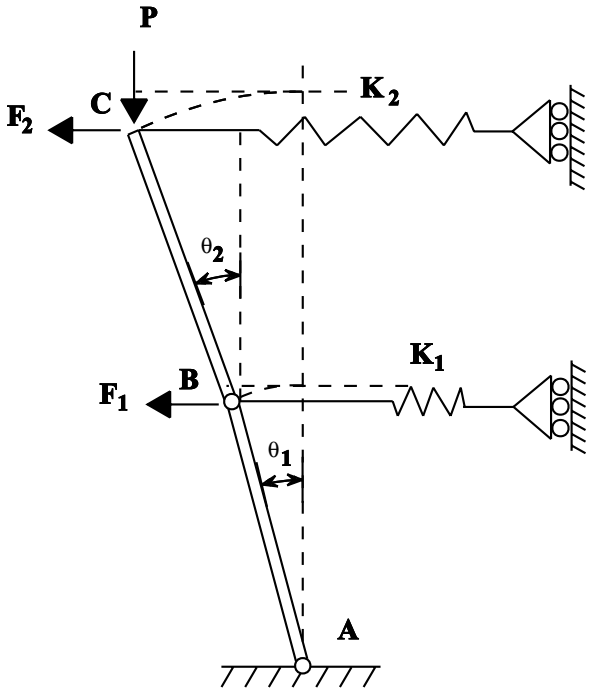


Figura 7

AB y BC, cada una de logitud L, son rígidas (energía de deformación nula) y se encuentran unidas mediante una rótula en B. El movimiento lateral de los puntos B y C se encuentra limitado por los dos muelles, que trabajan tanto a compresión como a tracción, y cuyas rigideces son K_1 y K_2 respectivamente. La carga P actúa verticalmente hacia abajo en C, y las cargas externas F_1 y F_2 lo hacen horizontalmente hacia la izquierda en B y C respectivamente.

Con las condiciones de contorno indicadas, el sistema posee dos grados de libertad. Los giros θ_1 y θ_2 de las dos barras se han elegido como las coordenadas generalizadas (ver Figura 7). Primero se determinará la posición de equilibrio del sistema, y después se estudiará su estabilidad.

La energía elástica del sistema es la acumulada en los muelles. Cada muelle tiene una energía potencial igual a $K\delta^2/2$ donde δ es el desplazamiento lateral en el muelle correspondiente y K su rigidez (o constante elástica). Por consiguiente, la energía elástica del siste-

ma en una configuración definida por (θ_1,θ_2) es:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}K_1L^2\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2L^2(\theta_1+\theta_2)^2 \qquad (46)$$

La energía potencial debido a las cargas externas será:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{2}P\,L\,(\theta_1^2+\theta_2^2) - F_1\,L\,\theta_1 - F_2\,L\,(\theta_1+\theta_2) \qquad (47)$$

La energía potencial total es:

$$V = U + \Omega \qquad (48)$$

Y sus derivadas son:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = K_1L^2\,\theta_1 + K_2\,L^2\,(\theta_1+\theta_2) - \\ \qquad - P\,L\,\theta_1 - F_1\,L - F_2\,L \\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta_2} = K_2\,L^2\,(\theta_1+\theta_2) - P\,L\,\theta_2 - F_2\,L \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2} = K_1L^2 + K_2\,L^2 - P\,L \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2} = K_2\,L^2 - P\,L \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\,\partial\theta_1} = K_2\,L^2 \end{array}\right\} \qquad (49)$$

Configuración de Equilibrio

La condición de energía potencial estacionaria, Ecuación (19), permite escribir el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_1(K_1L^2 + K_2\,L^2 - PL) + \theta_2\,K_2\,L^2 = (F_1+F_2)\,L \\ \theta_1K_2\,L^2 + \theta_2\,(K_2\,L^2 - PL) = F_2\,L \end{array}\right. \qquad (50)$$

La configuración de equilibrio, definida por (θ_1, θ_2), puede determinarse sin más que resolver dicho sistema de ecuaciones. La condición para la existencia de una solución no trivial es que el determinante no sea nulo, es decir:

$$\text{Determinante} = (K_2\,L^2 - PL)\,K_1L^2 + \\ + PL\,(PL - 2K_2\,L^2) \neq 0 \qquad (51)$$

Estabilidad

La condición de estabilidad de una posición de equilibrio aparece en la Ecuación (26). La matriz [a], cuyos términos aparecen en la Ecuación (27), toma la siguiente forma para este problema:

$$[a] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} K_1L^2 + K_2\,L^2 - PL & K_2\,L^2 \\ K_2\,L^2 & K_2\,L^2 - PL \end{bmatrix} \qquad (52)$$

La matriz [a] ha de ser definida positiva para que se cumpla la condición de estabilidad, por lo que sus menores habrán de ser todos positivos:

$$(K_2\,L^2 - PL)\,K_1L^2 + PL\,(PL - 2K_2\,L^2) > 0 \qquad (53)$$

$$K_2\,L^2 - PL > 0 \qquad (54)$$

Hay que resaltar que si se cumple la condición (53) también se cumple la condición (51) sobre existencia de una configuración de equilibrio. Ello se debe a que V es una función cuadrática de las coordenadas θ.

De las Ecuaciones (53) y (54) se obtiene que la condición más exigente sobre la carga vertical P es:

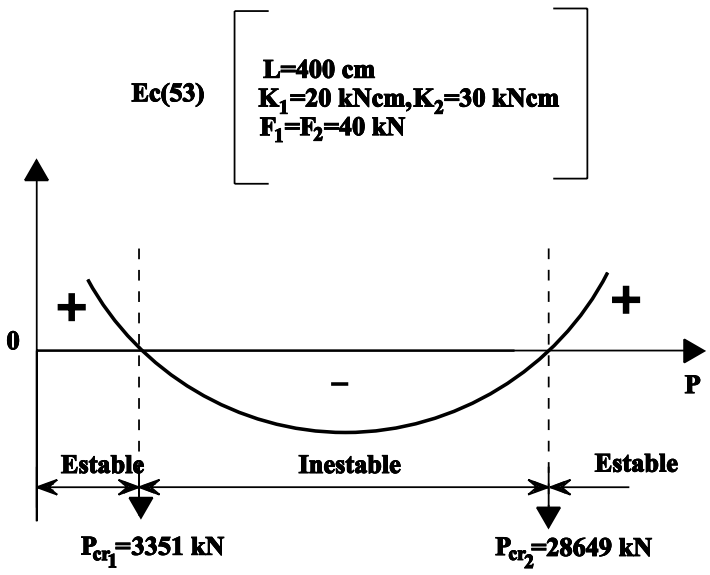


Figura 8

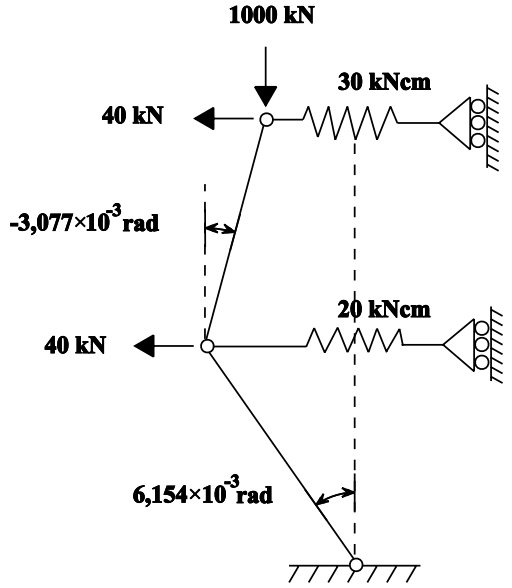


Figura 9 Configuración de equilibrio estable para $P<Pcr_1$

o

$$P < 0,5\,L\,(K_1 + 2K_2 - (K_1^2 + 4K_2^2)^{1/2})$$
$$P > 0,5\,L\,(K_1 + 2K_2 + (K_1^2 + 4K_2^2)^{1/2}) \quad (55)$$

Las Figuras 8, 9 y 10 corresponden al caso en que: L = 400, K_1 = 20, K_2 = 30, y F_1 = F_2 = 40 (unidades: kN cm)

Como el ejemplo 1, los valores críticos P_{cr1} y P_{cr2}, que delimitan el dominio inestable, son independientes de las cargas externas F_1 y F_2, y que por lo tanto los resultados son válidos para el caso particular F_1 = F_2 = 0.

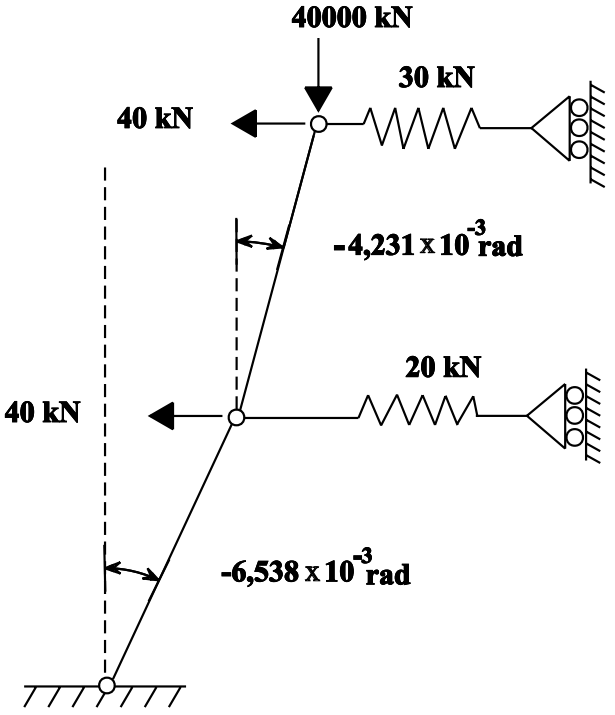


Figura 10 Configuración de equilibrio estable para $P>Pcr_2$

8. RESUMEN FINAL

1. El análisis de los problemas de estabilidad requiere el empleo de criterios energéticos derivados del Principio de los Trabajos Virtuales y del Principio de Energía Potencial Total Estacionaria. Ambos principios son idénticos para sistemas conservativos.
2. Cualquier configuración de un sitema puede definirse, generalmente, por un conjunto de coordenadas generalizadas qi. Llamando V a la energía potencial total del sistema, una posición de equilibrio debe satisfacer $\delta V = 0$ y la condición de estabilidad para ese equilibrio es $\delta^2 V > 0$. Las variaciones de V pueden evaluarse mediante cualquier desplazamiento virtual δq_i que satisfaga las condiciones de contorno.
3. Las cargas críticas se derivan de la condición de equilibrio neutro: $\delta^2 V = 0$ = minimum.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Mason J., “Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory”, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1980.

2. Richards T.H., “Energy Methods in Stress Analysis”, Rainbow-Bridge Book Company, 1977.

3. Langhaar H.L., “Energy Methods in Applied Mechanics”, John Wiley and Sons, New York, London, 1962.

4. Massonnet C., “Résistance des matériaux”, Volume 2, Dunod, Paris, 1963.

5. Timoshenko S.P., “Theory of Elastic Stability”, McGraw Hill Book Company, New York, 1960.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

OBJETIVOS/CONTENIDO

Se describirán los principales tipos de inestabilidades elásticas y se obtendrán las cargas críticas para columnas, vigas y placas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

LECCIONES AFINES

Lecciones 8.6.1 y 8.6.2: Pandeo de Elementos Estructurales

Lección 9.7: Longitud de pandeo

EJEMPLO RELACIONADO

Ejemplo 8.2: Métodos Energéticos

RESUMEN

Se explicará como se pueden calcular las cargas críticas de pandeo solucionando las ecuaciones diferenciales de la estructura. Se obtendrán las cargas críticas, supuestas cargas y condiciones de contorno simples, para los casos principales que a continuación se enumeran:

- pandeo a flexión de columnas.
- pandeo lateral de vigas.
- pandeo de placas.

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la inestabilidad puede producirse en todos los elementos sometidos a compresión El tipo más simple de pandeo es el de una barra, inicialmente recta, comprimida por dos fuerzas axiales iguales y opuestas (Figura 1). Otros tipos de pandeo, de gran importancia prácticas en la construcción metálica, son:

- pandeo lateral de vigas (Figura 2).
- pandeo de placas (Figura 3).
- pandeo de depósitos (Figura 4).

Las diferencias fundamentales en el comportamiento de columnas, láminas, placas y depósitos se muestran en la Figura 5. Durante todo el rango elástico la carga crítica y la carga máxima no difieren mucho para una columna real (imperfecta). Para una placa, si su resistencia postcrítica se calcula con deformaciones laterales razonablemente pequeñas, se puede conseguir una carga mayor que la carga crítica. Sin embargo, para un cilindro de pared delgada la carga máxima en la situación real (imperfecta) es mucho menor que la carga crítica teórica.

Para barras comprimidas, el pandeo a flexión que se muestra en la Figura 1 no es el único modo de pandeo que se puede presentar. En algunos casos, puede darse un pandeo torsional (Figura 6) o una combinación de pandeo torsio-

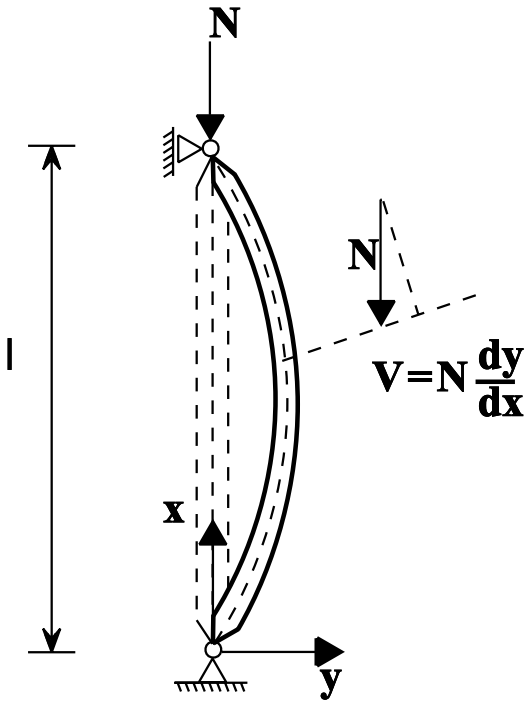


Figura 1 Pandeo a flexión de columnas

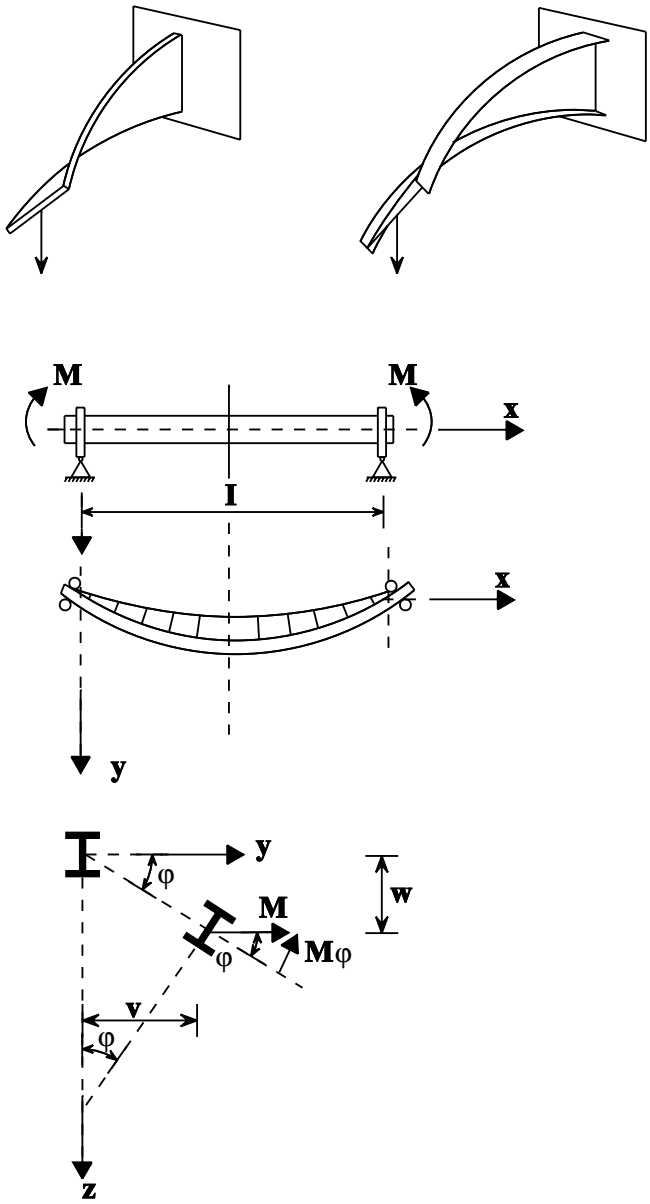


Figura 2 Pandeo lateral de vigas

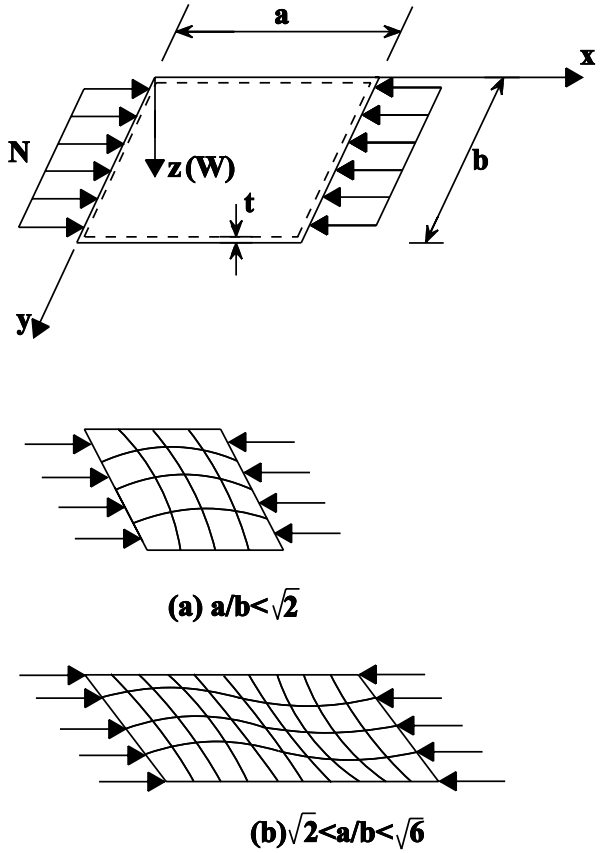


Figura 3 Pandeo de placas

nal y a flexión. Si el elemento tiene paredes delgadas, se puede producir un pandeo de placa de las almas o alas de la sección (Figura 7) que pueden interaccionar con el pandeo global de todo el miembro.

La determinación de la carga crítica usando la teoría de bifurcación aprovecha el hecho de que la situación límite está asociada a un equilibrio neutro. Se puede establecer la condición de equilibrio en una configuración ligeramente deformada, y tratar de resolver las ecuaciones diferenciales resultantes para los casos más simples. La carga crítica suministra información sobre el nivel de estabilidad de un sistema o miembro. También se usa como valor base (límite) para el cálculo de la carga última en estructuras con peligro de inestabilidad, como se verá en lecciones posteriores. En esta lección las cargas críticas se obtendrán resolviendo las ecuaciones diferenciales del equilibrio. Estas soluciones sólo se podrán calcular para los casos más simples de carga y condiciones de contorno. Un método general de cálculo de dichas cargas usando criterios energéticos se presenta en la Lección 8.4.

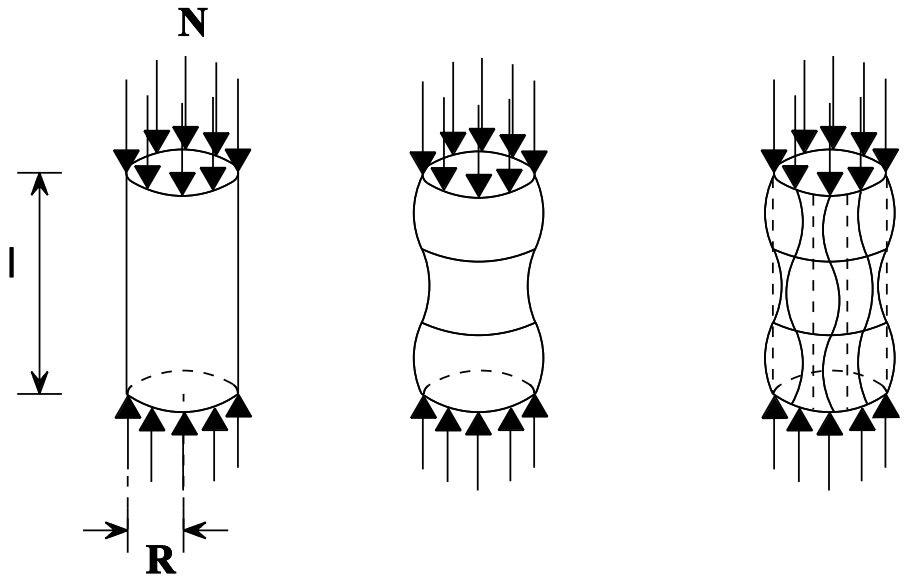


Figura 4 Pandeo de láminas

2. PANDEO FLEXURAL DE COLUMNAS

Alcanzada la carga crítica, el equilibrio estable de la columna recta se encuentra en su límite, y existe una posición, ligeramente deformada, que satisface igualmente el equilibrio (Figura 1). Para esta configuración, el momento flector, en cualquiera de las secciones de una barra simplemente apoyada, viene dado por:

$$M = N \cdot y \qquad (1)$$

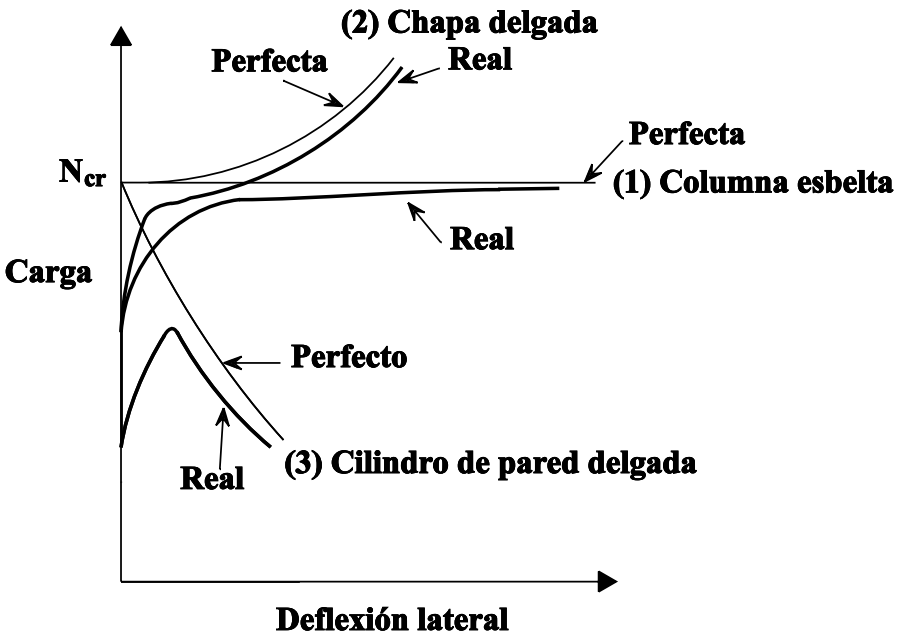


Figura 5 Curvas elásticas postpandeo para elementos comprimidos

La ecuación diferencial de la flexión simple, para el caso grandes de deformaciones es:

$$\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI_z} \qquad (2)$$

o su aproximación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{M \cdot y}{EI_z} \qquad (3)$$

que es suficientemente buena para cargas cercanas a la crítica y para pequeñas deformaciones. Introduciéndola en la Ecuación (1), ésta se convierte en:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N \cdot y}{EI_z} = 0 \qquad (4)$$

donde EI_z es la rigidez a flexión de la columna en el plano de pandeo.

La solución general de esta ecuación es:

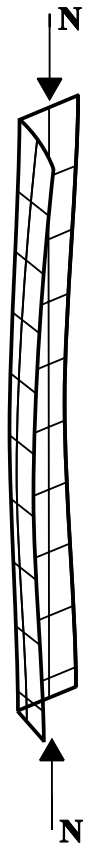


Figura 6 Pandeo torsional de una columna

$$y = A \sin kx + B \cos kx \qquad (5)$$

donde

$$k^2 = \frac{N}{EI_z} \qquad (6)$$

(sólo interesan soluciones positivas, que corresponden a fuerzas de compresión).

A y B son constantes de integración que deben ajustarse para satisfacer las condiciones de contorno:

$$y = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \qquad (7a)$$

y

$$y = 0 \quad \text{para} \quad x = l \qquad (7b)$$

La primera condición de contorno conduce a B = 0; y la segunda a:

$$A \sin kl = 0 \qquad (8)$$

que exige que, o bien A = 0 (en cuyo caso tenemos la solución trivial, sin deformaciones), o sin kl = 0, o lo que es igual:

$$kl = n\pi \qquad (9)$$

siendo n un entero cualquiera.

Finalmente, la carga crítica puede obtenerse de:

$$N_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{l^2} \qquad (10)$$

La Figura 8 muestra los tres primeros modos de pandeo (n = 1, 2 y 3 respectivamente).

El menor valor de kl, y consecuentemente la carga crítica Ncr, que satisface la Ecuación (9) corresponde a n = 1. Esta carga crítica se llama carga de Euler. Si se emplean riostras o refuerzos los modos de pandeo altos pueden ser decisivos.

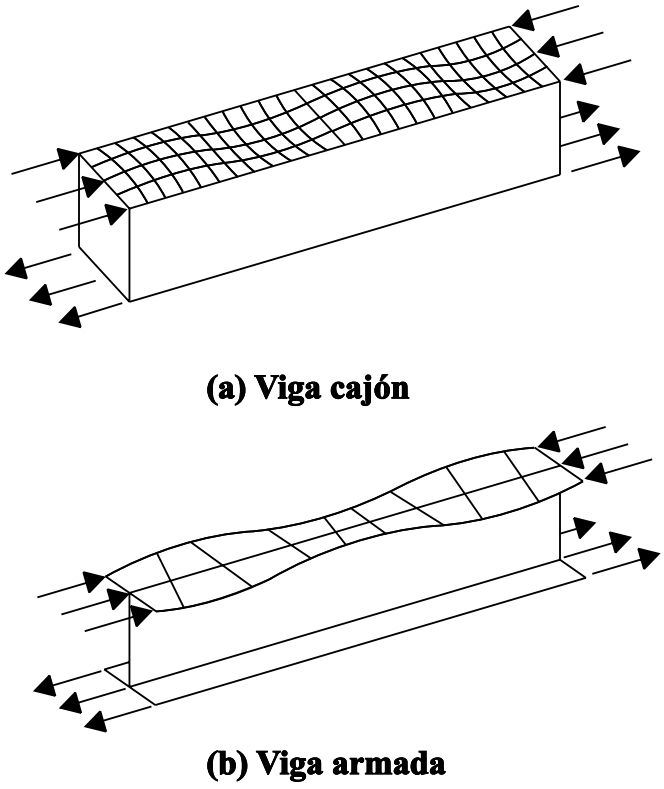


Figura 7 Pandeo de placas en partes de un elemento estructural

La carga crítica para una columna simplemente apoyada fue calculada por Leonhard Euler en 1744. Históricamente hablando, es la primera solución descubierta para un problema de estabilidad. El mismo procedimiento puede ser usado para otro tipo de condiciones de equilibrio.

La carga crítica recién calculada, no tiene en cuenta los esfuerzos cortantes. Si se desea tenerlos en cuenta habrá que añadir la deformación a cortante:

$$\gamma = \frac{V}{GA_v} \qquad (11)$$

siendo V el cortante, que puede calcularse como:

$$V = N \frac{dy}{dx} \qquad (12)$$

y Av es el área a cortante de la sección.

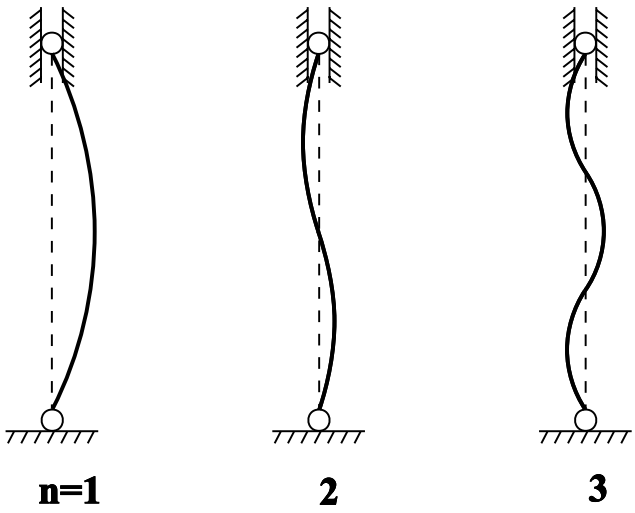


Figura 8 Modos de pandeo

Añadiendo este cambio, debido al cortante, en la pendiente de la curva de deformación, la ecuación diferencial del pandeo se convierte en:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{GA_v}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Ny}{EI_z} \qquad (13)$$

cuya carga crítica es:

$$N_{cr}^{*} = \frac{N_{cr}}{1 + \frac{N_{cr}}{GA_v}} \qquad (14)$$

Por tanto, la acción de las fuerzas cortantes reduce el valor de la carga crítica cuando se compara con la carga de Euler. En el caso de columnas macizas, la influencia del cortante puede ser despreciada, pero en el caso de miembros compuestos, basados en presillas o celosías, este efecto debe tenerse en cuenta.

3. PANDEO LATERAL

Cuando una viga flecta a lo largo de su eje mayor, normalmente lo hace únicamente en dicho plano. Pero, si la viga no tiene la suficiente rigidez lateral o refuerzos laterales para asegurar que así sea, entonces puede pandear fuera del plano de carga, como se muestra en la Figura 2.

Para una viga elástica recta, no hay desplazamientos fuera del plano hasta que se alcanza el valor crítico, momento en el cual pandea lateralmente y se retuerce (Figura 2). El pandeo lateral incluye tanto flexión lateral como torsión. Para el caso más simple, como el de una viga de sección simétrica respecto a dos planos, simplemente apoyada y cargada en el plano de su mayor rigidez por dos momentos iguales y opuestos (Figura 2), las ecuaciones diferenciales son:

- eje menor, flexión:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M\psi}{EI_z} \qquad (15)$$

- torsión:

$$E \cdot I_t \cdot \frac{d\psi}{dx} - EI_w \cdot \frac{d^3\psi}{dx^3} = M \cdot \frac{dv}{dx} \qquad (16)$$

donde EI_z es la rigidez respecto al eje menor; $M\psi$ es el momento lateral inducido por la torsión, ψ, de la viga; EI_t es la rigidez a torsión de Saint-Venant; EI_w es la rigidez de alabeo y $M\frac{dv}{dx}$ es el par inducido por la deformación lateral v.

Cuando ambas ecuaciones se satisfacen para todos los puntos de la viga, las deformaciones por flexión y torsión se encuentran en equilibrio. Se puede encontrar la ecuación diferencial del pandeo lateral diferenciando la Ecuación (16) y sustituyendo en la Ecuación (15):

$$E \cdot I_w \frac{d^4\psi}{dx^4} - E \cdot I_t \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{M^2\psi}{EI_z} \qquad (17a)$$

o

$$C_w \frac{d^4\psi}{dx^4} - C\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{M^2\psi}{EI_z} \qquad (17b)$$

Esta expresión fue establecida, por primera vez en 1899, por Prandtl. La solución general de esta ecuación es:

$$\psi = A_1 \operatorname{senh} k_1 x + B_1 \cosh k_1 x + A_2 \operatorname{sen} k_2 x + B_2 \cos k_2 x \qquad (18)$$

donde

$$k_1^2 = \frac{C}{2C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{EI_z\, C}} \qquad (19)$$

$$k_2^2 = -\frac{C}{2C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{EI_z\, C}} \qquad (20)$$

en las cuales A_1, A_2, B_1 y B_2 son constantes de integración que deben ajustarse de modo que se cumplan las condiciones de contorno:

$$\psi = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \qquad (21a)$$

y

$$\psi = 0 \quad \text{para} \quad x = l \qquad (21b)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \qquad (22a)$$

y

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 1 \qquad (22b)$$

Las Ecuaciones (21) y (22) indican que, en el caso que se suele denominar viga simplemente apoyada, loa apoyos deben evitar, tanto

los desplazamientos laterales, como la torsión de la sección, pero que la sección no tiene restricciones para alabear.

Las cuatro condiciones de contorno dan:

$$A_1 = B_1 = B_2 = 0 \tag{23}$$

y

$$A_2 \operatorname{sen} k_2 l = 0 \tag{24}$$

que requiere, o bien que $A_2 = 0$ (en cuyo caso no hay torsión), o

$$\operatorname{sen} k_2 l = 0, \text{i} \cdot \text{e} : \quad k_2 l = n\pi \tag{25}$$

siendo n un entero.

Substituyendo la Ecuación (25) en la Ecuación (20) y reordenando términos, se puede obtener el momento crítico, usando el menor valor de k_2 l:

$$M_{cr} = \frac{\pi\sqrt{EI_z \cdot C}}{l}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{C_w}{C}} \tag{26}$$

4. PANDEO DE PLACAS

El ejemplo más simple de este fenómeno es el de una placa rectangular con sus cuatro lados simplemente soportados (impidiendo el desplazamiento fuera del plano, pero libre para rotar) y cargada a compresión, tal como se muestra en la Figura 3. Al igual que en barras a compresión, la placa permanece plana hasta el momento en el que se alcanza su valor crítico, momento en el que pandea con deformaciones laterales.

La ecuación diferencial para el pandeo de placas, establecida por Bryan en 1891, en el caso mostrado en la Figura 3, es:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (27)$$

donde D es la rigidez a flexión de la placa:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)} \qquad (28)$$

La solución general de esta ecuación es:

$$w = A \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b} \qquad (29)$$

que satisface las condiciones de contorno:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \qquad (30a)$$

y

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = a \qquad (30b)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \qquad (31a)$$

y

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \qquad (31b)$$

Substituyendo la Ecuación (29) en la Ecuación (27), se tiene:

$$N = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \qquad (32)$$

donde m y n son el número semiondas en las direcciones x e y respectivamente.

El menor valor de N, o lo que es igual la carga crítica N_{cr}, se obtendrá igualando n a 1. Esto quiere decir que la placa pandea de tal forma que puede haber varias semiondas en la dirección de compresión, pero sólo una en la dirección perpendicular. La expresión de la carga crítica es:

$$N_{cr} = k\frac{\pi^2 D}{b^2} \qquad (33)$$

con:

$$k = \left(\frac{bm}{a} + \frac{a}{bm}\right) \qquad (34)$$

Si la placa pandea con una sola semionda, entonces m = 1 y k toma su mínimo valor (igual a 4), cuando a = b, o sea en una placa cuadrada.

Paralelamente, si la placa pandea con dos semiondas, entonces m = 2 y k alcanza su mínimo (también 4), cuando a = 2b.

Tomando consecutivamente los valores m = 3, 4,..., se obtienen la serie de curvas incluidas en la Figura 9. Es interesante observar como, para los valores $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$,... del cociente a/b, se produce la coincidencia de dos modos de pandeo.

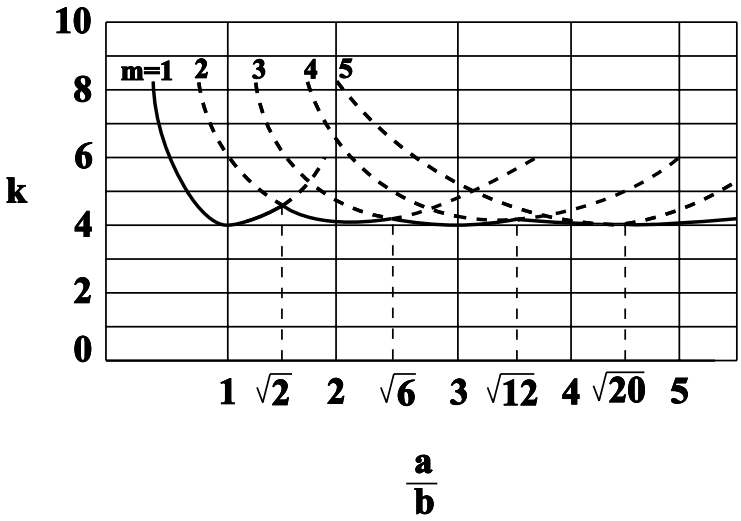


Figura 9 Relación entre k y el cociente a/b de una placa

5. RESUMEN FINAL

1. Para elementos comprimidos, como barras, vigas, placas y láminas, la carga crítica es el límite superior para la carga última de un elemento real (imperfecto).

2. La carga crítica está asociada con la condición de equilibrio neutro de un elemento.

3. Para los casos más simples, las cargas críticas pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill, 2nd edition, New York, 1961.

2. Allen, H.G. and Bulson, P.S., “Background to Buckling”, McGraw-Hill, London, 1980.

3. Shanley, F.R., “Strength of Materials”, McGraw-Hill, New York, 1957.

4. Murray, N.W., “Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures”, Clarendon Press, Oxford, 1984.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA
Problema Resuelto 8.2: Métodos de Energía

CONTENIDO

Problema Resuelto 8.2: Cálculo de la tensión crítica de una chapa rectangular bajo compresión utilizando el método de Rayleigh-Ritz.

Utilizando el método de Rayleigh-Ritz, determinar la tensión crítica de una chapa rectangular alargada (a » b) libremente apoyada sometida a la compresión linealmente variable que se muestra en la figura 1.

E - Módulo de elasticidad

v - Coeficiente de Poisson

t - Espesor de la chapa

Asumir que la flecha de la chapa pandeada se obtiene mediante:

$$w(x,y) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \cdot \sum_{n=1}^{p} q_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}$$

y considerar los casos p = 1,2

Comparar los resultados obtenidos con el resultado exacto

$$\sigma_{cr} = 7,81\frac{\pi^2 E}{12(1-v^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

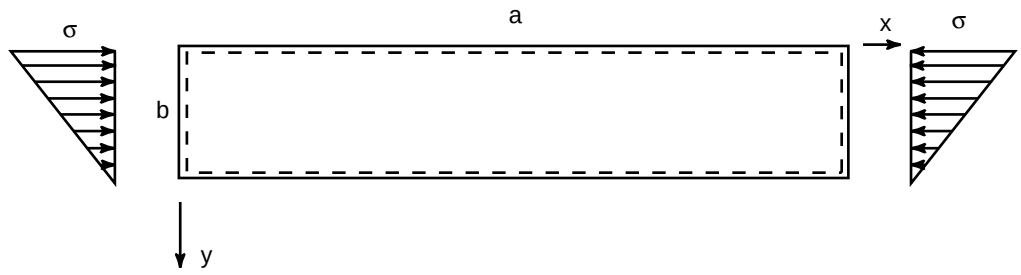


Figura 1 Chapa rectangular alargada sometida a tensión de compresión linealmente variable

SOLUCIÓN

La modificación de la energía potencial de la chapa se obtiene mediante:

$$\delta^2 V = \delta^2 U + \delta^2 \Omega$$

donde

$$\delta^2 U = \frac{D}{2}\int_0^b\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2v\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-v)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

donde $\frac{Et^3}{12(1-v^2)}$, es la energía de deformación correspondiente a la deformación debida al pandeo y

$$\delta^2 \Omega = -\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial^2}\right)^2 + 2N_{xy}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial_y}\right] dx\,dy$$

es la modificación del potencial de las cargas aplicadas N_x, N_y (resultantes de las tensiones normales) y de las tensiones tangenciales N_{xy} (resultantes de las tensiones tangenciales).

Teniendo en cuenta que, en este caso:

$$N_y = N_{xy} = 0 \qquad N_x = -\sigma t\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

y que

$$w(x,y) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left(q_1 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} + q_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\left(q_1 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} + q_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left(q_1 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} + q_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left(q_1 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} + 4q_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{m\pi^2}{a\,b}\cos\frac{m\pi x}{a}\left(q_1 \cos\frac{\pi y}{b} + 2q_2 \cos\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}\cos^2\frac{m\pi x}{a}\left(q_1^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b} + q_2^2 \operatorname{sen}^2\frac{2\pi y}{b} + 2\,q_1\,q_2 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 = \frac{m^4\pi^4}{a^4}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{a}\left(q_1^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b} + q_2^2 \operatorname{sen}^2\frac{2\pi y}{b} + 2\,q_1\,q_2 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{b^4}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{a}\left(q_1^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b} + 16\,q_2^2 \operatorname{sen}^2\frac{2\pi y}{b} + 8\,q_1\,q_2 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{m^2\pi^4}{a^2\,b^2}\cos^2\frac{m\pi x}{a}\left(q_1^2 \cos^2\frac{\pi y}{b} + 4\,q_2^2 \cos^2\frac{2\pi y}{b} + 4\,q_1\,q_2 \cos\frac{\pi y}{b}\cos\frac{2\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{m^2\pi^4}{a^2\,b^2}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{a}\left(q_1^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b} + 4\,q_2^2 \operatorname{sen}^2\frac{2\pi y}{b} + 5\,q_1\,q_2 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\right)$$

haciendo

$$x = a\,\zeta \quad y = b\,\eta \quad \phi = \frac{a}{b}$$

y haciendo uso del hecho de que

$$\int_0^1 \operatorname{sen} m\pi z \operatorname{sen} n\pi z\, dz =$$

$$= \int_0^1 \cos m\pi z \cos n\pi z\, dz = \begin{Bmatrix} 0 \text{ si } m \neq n \\ \frac{1}{2} \text{ si } m = n \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^1 z \operatorname{sen} m\pi z \operatorname{sen} n\pi z\, dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \text{ y } (m \pm n) \text{ es impar} \\ \frac{-4}{\pi^2} \frac{mn}{(m^2 - n^2)^2} & \text{si } m \neq n \text{ y } (m \pm n) \text{ es par} \end{cases}$$

se obtiene la siguiente expresión $\delta^2 V$:

$$\delta^2 V = \frac{D\pi^4}{8\phi a^2}\left[(m^2 + \phi^2)^2 q_1^2 + (m^2 + 4\phi^2)^2 q_2^2\right] -$$

$$- \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{16\phi}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{4\sigma t m^2}{9\phi} q_1 q_2$$

$p = 1 \qquad q_1 \neq 0 \qquad q_2 = 0$

(Método del coeficiente de Rayleigh)

$$\delta^2 V = \frac{D\pi^4}{8\phi a^2}(m^2 + \phi^2)^2 q_1^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{16\phi} q_1^2$$

$$\frac{d(\delta^2 V)}{d q_1} = \left[\frac{D\pi^4}{4\phi a^2}(m^2 + \phi^2)^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{8\phi}\right] q_1 = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 0 \quad \text{o} \quad \sigma \equiv \sigma_m = \frac{2D\pi^2}{t a^2}\frac{(m^2 + \phi^2)^2}{m^2}$$

$$\frac{d\sigma_m}{d m} \Rightarrow 0 \Rightarrow m = \phi \Rightarrow \sigma_{cr} \equiv (\sigma_{cr})_1 =$$

$$= \frac{8D\pi^2}{t}\frac{\phi^2}{a^2} = 8\frac{\pi^2 E}{12(1 - v^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

$$(\sigma_{cr})_1 = 8\frac{\pi^2 E}{12(1 - v^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

$p = 2 \qquad q_1 \neq 0 \qquad q_2 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial q_1} &= \left[\frac{D\pi^4}{4\phi a^2}(m^2 + \phi^2)^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{8\phi}\right] q_1 - \\ &- \frac{4\sigma t m^2}{9\phi} q_2 = 0 \\ \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial q_2} &= \frac{-4\sigma t m^2}{9\phi} q_1 + \\ &+ \left[\frac{D\pi^4}{4\phi a^2}(m^2 + 4\phi^2)^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{8\phi}\right] q_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = 0 \quad \text{o}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{D\pi^4}{4\phi a^2}(m^2 + \phi^2)^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{8\phi} & -\frac{4\sigma t m^2}{9\phi} \\ -\frac{4\sigma t m^2}{9\phi} & \frac{D\pi^4}{4\phi a^2}(m^2 + 4\phi^2)^2 - \frac{\sigma t m^2 \pi^2}{8\phi} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = 0 \quad \text{o} \quad \sigma \equiv \sigma_m =$$

$$= \frac{D\pi^4}{10,596\ t a^2}\ B \text{ (la raíz menor)}$$

$$B = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{\pi^2}{8}\left[(m^2+\phi^2)^2+(m^2+4\phi^2)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{\pi^4}{64}\left[(m^2+\phi^2)^2+(m^2+4\phi^2)^2\right]^2-5,298\ (m^2+\phi^2)^2\,(m^2+4\phi^2)^2}\right\}$$

$$\frac{dB}{dm}=0 \Rightarrow m \approx 1,017\phi \Rightarrow B_{min}=8,385\,\phi^2$$

$$\sigma_{cr} \equiv (\sigma_{cr})_2 = \frac{8,385\,\phi^2}{10,596}\frac{D\,\pi^4}{ta^2} =$$

$$= 7,8102\,\frac{\pi^2\,E}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

$$(\sigma_{cr})_2 = 7,8102\,\frac{\pi^2\,E}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Puesto que el método de Rayleigh-Ritz siempre proporciona límites superiores del valor exacto de la tensión crítica:

$$\sigma_{cr} \leq 7,8102\,\frac{\pi^2\,E}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Se observa que cuando se considera p = 1 se produce un error de aproximadamente el 2,5% y cuando se considera p = 2 se obtiene prácticamente el resultado exacto. Esto significa que no es necesario considerar más de dos grados en la deformación hipotética de la chapa pandeada.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.4: Métodos Generales para la Determinación de Cargas Críticas

OBJETIVO

Se explicarán los métodos energéticos para la determinación de cargas críticas para aquellos casos en los que no es posible una solución analítica de las ecuaciones diferenciales del equilibrio.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría de vigas

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

Lección 8.2: Criterios Generales para la Estabilidad Elástica

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

LECCIONES AFINES

Lección 8.5: Métodos Iterativos para resolver Problemas de Estabilidad

RESUMEN

Recurriendo a una serie de aproximaciones sobre la naturaleza de las deformaciones que tienen lugar en un sistema elástico durante el cambio de posición debido a un modo cualquiera de pandeo, el sistema elástico puede ser aproximado mediante un conjunto apropiado de parámetros. Dichos parámetros pueden ser ajustados de modo que se cumpla la condición de equilibrio neutro. Empleando este procedimiento se pueden derivar métodos aproximados, de gran utilidad para el ingeniero de diseño. En esta lección se presentan los más conocidos: coeficiente de Rayleigh, método de Rayleigh-Ritz y el de Galerkin. Igualmente se destacarán algunos métodos numéricos, como el de las diferencias finitas de Euler.

1. INTRODUCCIÓN

Las cargas críticas pueden ser determinadas por cualquiera de los siguientes métodos:

- resolviendo directamente las ecuaciones diferenciales de equilibrio, obteniéndose las cargas críticas exactas.

- usando métodos aproximados, que en su mayor parte, están basados en los métodos energéticos, y que aportan soluciones aproximadas de los problemas de pandeo.

La resolución de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que satisfagan las condiciones de contorno impuestas, presenta grandes dificultades, y tan sólo se consigue para problemas simples de pandeo en sistemas con pocos grados de libertad. Estos problemas básicos se presentaron, y resolvieron, de este modo, en la Lección 8.3. Sin embargo, en esta lección no se considerarán dichos métodos, concentrándose en los métodos energéticos alternativos. Debe recordarse que pueden usarse métodos iterativos muy potentes para la resolución de los problemas de estabilidad. Algunos de estos métodos serán presentados en la Lección 8.5.

Si se recurre a una serie de aproximaciones sobre la naturaleza de las deformaciones que tienen lugar en un sistema elástico durante el cambio de posición debido a un modo cualquiera de pandeo, el sistema elástico puede ser aproximado mediante un conjunto apropiado de parámetros. Dichos parámetros pueden ser ajustados de modo que se cumpla la condición de equilibrio neutro. Empleando este procedimiento se pueden derivar métodos aproximados, de gran utilidad para el ingeniero de diseño. En esta lección se presentan los más conocidos: coeficiente de Rayleigh, método de Rayleigh-Ritz y el de Galerkin. Igualmente se destacarán algunos métodos numéricos, como el de las diferencias finitas de Euler.

Si los parámetros recién mencionados son elegidos con cierto cuidado, y en número adecuado (en el caso de aproximación de un sistema continuo), los métodos aproximados pueden suministrar soluciones muy próximas a la solución exacta, aunque a mayor exactitud siempre se requiere un mayor esfuerzo de cálculo.

2. MÉTODOS ENERGÉTICOS GENERALES APLICABLES A SISTEMAS ELÁSTICOS

Los métodos energéticos generales para la solución de problemas de estabilidad elástica se basan en el principio de existencia de un mínimo relativo de la energía potencial en el equilibrio neutro (ver Lecciones 8.1 y 8.2).

Se ha establecido que: considerando el cambio ΔV, de la energía total V de un sistema, desde una posición inicial de equilibrio, hasta una posición cercana definida por un desplazamiento virtual infinitamente pequeño y cinemáticamente admisible, la condición de equilibrio neutro está gobernada por la variación segunda $\delta^2 V$ del incremento ΔV:

$$\delta^2 V = 0 = \text{mínimo} \qquad (1)$$

En general, cuando se consideran estructuras metálicas, la estabilidad de un sistema estructural bajo un conjunto de cargas externas se estudia considerando una deformación bajo pandeo, f, partiendo de una posición inicial, y haciendo cálculos de acuerdo a la Ecuación (1), ya sea para comprobar la estabilidad de la configuración inicial, o para determinar los valores de las cargas críticas. La deformación f se expresa como función de una o más variables independientes (generalmente coordenadas cartesianas); por ejemplo, f(x) como la deformación de una viga o f(x,y) como la deformación de una placa. El cambio en la deformación de un sistema en el equilibrio neutro - deformación en el pandeo o modo de pandeo - se denotará en adelante f(X), donde X es el sistema de coordenadas usado en cada caso (una, dos o tres dimensiones). La función f puede ser continua si el sistema es continuo, o puede ser definida a intervalos si el sistema es discreto.

Resolver la Ecuación (1) implica evaluar la función potencial $\delta^2 V$ con respecto a la función f, en el interior del dominio D de integración (longitud para una viga, área para una placa, por ejemplo). Generalmente, $\delta^2 V$ se compone de magnitudes cuadráticas y homogéneas con respecto a la deformación de pandeo f(X) y sus derivadas, y es una función lineal de las cargas externas aplicadas.

Al introducir un factor multiplicador, α, para todas las componentes de carga y definiendo una carga de referencia S_1 (correspondiente a $\alpha = 1$), las cargas, en cualquier instante de la historia proporcional de la carga serán:

$$S = \alpha S_1 \qquad (2)$$

Por lo que, generalmente, la función $\delta^2 V$ puede ser evaluada del siguiente modo:

$$\delta^2 V(f) = \int_D F(\alpha, X, f, f', f'')\, dD = 0 \qquad (3)$$

donde la función F incluye, además, características geométricas y del material en el dominio.

Resolviendo la Ecuación (3) con respecto a f se pueden determinar los valores de las cargas (a través del factor α) en el equilibrio neutro, o lo que es igual, las cargas críticas por encima de las cuales la configuración se vuelve inestable.

3. COEFICIENTE DE RAYLEIGH

El método de cálculo de las cargas críticas por el coeficiente de Rayleigh se deriva directamente de la Ecuación (1); la variación segunda $\delta^2 V$ de la energía potencial se puede expresar como sigue:

$$\delta^2 V(f) = \delta^2 U(f) + \delta^2 \Omega(f,S) \qquad (4)$$

donde: $\delta^2 U$ es la variación segunda de la energía de deformación (función cuadrática y homogénea de f); representa la energía de deformación derivada del modo de pandeo;

$\delta^2 \Omega$ es la variación segunda de la energía potencial de las cargas externas S (función lineal de S y cuadrática y homogénea en f). Representa el trabajo de las cargas externas, cambiado de signo, para el modo de pandeo.

En el equilibrio neutro, α (ver Ecuación (2)) toma el valor α_{cr} que es el valor crítico de coeficiente de las cargas para el que se produce la inestabilidad. Las Ecuaciones (1), (2) y (4) llevan a:

$$\delta^2 V(f) = \delta^2 U(f) + \alpha_{cr} \cdot \delta^2 \Omega(f,S_1) = 0 = \text{mínimo} \qquad (5)$$

Si la deformación de pandeo f se conoce, el valor del coeficiente multiplicador puede obtenerse de la Ecuación (4); que lleva a:

$$\alpha_{cr} = -\frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \qquad (6)$$

Considerando una aproximación f_1 de f (f_1 diferente de f), siendo α_{cr} conocido, se tiene, por la condición de mínimo que:

$$\delta^2 V(f_1) = \delta^2 U(f_1) + \alpha_{cr} \cdot \delta^2 \Omega(f_1,S_1) > 0 \qquad (7)$$

Las Ecuaciones (5) y (7) dan:

$$\alpha_{cr} = -\frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} < -\frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \qquad (8)$$

para todo $f_1 \neq f$

que es

$$\alpha_{cr} < \min\left[\frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)}\right] \qquad (9)$$

para todo $f_1 \neq f$

Esta expresión define el Principio de Rayleigh que establece que el valor crítico del coeficiente de carga α_{cr}, calculado usando la Ecuación (6) para cualquier desplazamiento cinemáticamente admisible, diferente de la verdadera deformación de pandeo, dará un valor α_{cr} mayor que el valor exacto.

Admitiendo que $f_1 = f + \varepsilon f_2$, donde f_2 es cualquier desplazamiento cinemáticamente admisible y siendo ε una constante, tenemos:

$$\alpha_{cr1} = -\frac{\delta^2 U(f + \varepsilon f_2)}{\delta^2 \Omega(f + \varepsilon f_2, S_1)} = \\ = -\frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} + 0(\varepsilon^2) = \alpha_{cr} + 0(\varepsilon^2) \qquad (10)$$

donde $0(\varepsilon^2)$ es un cero de ε^2. Esto implica que un error de primer orden en la elección de f implica un error de segundo orden en el valor de α_{cr}. Si se realizan los cálculos, usando la Ecuación (6) con una buena aproximación de la función f, suficiente para cumplir las condiciones de apoyo, se puede obtener un valor próximo de α_{cr}, con un error por exceso.

4. EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

El método de Rayleigh-Ritz supone que la solución exacta f(X) del problema variacional presentado en la Ecuación (3) puede aproximarse por una combinación lineal de "funciones coordenadas", $\phi_1(X)$, $\phi_2(X)$, ... $\phi_n(X)$, convenientemente escogidas:

$$f_n(X) = q_1\phi_1(X) + q_2\phi_2(X) + ... + q_n\,\phi_n(X) \quad (11)$$

donde cada una de las qi son constantes a determinar, y que se deben considerar como coordenadas generalizadas (o grados de libertad) del sistema.

Cuando se aproxima f(X) por la serie f_n (x), en la manera recién descrita, la función δ^2V, se convierte en una función cuadrática y homogénea de las q_i, pudiéndose escribir la Ecuación (3) como sigue:

$$\delta^2V = \{q\}^t\,[a]\,\{q\} = 0 \quad (12)$$

donde {q} es el vector de las q_i y [a] es una matriz cuyos coeficientes a_{ij} son:

$$a_{ij} = a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial_{qi}\partial_{qj}} \quad (13)$$

Los coeficientes a_{ij} son funciones del parámetro multiplicador de las cargas α y de las propiedades del sistema.

Despreciando la configuración trivial, {q} = 0, el equilibrio neutro exige que [a] sea una matriz singular, o lo que es lo mismo, que su determinante sea nulo. Esta condición suministra una ecuación, de grado n, para la determinación de α, cuyo menor valor positivo es el multiplicador de la carga crítica, α_{cr}.

Las funciones ϕ_i se eligen a priori, dependiendo del conocimiento y de las suposiciones que se hagan sobre la naturaleza de la deformación. No son incógnitas, y suponiendo que satisfagan las condiciones geométricas de contorno para cualquier valor de q_i, la elección de su forma es arbitraria. Sin embargo, conviene subrayar que la eficiencia del método depende de la elección inteligente de los ϕ y que es ventajoso que cumplan todas las condiciones de contorno. En la práctica, se suele contar con un conocimiento general de la solución verdadera f(X) por lo que la cuestión de usar formas "extrañas" no suele ocurrir. Si dicha elección es lo suficientemente buena se pueden obtener soluciones suficientemente aproximadas con pocas funciones. La eficacia del método de Rayleigh-Ritz puede ser mejorada considerablemente si, además de las condiciones de contorno obligatorias (o geométricas, relativas a los desplazamientos y rotaciones en los apoyos, como f y f´), se cumplen las condiciones de contorno naturales (o mecánicas, relativas a la curvatura, como f″).

Para tener una estimación de la exactitud de los resultados, se emplea un procedimiento más complejo que permite obtener una secuencia de sucesivas aproximaciones, pudiéndose tomar como primera de ellas la siguiente:

$$f_1(X) = q_1\phi_1(X) \quad (14)$$

y como segunda aproximación:

$$f_2(X) = q_1´\,\phi_1(X) + q_2´\,\phi_2(X) \quad (15)$$

siguiendo igual método en sucesivas etapas.

La comparación de las sucesivas soluciones indica el nivel de exactitud de la cada una de ellas. Es preciso resaltar que la solución $f_{i+1}(X)$ siempre es mejor, o al menos igual, que la precedente $f_i(X)$.

5. EL MÉTODO DE GALERKIN

Al contrario que el método de Rayleigh-Ritz que aporta una solución después de formular el problema variacional, el método de Galerkin permite obtener soluciones aproximadas directamente de las ecuaciones diferenciales, y por ello se puede aplicar sea o no posible la transformación en un problema variacional. Su ámbito de aplicación parece ser mayor y es más atractivo en la práctica, al no ser necesario el cálculo de la función potencial. Se puede demostrar, sin embargo, que ambos métodos están fuertemente relacionados.

Generalmente, la ecuación diferencial que gobierna el problema es de la forma:

$$L[f(X)] = 0 \qquad (16)$$

donde f(X) es la deformación por pandeo y L representa un operador diferencial lineal y homogéneo.

Supóngase que la solución exacta de f(X) de la Ecuación (16), se puede expresar como una serie completa de funciones:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \phi_j(X) \qquad (17)$$

cumpliendo todas las condiciones de contorno. La “exactitud“ de esta solución puede ser enunciada diciendo que la parte izquierda de la Ecuación (16) es ortogonal a cada uno de los términos de la serie de la Ecuación (17):

$$\int_D L[f(X)]\phi_j(X)dD = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots \quad (18)$$

Si la serie de la Ecuación (17) se truncase hasta un número finito de términos, n, entonces usando la anterior idea, se podrían imponer n condiciones de octogonalidad, como se muestra:

$$\int_D L\left[\sum_{j=i}^{n} q_j \phi_j(X)\right]\phi_i(X)dD = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad (19)$$

Que aprovechando la linealidad del operador L también se puede escribir como:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \int_D L[\phi_j(X)]\phi_i(X)\, dD = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad (19')$$

Esto suministra un método para evaluar las n incógnitas qi:

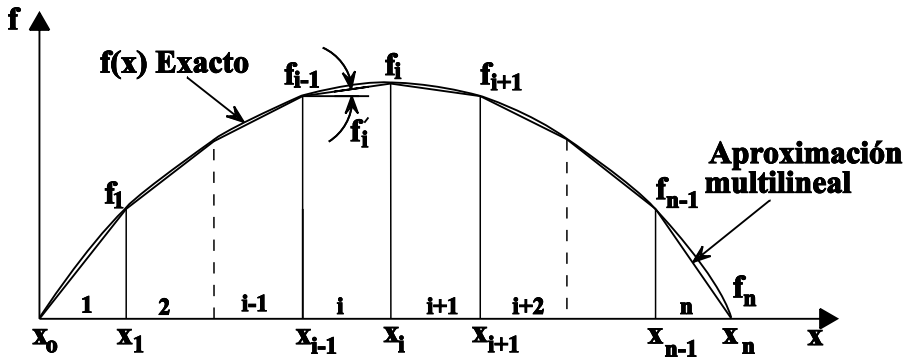
$$f_n(X) = \sum_{j=1}^{n} q_j \phi_j(X) \qquad (20)$$

lo que constituye una solución aproximada para las ecuaciones diferenciales.

La parte izquierda de la Ecuación (19), que incluye tanto propiedades del sistema como las cargas externas, a través del multiplicador α, es cuadrática y homogénea en q_i. Esta ecuación puede ser escrita en la forma de la Ecuación (11) y tratarse similarmente a como se hizo en el método de Rayleigh-Ritz para encontrar las cargas críticas.

6. MÉTODOS NUMÉRICOS

Para la determinación de las cargas críticas pueden usarse métodos numéricos que necesitan el empleo de ordenadores. Se subrayarán el método de las diferencias finitas de Euler y el método de los Elementos Finitos.



a) Ilustración del método de Euler de diferencias finitas

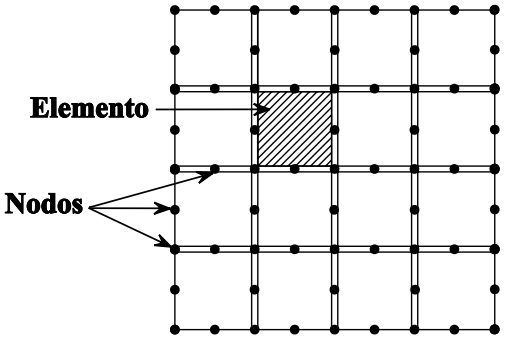
Figura 1a

Método de las diferencias finitas de Euler

En el método de Rayleigh-Ritz, se exige que las funciones deben tener derivada continua en el dominio de integración. El rango de funciones admisibles puede extenderse a aquéllas que tengan derivadas continuas a intervalos. La base del método de las diferencias finitas de Euler es dividir el dominio de integración en un cierto número de subregiones o intervalos, usando funciones lineales en cada uno de ellos. Si f_i denota el valor de la función f en la frontera entre los intervalos i e i+1, las derivadas de f pueden ponerse en función de las f, y la suma de la variación segunda de la energía sobre los intervalos será función también de las f. Aquí las f deben considerarse como las q en el método de Rayleigh-Ritz. La figura 1a ilustra la aproximación.

Método de los Elementos Finitos

Este método se usa especialmente para resolver problemas de estabilidad en láminas y placas. La solución del pandeo de placas usando la teoría de Elementos Finitos ha incrementado su popularidad gracias a que emplea una formulación matricial, susceptible de usarse en un programa de ordenador. El método de los Elementos Finitos tiene el mismo carácter "divisor" que el método de Rayleigh-Ritz. La placa se corta en un número de elementos unidos únicamente a través de unos determinados nudos, estableciéndose la continuidad y el equilibrio en dichos nudos. Un gran número de elementos pequeños se asemeja a una estructura cuasi continua, siendo su comportamiento muy similar al de la placa completa. Condiciones de contorno mixtas y variaciones en la rigidez a flexión pueden ser analizadas sin dificultad. Tanto estructuras completas como el comportamiento post-crítico pueden estudiarse también. En la figura 1b se muestra el mallado de una placa.



Malla en una placa

b) Ejemplo de mallado en una placa con elementos finitos

Figura 1b

7. ALGUNAS EXPRESIONES TÍPICAS DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Para poder desarrollar cálculos según alguno de los métodos energéticos, son necesarias diferentes expresiones de la energía de deformación. A continuación se presentan las expresiones de la energía de deformación para algunos elementos estructurales, como vigas y placas. Estas expresiones cuantifican el cambio en dicha energía debida al cambio de posición por la aparición del pandeo.

Vigas

Notación

L longitud del elemento
E módulo de Young
G módulo de elasticidad transversal
A área de la sección transversal
Av área cortante de la sección
I momento de inercia de la sección
Iw inercia de alabeo
I_t inercia a torsión
x abscisa longitudinal en el elemento (con origen en el principio del miembro)
u(x) desplazamiento longitudinal del elemento en x
w(x) desplazamiento lateral en x
θ(x) pendiente debido a la curvatura en el punto x
Ψ(x) ángulo a cortante (dw/dx - θ(x)) en x
ϕ(x) ángulo de torsión del elemento en x

(componentes de la deformación de pandeo)

Energía de deformación

- Elongación..... $\delta^2U = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$ (21)
- Flexión..... $\delta^2U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$ (22)
- Torsión..... $\delta^2U = \frac{1}{2}\int_0^L GI_t\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx$ (23)
- Cortante..... $\delta^2U = \frac{1}{2}\int_0^L GA_v\psi^2 dx$ (24)
- Alabeo..... $\delta^2U = \frac{1}{2}\int_0^L EI_w\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2 dx$ (25)

Placas delgadas

Notación

a longitud de la placa a lo largo del eje x
b longitud de la placa a lo largo del eje y
t espesor de la placa
x,y coordenadas cartesianas en cualquier punto (con origen en una esquina de la placa)
w(x,y) desplazamiento
D rigidez de la placa = $Et^3/(12(1-\upsilon^2))$
υ coeficiente de Poissón

Energía de deformación

Pandeo:

$$\delta^2U = \frac{1}{2}D\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\upsilon)\left[\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy \quad (26)$$

8. EJEMPLO USANDO LOS DIFERENTES MÉTODOS

El ejemplo consistirá en el estudio de un problema de pandeo a flexión en un elemento sometido a compresión. Se emplearán los métodos de coeficiente de Rayleigh, Rayleigh-Ritz y Galerkin.

El elemento sometido a compresión se muestra en la Figura 2: los extremos se encuentran articulados y los desplazamientos laterales impedidos, L, I y E denotan la longitud del miembro, el momento de inercia de la sección y el módulo de Young respectivamente. La carga P actúa verticalmente hacia abajo. La deformación del elemento se muestra en la Figura 3. Se persigue determinar el valor crítico P_{cr} de P.

Método del coeficiente de Rayleigh

Se ha escogido como aproximación a la deformación w(x) durante el pandeo, la siguiente:

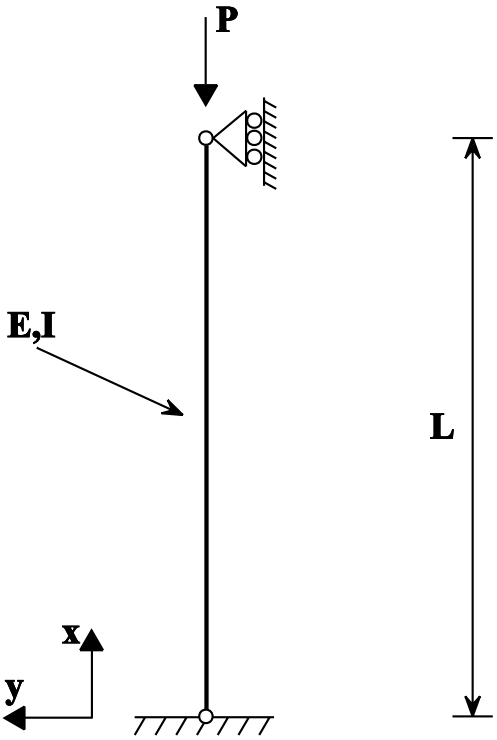


Figura 2

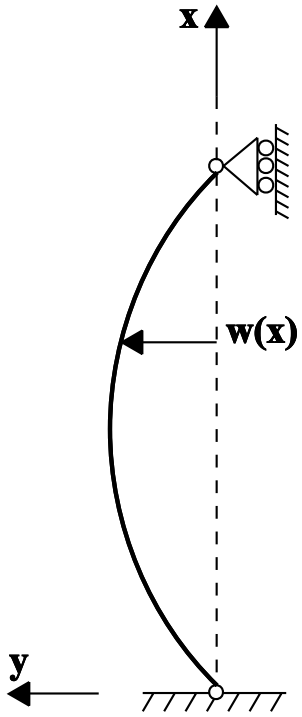


Figura 3

$$w(x) = a\,(x^2 - xL)$$

donde a = cualquier constante no nula (27)

cumpliéndose las condiciones de contorno w = 0 en x = 0 y x = L. Las derivadas son:

$$dw/dx = 2ax \qquad d^2w/dx^2 = 2a \qquad (28)$$

Si se realiza la integración de acuerdo a la Ecuación (22), el cambio en la energía de deformación debida al pandeo es:

$$\delta^2 U = 2a^2 EIL \qquad (29)$$

La variación de la energía potencial de P es contraria al trabajo realizado por P durante la deformación. El desplazamiento vertical del punto de aplicación de P, debido a la flexión se puede expresar como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \qquad (30)$$

y el cambio en la energía potencial de la carga externa, después de integrar la Ecuación (30), es:

$$\delta^2\Omega = - P\,\varepsilon = - P\,a^2L^3/6 \qquad (31)$$

El coeficiente de la carga crítica se calcula con la Ecuación (6), o sea:

$$\alpha_{cr} = \frac{2a^2EIL}{Pa^2L^3/6} = \frac{12\,EI}{PL^2} \qquad (32)$$

y, según la Ecuación (2), el valor crítico Pcr es:

$$P_{cr} = 12\frac{EI}{L^2} \qquad (33)$$

Este resultado debe compararse con la solución calculada con la deformación exacta de pandeo:

$$w(x) = a\ \text{sen}\ \pi x/L$$

que es:

$$P_{cr} = \pi^2\frac{EI}{L^2} = 9,8696\frac{EI}{L^2} \qquad (34)$$

Esto demuestra que una deformación de tipo parabólico no es una buena aproximación al modo real de pandeo. Si se toma la deflexión de una viga simplemente apoyada, bajo la acción de una carga uniformemente repartida:

$$w(a) = a\,(x^4 - 2x^3L + xL^3) \qquad (35)$$

el cálculo anterior resulta ser:

$$P_{cr} = 9,88\frac{EI}{L^2} \qquad (36)$$

que está mucho más cerca de la solución exacta dada por la Ecuación (34).

Método de Rayleigh-Ritz

Para simplificar las operaciones, se tomará el origen de abscisas en el punto medio del elemento (ver Figura 4). Se elige una deformación, que será combinación lineal de las siguientes funciones coordenadas:

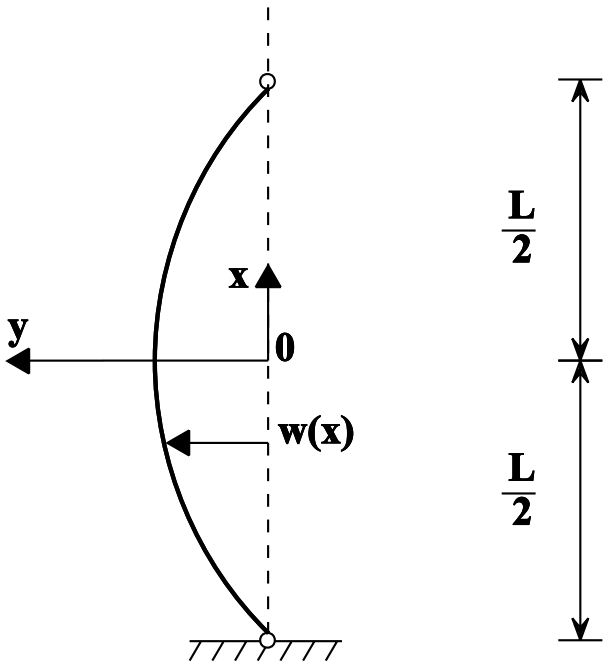


Figura 4

$$\phi_1(x) = x^2 - L^2/4 \qquad (37)$$

$$\phi_2(x) = x^4 - L^4/16 \qquad (38)$$

cumpliendo ambas las condiciones de contorno w = 0 en x = -L/2 y x = L/2.

Por lo tanto, la expresión de la deformación será:

$$w(x) = a\phi_1(x) + b\phi_2(x) = \\ = a(x^2 - L^2/4) + b(x^4 - L^4/16) \qquad (39)$$

Derivando:

$$dw/dx = 2ax + 4bx^3 \\ d^2w/dx^2 = 2a + 12bx^2 \qquad (40)$$

La variación de la energía de deformación se expresará como:

$$\delta^2U = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{L/2} EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \\ = EI\,(2\,a^2L + \frac{9}{10}b^2L^5 + 2\,abL^3) \qquad (41)$$

El cambio en la energía potencial de la carga de compresión es:

$$\delta^2\Omega = -2 \cdot \frac{1}{2} P \int_0^{L/2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \\ = -P\left(\frac{1}{6} a^2 L^3 + \frac{1}{56} b^2 L^7 + \frac{1}{10} abL^5\right) \quad (42)$$

y las Ecuaciones (4), (41) y (42) llevan a:

$$\delta^2 V = a^2(2EIL - PL^3/6) + b^2(9EIL^5/10 - \\ - PL^7/56) + ab(2EIL^3 - PL^5/10) \quad (43)$$

Las derivadas solicitadas son:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial^2 V/\partial a^2 = 4EIL - PL^3/3 \\ \partial^2 V/\partial b^2 = 9EIL^5/5 - PL^7/28 \\ \partial^2 V/\partial a\partial b = 2EIL^3 - PL^5/10 = \partial^2 V/\partial b\partial a \end{array}\right\} \quad (44)$$

y la matriz [a] de la Ecuación (22) es:

$$[a] = \begin{bmatrix} 4EIL - PL^3/3 & 2EIL^3 - PL^5/10 \\ 2EIL^3 - PL^5/10 & 9EIL^3/5 - PL^7/28 \end{bmatrix} \quad (45)$$

su determinante viene dado por:

$$\text{Det}\,[a] = (4EIL - PL^3/3)(9EIL^5/5 - \\ - PL^7/28) - (2EIL^3 - PL^5/10)^2 \quad (46)$$

La solución más pequeña del problema Det [a] = 0 es:

$$P_{cr} = 9,875\frac{EI}{L^2} \quad (47)$$

que se ha de comparar con la solución exacta de la Ecuación (34). Aunque las funciones coordenadas (37) y (38) individualmente no son buenas aproximaciones al modo exacto, su combinación (2 grados de libertad) proporciona resultados satisfactorios.

Método de Galerkin

Se ha elegido el mismo sistema de coordenadas y la misma deformada que se empleó en el método de Rayleigh-Ritz:

$$w(x) = a\phi_1(x) + b\phi_2(x) \quad (39)$$

con

$$\phi_1(x) = x^2 - L^2/4 \quad (37)$$

$$\phi_2(x) = x^4 - L^4/16 \quad (38)$$

donde ambas funciones satisfacen las condiciones en el contorno w = 0 en x = -L/2 y x = L/2 (libertad de giro en los extremos).

Se vio en la Lección 8.3 que la ecuación diferencial que gobierna el pandeo a flexión de un miembro comprimido era:

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} + Pw = 0 \quad (48)$$

El conjunto de ecuaciones que se deducen de la Ecuación (19´) es:

$$2a\int_0^{L/2}\left(EI\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + P\phi_1\right)\cdot\phi_1\cdot dx + \\ +2b\int_0^{L/2}\left(EI\frac{d^2\phi_2}{dx^2} + P\phi_2\right)\cdot\phi_1\cdot dx = 0$$

$$2a\int_0^{L/2}\left(EI\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + P\phi_1\right)\cdot\phi_2\cdot dx + \\ +2b\int_0^{L/2}\left(EI\frac{d^2\phi_2}{dx^2} + P\phi_2\right)\cdot\phi_2\cdot dx = 0 \quad (49)$$

derivando:

$$d^2\phi_1/dx^2 = 2 \qquad d^2\phi_2/dx^2 = 12x^2$$

Las siguientes ecuaciones se obtienen al integrar:

$$a.[PL^5/30 - EIL^3/3] + b.[PL^7/105 - EIL^5/10] = 0$$

$$a \cdot [PL^7 / 105 - EIL^5 / 10] + \quad (50)$$

$$+b \cdot [PL^9 / 360 - EIL^7 / 28] = 0$$

Para que exista solución no trivial el determinante de la Ecuación (50) debe ser cero:

$$(PL^5 / 30 - EIL^3 / 3)(PL^9 / 360 - \quad (51)$$

$$-EIL^7 / 28)(PL^7 / 105 - EIL^5 / 10)^2 = 0$$

y su solución más pequeña toma la forma:

$$P_{cr} = 9,8697 \frac{EI}{L^2} \quad (52)$$

que es casi igual a la solución exacta (Ecuación (34)).

9. RESUMEN FINAL

1. Los métodos energéticos ponen a disposición del ingeniero una herramienta práctica para obtener soluciones aproximadas a la mayoría de los problemas de estabilidad. Para ello se deben realizar una serie de suposiciones sobre la deformación de pandeo del sistema elástico, y se emplean parámetros ajustables que se determinan imponiendo el cumplimiento de las condiciones de equilibrio neutro.
2. Los métodos de coeficiente de Rayleigh, Rayleigh-Ritz y Galerkin que se han presentado aquí son métodos bien conocidos, que generalmente pueden ser utilizados manualmente para la resolución de problemas simples de pandeo sobre estructuras aisladas sometidas a cargas no complejas.
3. Al incrementarse el número de grados de libertad del sistema estos métodos requieren el uso de ordenadores, como lo necesitan también los métodos de diferencias finitas de Euler y de Elementos Finitos.
4. Algunos otros procedimientos de análisis se incluyen en la bibliografía, y varios de ellos, que involucran procesos iterativos se describirán en la Lección 8.5.

10. BIBLIOGRAFÍA

1. Richards T.H., “Energy Methods in Stress Analysis”, Rainbow Bridge Book Company, 1977.

2. Mason J., “Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory”, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1980.

3. Langhaar H.L., “Energy Methods in Applied Mechanics”, John Wiley & Sons, New York, London, 1962.

4. Timoshenko S., “Theory of Elastic Stability”, McGraw Hill Book Company, New York, 1960.

5. Massonnet C., “Résistance des Matériaux” - Volume 2, Dunod, Paris, 1963.

6. Bleich, F., “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw Hill Book Company, New York, 1952.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.5: Métodos iterativos para resolver problemas de estabilidad

OBJETIVOS

Se presentarán e ilustrarán los métodos que pueden ser usados para resolver problemas iterativamente.

PREREQUISITOS

- Teoría de vigas

LECCIONES AFINES

Lección 8.1: Definición de equilibrio elástico estable e inestable

Lección 8.2: Criterios generales sobre la estabilidad elástica

Lección 8.3: Modelos de inestabilidad elástica

Lección 8.4: Métodos generales para la determinación de cargas críticas

EJEMPLOS RELACIONADOS

Ejemplo 8.3: Aplicación de los métodos de Vianello, Newmark y Vianello-Newmark

RESUMEN

Esta lección comienza con una introducción que explica las razones que justifican el empleo de métodos interactivos para la resolución de problemas de estabilidad. A continuación se presenta el método de Vianello. Seguidamente se revisa el método de Newmark para el cálculo de fuerzas internas como paso previo para la presentación del método de Vianello-Newmark. Este método es una combinación del método de Vianello con el procedimiento de integración de Newmark.

1. INTRODUCCIÓN

Incluso cuando se supone que las deformaciones son pequeñas, los problemas de estabilidad son siempre no lineales, puesto que las condiciones de contorno y las ecuaciones de equilibrio han de establecerse para la posición deformada. Como consecuencia, sólo para casos muy simples, es posible obtener soluciones analíticas para el problema de autovalores, que permite la determinación de las cargas de pandeo críticas y el modo inestable asociado (ver Lección 8.3). En general es necesario recurrir a métodos aproximados. Un importante grupo de dichos métodos –métodos energéticos– se presentó en la Lección 8.4. En esencia estos métodos consisten en reemplazar la estructura continua de partida por una estructura discreta más simple. Ello se consigue imponiendo que la deformación de la estructura real sea combinación de unas funciones de forma con amplitudes a determinar. La solución exacta de la carga crítica y del modo de pandeo para esta estructura más simple, que es la solución de un problema de autovalores similar al presentado en la Lección 8.2, es una solución aproximada para la estructura original. Aunque la exactitud (y el esfuerzo necesario) aumentan con el número de grados de libertad considerados, se pueden conseguir aproximaciones muy satisfactorias usando solamente un número pequeño. Un inconveniente de los métodos de energía es que siempre suministran límites superiores para el valor de las cargas críticas, lo que no es conveniente en el diseño.

La discretización de una estructura continua puede realizarse igualmente dividiéndola en una serie de elementos rígidos conectados por muelles que determinan su rigidez. La deformación de la estructura es una función continua a trozos que queda determinada completamente si se conocen los desplazamientos de los nudos que conectan los elementos. La solución de esta estructura discreta se presentó en la Lección 8.2 y es una solución aproximada del problema original. Sin embargo en este caso no se puede asegurar nada acerca del signo y magnitud del error cometido. Como en casos precedentes, aquí la exactitud aumenta con el número de elementos considerados.

Por lo tanto la determinación de la carga crítica implica la solución de un problema no lineal que puede ser, o bien un problema lineal de autovalores-autovectores (sistemas discretos o discretizados), o bien un problema de autovalores-autofunciones (sistemas continuos). En el primer caso la solución analítica es siempre posible, pero requiere la determinación la raíz más pequeña de la ecuación característica, que normalmente es de muy alto grado. En el segundo caso la solución analítica sólo es posible para problemas simples. Una alternativa para ambos problemas es el uso del método interactivo introducido por Vianello, y llamado después método de Vianello. La idea básica consiste en reemplazar la solución del problema no lineal por un conjunto de soluciones de problemas lineales que pueden converger hacia el modo de pandeo y permiten el cálculo de la carga crítica. Una ventaja del método de Vianello, de gran interés en el diseño y comprobación de las estructuras, es que se pueden obtener límites superiores e inferiores de las cargas críticas, o lo que es igual una estimación del error cometido.

Finalmente, el método de Vianello-Newmark combina la idea del método de Vianello con la técnica de integración numérica de Newmark. Es una alternativa muy eficaz para la determinación de las cargas críticas y los modos de pandeo de columnas solicitadas axialmente, particularmente si se presenta alguna particularidad en las cargas, la columna o las condiciones de contorno. Este método puede usarse para obtener la configuración de equilibrio de columnas sometidas a cargas axiales y con imperfecciones geométricas iniciales o cargas transversales, como pueden ser columnas unidas a vigas.

2. MÉTODO DE VIANELLO

El método de Vianello es un procedimiento interactivo que puede ser usado para determinar aproximadamente la carga crítica y el modo de pandeo de sistemas estructurales discretos o continuos sometidos a un conjunto de cargas que pueden definirse a través de un coeficiente de carga λ (carga proporcional). El método se basa directamente en las ecuaciones diferenciales (sistema de ecuaciones) de equilibrio del sistema, lo que quiere decir que no incorpora conceptos energéticos. Para aplicar el método se deben seguir las siguientes etapas:

(i) Obtener una estimación inicial de la configuración deformada asociada al modo de pandeo crítico de la estructura, que debe cumplir las condiciones de contorno cinemáticas. Esta estimación inicial será un vector (sistemas discretos) o una función (sistemas continuos).

(ii) Partiendo de esta configuración supuesta calcular las fuerzas internas en función de la incógnita λ, o coeficiente de pandeo. Estas fuerzas internas pueden ser tanto fuerzas y/o momentos concentrados (sistemas discretos) como momentos flectores (sistemas continuos).

(iii) Usando un análisis lineal estándar, calcular la posición deformada originada por las fuerzas internas calculada en (ii). Esta nueva deformada, que depende de λ, es una aproximación más cercana a la deformada de pandeo de la estructura. El análisis lineal incluye la resolución de un sistema de ecuaciones de equilibrio (sistemas discretos o discretizados) o de una ecuación diferencial (sistemas continuos).

(iv) Igualar las deformadas supuesta y calculada en (i) y (ii) para obtener límites superiores e inferiores y una estimación del valor crítico del coeficiente de cargas λcr. En los sistemas discretos el límite superior (o inferior) de λcr es el mayor (menor) valor de λ necesario para igualar una pareja de componentes no nulos de los vectores que definen las deformadas calculada y supuesta. Para poder igualar los valores de las funciones que definen las deformadas supuesta y calculada es necesario contar con una estimación de λ en un punto de valor no nulo. Estos límites son difíciles de calcular normalmente, y sólo se consigue una estimación de λ_{cr}, que es el valor de λ necesario para igualar las funciones en un determinado punto.

(v) Repetir el proceso usando como suposición inicial la forma de la deformada calculada en la iteración previa. Detenerse en el momento en el se alcance la exactitud deseada. A menudo, por razones numéricas, es conveniente normalizar la deflexión calculada antes de usarla como estimación inicial en la siguiente iteración. La exactitud de la solución se puede medir, bien mediante la diferencia entre los límites inferior y superior, bien por la proximidad de los valores sucesivos de λ_{cr}.

Se puede demostrar que el proceso es convergente hacia el modo crítico inestable, permitiendo el cálculo del coeficiente de carga crítica λ_{cr}.

3. REPASO DEL MÉTODO DE NEWMARK

Matemáticamente, la esencia del método de Newmark es una técnica que permite la integración numérica de ecuaciones diferenciales del tipo $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) = f(x)$. Como consecuencia, se pueden calcular, de una manera rápida y sistemática, los momentos flectores y los esfuerzos en vigas estáticamente determinadas sometidas a cargas transversales. Combinando el método de integración de Newmark con los métodos de la teoría de vigas, es posible calcular también las pendientes y las deformaciones debidas a la flexión. Vigas estáticamente indeterminadas pueden analizarse por el método de las fuerzas, suministrando el método de Newmark un camino directo para obtener la matriz de flexibilidad.

3.1 Convenio de signos

El convenio de signos se elige de tal manera que las cantidades puedan ser sumadas al ir de izquierda a derecha a lo largo de la viga, restandose en caso contrario. Por ello, el esfuerzo axial (N) es positivo si es una compresión, el esfuerzo cortante (V) es positivo si tiende a girar en el sentido de las agujas del reloj, el momento (M) y la curvatura (χ) serán positivos cuando las fibras superiores se encuentran comprimidas, la pendiente (θ) cuando crece hacia la derecha, la deformación lateral (y) y las fuerzas aplicadas (q, Q) lo son cuando actúan hacia arriba, y las cargas axiales (P, p) son positivas si actúan de derecha a izquierda.

3.2 Conceptos

Para aplicar el método de Newmark es necesario dividir la viga en un número determinado de segmentos iguales. Cada punto de división se denominará nudo. El número de nudos debe permitir la correcta descripción de la viga, las cargas y las condiciones de apoyo. Cuando la carga consiste en fuerzas concentradas actuando en los nudos, el método permite determinar los cortantes en los segmentos y los momentos en los nudos exactamente. Los cortantes se determinan sumando algebraicamente las cargas a lo largo de la viga y los momentos flectores añadiendo o deduciendo los productos de los sucesivos cortantes y las longitudes a las que actúan. Cuando el valor del cortante o el momento no se conocen en ningún punto a lo largo de la viga, el cálculo puede proseguir suponiendo unos valores arbitrarios (normalmente cero), con una corrección lineal o constante (constante) añadida después a los momentos cortantes resultantes (cortantes).

Si la viga actúa bajo cargas uniformemente distribuidas, se deben reemplazar por fuerzas concentradas equivalentes actuando en los nudos. Físicamente, estas fuerzas representan las reacciones de una serie de cables hipotéticos sin peso, que coinciden con los segmentos y que se interponen entre las cargas y la viga (ver Figura 1). Las reacciones del cable son equivalentes a las cargas distribuidas, en el sentido en

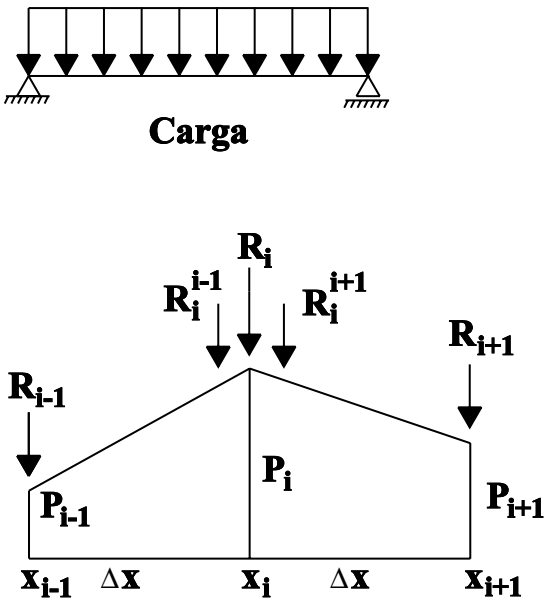


Figura 1a

que producen los mismos cortantes y momentos flectores en los nudos. La formulación para el cálculo de fuerzas concentradas equivalentes es exacta para distribuciones de carga lineales y parabólicas, y aproximada para distribuciones de mayor orden. La formulación para nudos finales debe emplearse siempre que haya un salto en la magnitud de la carga aplicada.

Para divisiones lineales (Figura 1), la formulación es:

Nudos finales:

$$R_{i\pm1} = \frac{\Delta x}{6}(2p_i + p_{i})$$

Nudos intermedios:

$$R_i^{i+1} = \frac{\Delta x}{6}(2p_i + p_{i\pm1}$$

$$R_i = R_i^{i+1} + R_i^{i-1} = \frac{\Delta x}{6}(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})$$

Para división parabólica (Figura 1), la formulación es:

$$R_{i\pm1} = \frac{\Delta x}{24}(7p_{i\pm1} + 6p_i - p_{i\pm1})$$

$$R^{i+1}_{i} = \frac{\Delta x}{24}(7p_{i\pm1} + 10p_i - p_{i\pm1})$$

$$R_i = R_i^{i+1} + R_i^{i-1} = \frac{\Delta x}{12}(p_{i-1} + 10p_i + p_{i+1})$$

Cuando la carga contiene cargas distribuidas el método permite determinar directamente los cortantes medios en los segmentos y los momentos flectores en los nudos. Una simple suma permite conocer los cortantes en los nudos. Todos estos valores son exactos siempre que no se cometan errores en la discretización de las cargas.

Una vez que se han determinado los momentos flectores es posible calcular la curvatura dividiendo por la rigidez de flexión EI. Puesto que la carga(p), cortante (V) y los flectores (M) se rigen por relaciones recíprocas a las de la curvatura $\left(\chi = \frac{M}{EI}\right)$, pendiente ($\theta$) y deformación, y se puede concluir que el mismo método que permite calcular flectores a partir de las cargas se puede aplicar a la determinación de deformaciones a partir de las curvaturas, teniendo en cuenta las condiciones de contorno. Para poder repetir el proceso mencionado el primer paso debe ser reemplazar las curvaturas (magnitudes distribuidas continuamente) por "curvaturas concentradas" equivalentes. Físicamente, estas cantidades representan los cambios bruscos en la pendiente que tienen lugar en los nudos de una viga hipotética formada por segmentos rígidos unidos por rótulas entre sí y con la rigidez a flexión suministrada únicamente por los muelles de rotación situados en las rótulas. Los cambios en la pendiente son equivalentes a la curvatura distribuida en el sentido que producen las mismas pendientes y deformaciones en los nudos. La formulación para calcular las curvaturas concentradas equivalentes es la empleada para las fuerzas y que se puede ver en la

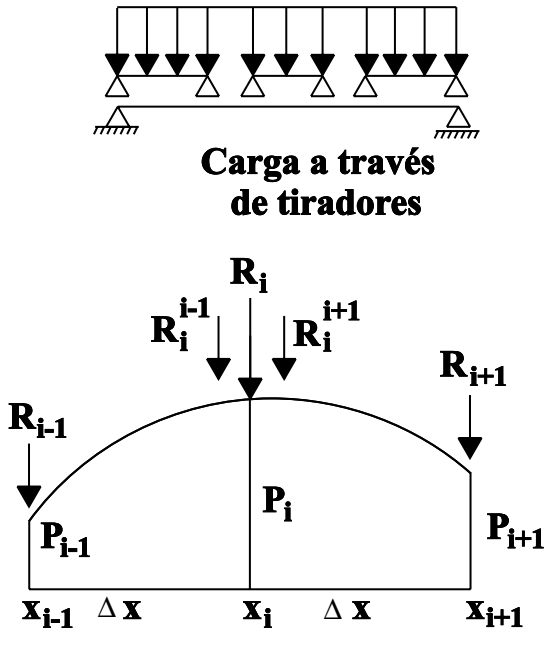


Figura 1b

Figura 1b. A continuación el método va suministrando pendientes medias en los segmentos y deformaciones en los nudos. Es importante resaltar que estas cantidades son precisamente las cargas concentradas equivalentes, cortantes medios y flectores de la “viga conjugada“ bajo la acción de cargas concentradas que coincide con el diagrama de curvatura de la viga original (el concepto de “curvatura concentrada” se sustituye por la definición de “viga conjugada”).

Finalmente, en el caso de vigas estáticamente indeterminadas, el método de Newmark se emplea junto al método de las fuerzas, pues es un método directo de obtener la matriz de flexibilidad y las deformaciones en el sistema básico.

4. MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK

Siempre que el método de Vianello se aplica a columnas cargadas axialmente y el paso (iii) se realiza mediante el método de Newmark, se está utilizando el método de Vianello-Newmark. En lo que se refiere a la etapa (ii), es decir, el cálculo de los valores de los flectores en los nudos como función del coeficiente de carga para una estimación inicial del modo de pandeo, se puede seguir el siguiente procedimiento, que es exacto si todas las fuerzas axiales se concentrarán en los nudos:

(i) Calcular los esfuerzos axiales (N) en los segmentos en función de las cargas axiales (P), que pueden expresarse usando únicamente el parámetro λ. Si la columna es estáticamente indeterminada en la dirección axial los valores de N se deberán determinar por un método apropiado (por ejemplo el método de las fuerzas).

(ii) Calcular los valores de la deflexión menos el incremento en la deflexión que tiene lugar en cada segmento, basados en la estimación inicial ($\Delta y_{ij} = y_i - y_j$). El criterio de signos seleccionado es tal que todas las cantidades pueden ser sumadas cuando se va de derecha a izquierda a lo largo de la viga y se restan en caso contrario.

(iii) Calcular el incremento en el flector debido a la fuerza axial actuante en cada segmento ($\Delta M_{ij} = N_{ij}\ \Delta y_{ij}$).

(iv) Calcular los momentos flectores, debido a las fuerzas axiales, en los nudos (M′) añadiendo o deduciendo los valores de ΔM. Estos momentos flectores no incluyen la influencia de las reacciones en los apoyos, y por ello, deben ser corregidos en los casos en que esta influencia aparezca.

(v) Realizar las correcciones adecuadas en los momentos flectores calculados en (iv). Estas correcciones son idénticas a las que se discutieron en el capítulo anterior y conducen a valores exactos en el caso de columnas estáticamente determinadas (en la dirección transversal). Si la columna es estáticamente indeterminada y se ha empleado el método de las fuerzas el procedimiento descrito arriba se desarrolla en el sistema básico. La compatibilidad es impuesta en el paso (iii) del método de Vianello, que usa la técnica de Newmark, y que permite la determinación de los momentos flectores y las deflexiones en los nudos de la columna original.

Si existen fuerzas axiales distribuidas, deben ser sustituidas por fuerzas axiales concentradas equivalentes (p_{disc}) usando las formulas de la Figura 1b. El procedimiento de calculo de los momentos flectores en los nudos recién mencionado se convierte en aproximado (el error se reduce si se incrementa el número de segmentos).

Debe tenerse en cuenta que, el cálculo de las curvaturas concentradas equivalentes es entonces aproximado. El método de Vianello-Newmark lleva a un valor de la carga crítica de pandeo ligeramente diferente del exacto. Este error también se puede reducir aumentando el número de segmentos).

5. CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO

Los métodos de Vianello y Vianello-Newmark puede usarse igualmente para determinar la posición de equilibrio de columnas con defectos geométricos o cargadas transversalmente bajo la acción de fuerzas axiales conocidas. Sólo se presentará el método de Vianello-Newmark. El método de Vianello puede ser aplicado sólo en casos muy simples.

El comportamiento de una viga-columna viene descrito por la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (N permanece constante):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = N\frac{d^2y}{dx^2} + q \qquad (5)$$

El método de Vianello-Newmark es un procedimiento interactivo que requiere una aproximación inicial de la forma deformada de la viga-columna. Converge hacia la forma exacta de la deformada y(x). Cada iteración implica la solución de las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y_I}{dx^2}\right) = q \qquad (6)$$

$$\frac{d^2y_{II}}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (7)$$

La Ecuación (6) se resuelve una sola vez utilizando métodos lineales normales, puesto que y_I (x) es igual en todas las iteraciones. La Ecuación (7) recuerda mucho al problema de autovalores-autofunciones presentado anteriormente, la diferencia reside en el hecho de que las fuerzas axiales se deben a las fuerzas aplicadas, que son conocidas. La amplitud de la deformada debe, por ello, controlarse mediante un factor Δ, a determinar al final de cada iteración por la imposición de

$$\Delta\sum_{i=1}^{n} y(x_i) = \Delta\sum_{i=1}^{n} y_{II}(x_i) + \sum_{i=1}^{n} y_I(x_i) \qquad (8)$$

donde n es el número de nudos. Esta condición impone una semejanza entre las deformadas iniciales y calculadas, en el sentido de que la suma en sus nudos debe ser la misma.

Si la imperfección inicial consiste en una excentricidad e_0 de todas las cargas aplicadas, entonces y_I (x) es la solución de (N permanece constante):

$$EI\frac{d^2y_I}{dx^2} = -Neo\,(x) + Ax + B$$

Finalmente, debe hacerse notar que el método diverge si el coeficiente de carga axial λ es mayor que el correspondiente valor crítico λ_{cr}.

6. RESUMEN FINAL

1. Esta lección ha tratado el uso de métodos interactivos para resolver problemas de estabilidad, sobre todo para la determinación de cargas críticas y posiciones de equilibrio.
2. La idea básica de estos métodos fue presentada por Vianello y consiste en reemplazar la solución de un problema no lineal por la solución de una serie convergente de problemas lineales.
3. El método de Vianello se emplea en el cálculo de cargas críticas de pandeo en sistemas continuos y discretos. Sin embargo, en el caso de un sistema continuo el método es sólo aplicable para problemas bastante sencillos.
4. Combinando el método de Vianello y la integración de Newmark, es posible establecer un procedimiento eficiente para calcular cargas críticas y posiciones de equilibrio de columnas cargadas axialmente.
5. El método de Vianello-Newmark es particularmente útil en casos donde existen características complejas: fuerzas axiales distribuidas, rigidez flexural variable, o condiciones de contorno complicadas.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Newmark, N.M. - “Numerical Procedures for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads”, Transactions ASCE, Vol. 108, 1943.

2. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. - “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill, New York, 1961.

3. Bleich, F. - “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw-Hill, 1952.

4. Allen, A.G. and Bulson, P.E. - “Background to Buckling”, McGraw-Hill (UK), 1980.

5. Lind. N.C. - “Numerical Analysis of Structural Elements”, Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, Canada, 1982.

6. Chen, W.F. and Lui, E.M. - “Structural Stability-Theory and Implementation”, Elsevier Science Publishing Co, New York, 1987.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Problema resuelto 8.3(i), (ii) y (iii): Aplicación de los métodos Vianello, Newmark y Vianello-Newmark

Lección relacionada:

Lección 8.5: Métodos Iterativos para resolver Problemas de Estabilidad

CONTENIDO

Problema resuelto 8.3(i) Aplicación del método de Vianello a:

(1) Sistema discontinuo: resorte y barra

(2) Sistema continuo: Barra comprimida con rótula en un extremo

Problema resuelto 8.3(ii) Aplicación del método de Newmark

Problema resuelto 8.3(iii) Aplicación del método de Vianello-Newmark

(1) Pilar libremente apoyado

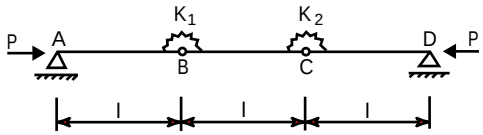
(2) Pilar escalonado

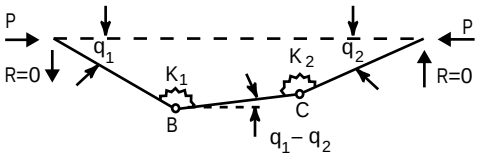
(3) Pilar con carga variable

(4) Viga-pilar

EJEMPLO 1: APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO

SISTEMA DISCONTINUO





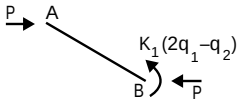
$\lambda \equiv P$

AB, BC y CD son barras rígidas conectadas mediante resortes rotacionales de rigidez K_1, K_2

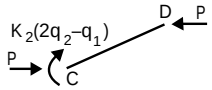
El sistema tiene dos grados de libertad: q_1, q_2

Asumiendo que q_1 y q_2 son pequeños (sen $q_1 \approx q_1$, sen $q_2 \approx q_2$, cos $q_1 \approx 1$, cos $q_2 \approx 1$) las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_B = 0 \qquad K_1(2q_1 - q_2) - Pl\,q_1 = 0$$



$$\sum M_C = 0 \qquad K_2(2q_2 - q_1) - Pl\,q_2 = 0$$



proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones, escritas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (2K_1 - Pl) & (-K_1) \\ (K_2) & (2K_2 - Pl) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El esquema de iteración correspondiente es:

$$K_2 \begin{bmatrix} (2K_1/K_2) & (-K_1/K_2) \\ (-1) & (2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{i+1} \\ q_2^{i+1} \end{Bmatrix} = Pl \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{i} \\ q_2^{i} \end{Bmatrix}$$

donde la parte de la derecha (DCHA) representa los esfuerzos (momentos flectores en B y C). Después de cada iteración, equiparando $\{q\}_{i+1}$ a $\{q\}_i$ es posible obtener un límite inferior, un límite superior y una estimación de P_{cr}.

El límite superior (inferior) de P_{cr} es el valor mayor (menor) de P que debe multiplicarse por un componente de q_{i+1} para ser igual al componente correspondiente de q_i, es decir, para hacer $q_{i+1} / q_i = 1$. La estimación de es la media de los valores de P necesarios para igualar cada uno de los pares de los componentes correspondientes de q_i y q_{i+1}.

(i) $K_1 = K_2 = K$

i	$\{q\}_i$	Esfuerzos (x Pl)	$\{q\}_{i+1}$ (x Pl/3K)	$\{q\}_{i+1}/\{q\}_i$ (x Pl/3K)	Límite inferior (x K/l)	Límite superior (x K/l)	Estimación (x K/l)
1	$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2\\\infty\end{Bmatrix}$	0	1,5	0,75
2	$\begin{Bmatrix}1\\0,5\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\0,5\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2,5\\2\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2,5\\4\end{Bmatrix}$	0,75	1,2	0,975
3	$\begin{Bmatrix}1\\0,8\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\0,8\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2,8\\2,6\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2,8\\3,25\end{Bmatrix}$	0,923	1,071	0,997

$$\therefore\ 0,923\frac{K}{l} \le P_{cr} \le 1,071\frac{K}{l} \qquad P_{cr}^{e} = 0,997\frac{k}{l} \qquad \{q\}_l \approx \begin{Bmatrix}1\\0,929\end{Bmatrix}$$

Resultados exactos: $P_{cr} = 1\frac{K}{l}$ $\qquad \{q\}_l \approx \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

(ii) $K_1 = 2K_2 = K$

i	$\{q\}_i$	Esfuerzos (x Pl)	$\{q\}_{i+1}$ (x Pl/3K)	$\{q\}_{i+1}/\{q\}_i$ (x Pl/3K)	Límite inferior (x K/l)	Límite superior (x K/l)	Estimación (x K/l)
1	$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2\\\infty\end{Bmatrix}$	0	1,5	–
2	$\begin{Bmatrix}1\\0,5\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\0,5\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}3\\3\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix}$	0,5	1	0,75
3	$\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}4\\5\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}4\\5\end{Bmatrix}$	0,6	0,75	0,675

$$\therefore\ 0,6\,\frac{K}{l} \le P_{cr} \le 0,75\,\frac{K}{l} \qquad P_{cr}^{e} = 0,675 \qquad \{q\}_l \approx \begin{Bmatrix}1\\1,25\end{Bmatrix}$$

Resultados exactos: $P_{cr} = 0,634\,\frac{K}{l}$ $\qquad \{q\}_l \approx \begin{Bmatrix}1\\1,366\end{Bmatrix}$

SISTEMA CONTINUO

La carga de pandeo crítica de un pilar cargado axialmente con condiciones de contorno arbitrarias es el valor propio menor de la siguiente relación entre valor propio-función propia:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{d}{dx}\left[N(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right] \qquad (1)$$

donde se asume que el esfuerzo axial N depende de un único parámetro de carga λ. En este documento tan sólo se consideran problemas en los que N se mantiene constante a lo largo de la pieza, lo que significa que la Ecuación (1) se convierte en:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -N(\lambda)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (2)$$

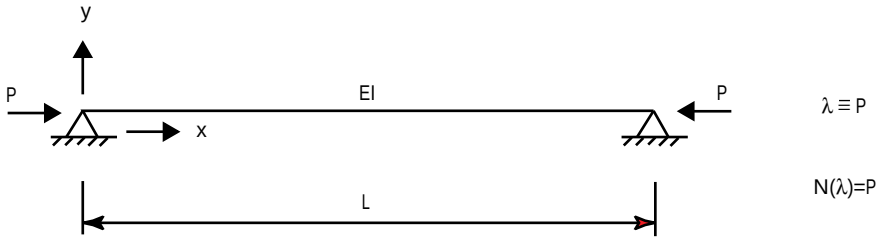
La ecuación 2 es equivalente a:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M(x,\lambda) \qquad (3)$$

donde el momento flector $M(x, \lambda)$ tiene la forma:

$$M(x, \lambda) = N(\lambda)\, y(x) + A(\lambda) \cdot x + B(\lambda) \qquad (4)$$

y los valores de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ pueden determinarse a partir de las condiciones de contorno. Debe tenerse en cuenta que la aplicación del método de Vianello exige el cálculo de $M(x, \lambda)$ en cada iteración (paso (ii)) lo cual, especialmente en el caso de pilares hiperestáticos, puede suponer un esfuerzo considerable. En este documento tan sólo se va a considerar el caso simple de un pilar libremente apoyado bajo compresión uniforme con el fin de ilustrar la aplicación del método a un sistema continuo.



Puesto que, en este caso, $A(\lambda) = B(\lambda) = 0$, $EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py$ proporciona la ecuación de equilibrio diferencial y se obtiene el esquema de iteración $EI\frac{d^2y_{i+1}}{dx^2} = -Py_i$

Para i = 1

Asumir que la estimación inicial del estado deformado del pilar es $y_1(x) = \frac{4x}{L^2}(L - x)$, teniendo en cuenta que debe satisfacer las condiciones de contorno cinemáticas $y_1(0) = y_1(L) = 0$. Entonces, multiplicándolo por P para obtener el momento flector correspondiente, integrándolo dos veces e imponiendo las condiciones de contorno se obtiene:

$$y_2(x) = \frac{PLx}{3EI}\left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

Ahora definir:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{P}{12EI}\left(\frac{L^3 - 2x^2L + x^3}{L - x}\right) \equiv Q_1(x)$$

y obtener un límite superior y un límite inferior de P_{cr} equiparando $[Q_1(x)]_{max}$ y $[Q_1(x)]_{min}$ a la unidad:

$$Q_1^{max} = Q_1(L/2) = \frac{PL^2}{9,6EI} = 1 \Rightarrow 9,6\frac{EI}{L^2} \le P_{cr}$$

$$Q_1^{min} = Q_1(0) = \frac{PL^2}{12EI} = 1 \Rightarrow P_{cr} \le 12\frac{EI}{L^2}$$

Para calcular las estimaciones de la carga crítica, es necesario definir criterios de similitud entre $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Los siguientes son dos criterios posibles:

(a) Equiparar los valores medios:

$$\left.\begin{aligned}(y_1)_{av} &= \frac{1}{L}\int_0^L y_1\,dx = \frac{2}{3}\\ (y_2)_{av} &= \frac{1}{L}\int_0^L y_2\,dx = \frac{PL^2}{15EI}\end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{cr}^{e} = 10\frac{EI}{L^2}$$

(b) Equiparar $y_1(L/2)$ y $y_2(L/2)$:

$$y_1(L/2) = 1 \quad y \quad y_2(L/2) = \frac{5PL^2}{48EI} \Rightarrow P_{cr}^{e} = 9,6\frac{EI}{L^2}$$

Para i = 2

La repetición del procedimiento con la estimación inicial:

$$y_2(x) = x\left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$ (misma forma que el resultado de la iteración 1)

proporciona

$$y_3(x) = \frac{PL^2}{30\,EI}\left(\frac{3x}{L} - \frac{5x^3}{L^3} + \frac{3x^5}{L^5} - \frac{x^6}{L^6}\right)$$

$$Q_2(x) = \frac{PL^2}{30\,EI}\,\frac{3L^5 - 5x^2L^3 + 3x^4L - x^5}{L^2\,(L^3 - 2x^2L + x^{3)}}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_2^{max} &= \frac{PL^2}{9,836\,EI} \\ Q_2^{min} &= \frac{PL^2}{10\,EI} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9,836\frac{EI}{L^2} \le P_{cr} \le 10\frac{EI}{L^2}$$

(a) $(y_2)_{av} = (y_3)_{av} \Rightarrow P_{cr}^{e} = 9,882\dfrac{EI}{L^2}$

(b) $y_2(L/2) = y_3(L/2) \Rightarrow P_{cr}^{e} = 9,836\dfrac{EI}{L^2}$

Estimación del modo de pandeo: $y_1(x) \approx \dfrac{3x}{L} - \dfrac{5x^3}{L^3} + \dfrac{3x^5}{L^5} - \dfrac{x^6}{L^6}$

Resultados exactos: $P_{cr} = \pi^2\dfrac{EI}{L^2} = 9,8696\dfrac{EI}{L^2}$

$$y_1(x) = \text{sen}\,\frac{\pi x}{L}$$

EJEMPLO 8.3(ii) APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK

Considerar que la viga, mostrada en la figura 1, está dividida en 6 segmentos iguales de longitud l

Los cálculos se llevan a cabo utilizando el método de Newmark y los resultados se ofrecen en la tabla 1 junto con una serie de comentarios explicativos.

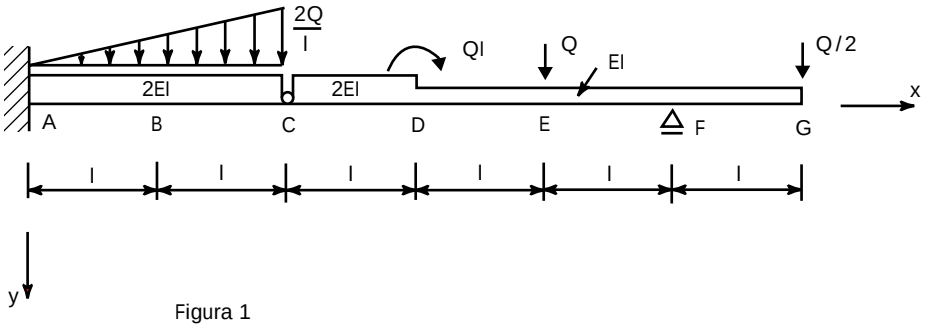


Figura 1

Las figuras 2 y 3 son los diagramas del momento flector y de deflexión.

TABLA 1

Nudo / Segmento		A	AB	B	BC	C	CD	D	DE	E	EF	F	FG	G	Coeficiente de escala
		Variando sobre AB y BC con los siguientes valores													
(i)	Cargas repartidas(q)	0		-1		-2		0		0		0		0	Q/l
(ii)	Cargas concentradas equivalentes (q_{disk}) (*)	-1		-6		-50		0		0		0		0	Q/6
(iii)	Cargas concentradas (Q)	0		0		0		0		-6		0		-3	Q/6
(iv)	Cargas concentradas totales (F_{disc})	-1		-6		-5		0		-6		0		-3	Q/6
(v)	Valores medios de cortadura sin corregir (V′) (*)		20		14		9		9		3		3		Q/6
(vi)	Momentos flectores sin corregir (M′) (*)	-64		-44		-30		-21 -15		-6		-3		0	Ql/6
(vii)	Corrección del momento flector (M_{corr}) (*)	50		40		30		20		10		0		0	Ql/6
(viii)	Corrección de los valores medios de cortadura (V_{corr}) (*)		-10		-10		-10		-10		-10		0		Q/6
(ix)	Valores medios de cortadura (V) (v + viii)		10		4		-1		-1		-7		3		Q/6
(x)	Momentos flectores (M) (vi + vii)	-14		-4		0		-1 +5		4		-3		0	Ql/6
(xi)	Curvaturas (χ)	-7		-2		0		-0,5 5		4		-3		0	Ql/6EI
(xii)	Curvatura concentrada equivalente (χ_{disc}) (*)	-61		-54		-5		-1,5 62		84		-52		-22	$\frac{Ql^2}{144EI}$

TABLA 1 (continuación)

Nudo / Segmento		A	AB	B	BC	C	CD	D	DE	E	EF	F	FG	G	Coeficiente de escala
		Variando sobre AB y BC con los siguientes valores													
(xiii)	Pendientes medias sin corregir (θ′) (*)		-61		-115		-120		-59,5		24,5		-27,5		$\frac{QI^2}{144EI}$
(xiv)	Deflexiones medias sin corregir (y′) (*)	0		-61		-176		-296		-355,5		-331		-358,5	$\frac{QI^2}{144EI}$
(xx)	Corrección de deflexión (y_{corr}) (*)	0		0		0		110,33		220,67		331		441,33	$\frac{QI^3}{144EI}$
(xvi)	Corrección de pendiente media (θ_{corr}) (*)		0		0		110,33		110,33		110,33		110,33		$\frac{QI^2}{144EI}$
(xvii)	Pendientes medias (θ) (xiii + xvi)		-61		-115		-9,67		50,83		134,83		82,83		$\frac{QI^2}{144EI}$
(xviii)	Deflexiones (y) (xiv + xv)	0		-61		-176		-185,67		-134,83		0		82,83	$\frac{QI^2}{144EI}$

(*) Véase comentarios explicativos

COMENTARIOS EXPLICATIVOS

(ii) Se utiliza una discretización lineal

(v) El cálculo se inicia por la derecha, de manera que los valores medios de cortadura se conocen en base únicamente a un valor arbitrario, que es $R_F = 0$.

(vi) La misma dirección que en V′. Falta la influencia de R_F. Incluye un salto en el punto D debido al momento concentrado.

(vii) La corrección se debe a R_F y se basa en el hecho de que $M_D = 0$. Es lineal entre F y A.

(viii) Es el valor de R_F, es decir, la pendiente de M_{corr}.

(xii) En el punto D, debido al salto de la curvatura, es necesario utilizar dos veces la fórmula para las estaciones extremas. Se utiliza una discretización parabólica.

(xiii) El cálculo se inicia desde la izquierda, de manera que las pendientes medias se conocen en base a únicamente en base a un valor arbitrario, que es la discontinuidad de la pendiente en el punto C.

(xiv) La misma dirección que en θ′ Falta la influencia de $\Delta\theta_c$.

(xv) La corrección se debe a $\Delta\theta_c$ y se basa en el hecho de que $y_F = 0$. Es lineal entre D y G.

(xvi) Es el valor de $\Delta\theta_c$, es decir, la pendiente de y_{corr}.

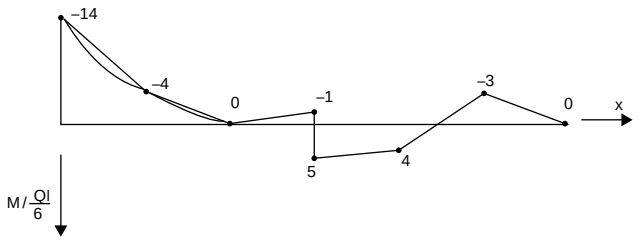


Figura 2

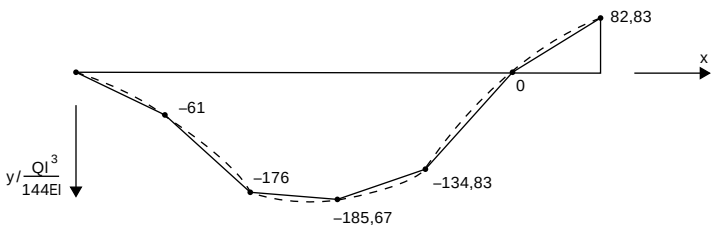
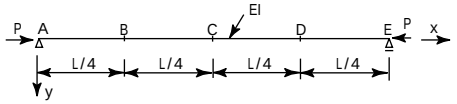


Figura 3

EJEMPLO 8.3(iii) APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK

8.3(iii) PROBLEMA 1 PILAR LIBREMENTE APOYADO



Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
Deflexión inicial, Y_o (estimada)	0		1		2		1		0	
i = 1										
(1) Deflexión inicial (y_o)	0		1		2		1		0	
(2) Esfuerzo axial (N)		1		1		1		1		P
(3) Modificación de la deflexión en un segmento (Δy)		-1		-1		1		1		
(4) Modificación del momento en un segmento (ΔM)		-1		-1		1		1		P
(5) Momento flector sin corregir ($M' = M$)	0		-1		-2		-1		0	P
(6) Curvaturas (χ)	0		-1		-2		-1		0	$\frac{P}{EI}$
(7) Curvaturas concentradas equivalentes (χ_{disc})	-4		-24		-44		-24		-4	$\frac{PL}{96\,EI}$
(8) Pendiente media sin corregir (θ')		-4		-28		-72		-96		$\frac{PL}{96\,EI}$
(9) Sin corregir (y')	0		-4		-32		-104		-200	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
(10) Corrección de deflexión (y_{corr})	0		50		100		150		200	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
(11) Deflexión neta ($y \equiv y_1$)	0		46		68		46		0	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
(12) $\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$	0		46		34		46		0	$\frac{PL^2}{384\,EI}$

Considerando los valores mayores y menores de y_1 / y_o se obtiene un límite superior y un límite inferior de P_{cr}:

$$46 \frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 8,348 \frac{EI}{L^2} \leq P_{cr}$$

$$34 \frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 11,294 \frac{EI}{L^2} \geq P_{cr}$$

Considerando la media de los valores de y_1 / y_o se obtiene una estimación de P_{cr}:

$$\frac{46 + 34 + 46}{3} \frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P_{cr}^{e} = 9,143 \frac{EI}{L^2}$$

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
i = 2										
y_1	0		1		1,478		1		0	
Δy		-1		-0,478		0,478		1		
Δ M		-1		-0,478		0,478		1		P
$M' \equiv M$	0		-1		-1,478		-1		0	P
χ	0		-1		-1,478		-1		0	$\frac{P}{EI}$
χ_{disc}	-4,522		-22,956		-33,56		-22,956		-4,522	$\frac{PL}{96\,EI}$
θ'		-4,522		-27,478		-61,038		-83,994		$\frac{PL}{96\,EI}$
y'	0		-4,552		-32		-93,038		-177,032	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
y_{corr}	0		44,258		88,516		132,744		177,032	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
$y = y_2$	0		39,736		56,516		39,736		0	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
$\frac{y_2}{y_1}$	0		39,736		38,238		39,736		0	$\frac{PL^2}{384\,EI}$

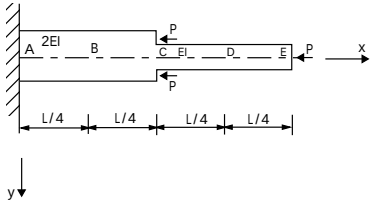
$$39,736\,\frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 9,664\,\frac{EI}{L^2} \leq P_{cr}$$

$$38,238\,\frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 10,042\,\frac{EI}{L^2} \geq P_{cr}$$

$$9,664\,\frac{EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq 10,042\,\frac{EI}{L^2} \qquad P_{cr}^{e}\,9,787\,\frac{EI}{L^2}$$

Resultado exacto: $P_{cr} = \pi^2\,\frac{EI}{L^2} = 9,870\,\frac{EI}{L^2}$

8.3(iii) PROBLEMA 2 PILAR ESCALONADO



Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala	
Deflexión inicial, y_o (estimada)	0		0,5		1		2		4		
i = 1											
(1) Deflexión inicial (y_o)	0		0,5		1		2		4		
(2) Esfuerzo axial (N)		3		3		1		1		P	
(3) Modificación de la deflexión (Δy)		-0,5		-0,5		-1		-2			
(4) Modificación del momento (ΔM)		-1,5		-1,5		-1		-2	0	P	
(5) Momento flector sin corregir ($M' = M$)	6		4,5		3		2		0	P	
(6) Curvaturas (χ)	-3		2,25		1,53		2		0	$\frac{P}{EI}$	
(7) Curvatura concentrada equivalente (χ_{disc})	33		54		112,533		46		9	$\frac{PL}{96\,EI}$	
(8) Pendiente media ($\theta' = \theta$)		33		87		232,5		278,5		$\frac{PL}{96\,EI}$	Nota: No se aplica contención al no existir contención aparte de A
(9) Desplazamiento nodal ($y'=y=y_1$)	0		33		120		352,5		631	$\frac{PL^2}{384\,EI}$	
(10) $\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$			66		120		176,25		157,75	$\frac{PL^2}{384\,EI}$	

$$176,25\frac{PL^2}{384\,EI}=1\Rightarrow P=2,179\frac{EI}{L^2}\le P_{cr}$$

$$66\frac{PL^2}{384\,EI}=1\Rightarrow P=5,818\frac{EI}{L^2}\ge P_{cr}$$

$$2,179\frac{EI}{L^2}\le P_{cr}\le 5,818\frac{EI}{L^2}$$

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
i = 2										
y_1	0		0,28		1		2,94		5,26	
Δy		-0,28		-0,72		-1,94		-2,32		
Δ M		-0,84		-2,16		-1,94		-2,32		P
M	6,26		5,42		4,26		2,32		0	P
χ	3,13		2,71		2,13 4,262		2,32		0	$\frac{P}{EI}$
χ_{disc}	36,04		64,72		28,04 43,74		54,92		9,66	$\frac{PL}{96\,EI}$
θ'		36,04		100,76		172,54		227,46		$\frac{PL}{96\,EI}$
$y = y_2$	0		36,04		136,8		309,34		536,8	$\frac{PL^2}{384\,EI}$
$\frac{y_2}{y_1}$			128,71		136,8		105,22		102,05	$\frac{PL^2}{384\,EI}$

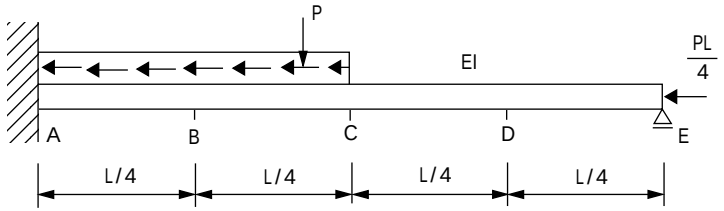
$$136,8\,\frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 2,807\,\frac{EI}{L^2} \leq P_{cr}$$

$$102,05\,\frac{PL^2}{384\,EI} = 1 \Rightarrow P = 3,763\,\frac{EI}{L^2} \geq P_{cr}$$

$$2,807\,\frac{EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq 3,763\,\frac{EI}{L^2} \qquad P_{cr}^{e} = 3,249\,\frac{EI}{L^2}$$

Resultado exacto: $P_{cr} = 3,217\,\frac{EI}{L^2}$

8.3(iii) PROBLEMA 3 PILAR SOMETIDO A CARGA VARIABLE



Cálculo de la flexibilidad

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala	
(1) Deflexión inicial, (y_o) (estimada)	0		0,5		1		0,8		0		
(2) Carga concentrada total (F_{disc})	0		0		0		0		1		
(3) Valor medio de cortadura (V)		-1		-1		-1		-1			
(4) Momento (M)	4		3		2		1		0	$\frac{L}{4}$	
(5) Curvatura (χ)	4		3		2		1		0	$\frac{L}{4EI}$	
(6) Curvaturas concntrada equivalente (χ_{disc})	11		18		12		6		1	$\frac{L^2}{96EI}$	Discretización lineal
(7) Pendiente media sin corregir (θ')		11		29		41		47		$\frac{L^2}{96EI}$	
(8) Deflexión ($y = \bar{y}$)	0		11		40		81		128	$\frac{L^3}{384EI}$	$\bar{y}$ = defflexión en E bajo carga unitaria

Procedimiento de iteración

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala	
i = 1											
y_0	0		0,5		1		0,8		0		
Δy		-0,5		-0,5		0,2		0,8			
P		-1		-1		0		0			P = carga concentrada o reacción
P_{disc}	-3		-6		-3 0		0		0	$\frac{pL}{24}$	P_{disc} = discretización lineal de la carga concentrada equivalente
P	18		0		0		0		-6	$\frac{pL}{24}$	
F_{disc}	15		-6		-3		0		-6	$\frac{pL}{24}$	
N		15		9		6		6			N = Esfuerzo axial
ΔM		-7,5		-4,5		1,2		4,8		$\frac{pL}{24}$	
M	6		-1,5		-6		-4,8		0	$\frac{pL}{24}$	
χ	6		-1,5		-6		-4,8		0	$\frac{pL}{24\,EI}$	
χ_{disc}	39		-30		-132,6		-108		-22,8	$\frac{pL^2}{2304\,EI}$	

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala	
θ'		39		9		-123,6		-231,6		$\frac{pL^2}{2304\,EI}$	
y'	0		39		48		-75,6		-307,2	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$	
Cálculo de $R_{E:}$ $-307,2\frac{pL^3}{9216\,EI}+\frac{128L^3}{384\,EI}R_E=0\Rightarrow R_E=0,1p$ Cálculo de Y_1: $y_1=y'+0,1p\bar{y}$											
y_1	0		65,4		144		118,8		0	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$	
$\frac{y_1}{y_0}$	0		130,8		144		148,5		0	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$	

$$148,5\,\frac{pL^3}{9216\,EI} = 1 \Rightarrow P = 62,061\frac{EI}{L^2} \leq (pl)_{cr}$$

$$130,8\,\frac{pL^3}{9216\,EI} = 1 \Rightarrow P = 70,459\,\frac{EI}{L^2} \geq (pl)_{cr}$$

$$62,061\frac{EI}{L^2} \leq (pl)_{cr} \leq 70,459\,\frac{EI}{L^2}$$

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
i = 2										
y_1	0		0,454		1		0,825		0	
Δy		-0,454		-0,546		0,175		0,825		
N		15		9		9		9		$\frac{pL}{24}$
ΔM		-6,81		-4,914		1,05		4,95		$\frac{pL}{24}$
M	5,724		-1,086		-6		-4,95		0	$\frac{pL}{24\,EI}$
χ	5,724		-1,086		-6		-4,95		0	$\frac{pL^2}{2304\,EI}$
χ_{disc}	39,55		-22,27		-132,07		-111		-23,7	$\frac{pL^2}{2304\,EI}$
θ'		39,55		17,28		-114,74		-225,74		$\frac{pL^2}{2304\,EI}$
y	0		39,55		56,83		-57,96		-283,75	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$
R_E = 0,09237 P										
y_2	0		63,93		145,5		121,60		0	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$
$\frac{y_2}{y_1}$	0		140,81		145,50		147,39		0	$\frac{pL^3}{9216\,EI}$

$$147,39\frac{PL^3}{9216\,EI}=1\Rightarrow P=62,258\frac{EI}{L^3}\le (pl)_{cr}$$

$$140,81\frac{PL^3}{9216\,EI}=1\Rightarrow P=65,45\frac{EI}{L^3}\ge (pl)_{cr}$$

$$62,528\frac{EI}{L^2}\le (pl)_{cr}\le 65,45\frac{EI}{L^2}\qquad (pl)^e_{cr}=63,744\frac{EI}{L^2}$$

Resultado exacto: $(pl)_{cr}=59,81\dfrac{EI}{L^2}$

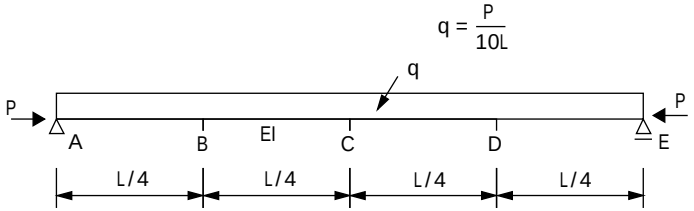
El método proporciona un valor que es mayor que el resultado exacto. Este hecho se debe fundamentalmente al error inducido por la discretización de p y χ. De hecho, cuando se procede a solucionar este problema con 8 segmentos y una estimación inicial de

0 0,217 0,435 0,718 1 0,92 0,84 0,42 0 INDUCIDOS

se obtiene, tras 3 iteraciones, $59,80\dfrac{EI}{L^2}\le (pl)_{cr}\le 60,28\dfrac{EI}{L^2}$

8.3(iii) PROBLEMA 4 VIGA-PILAR

$$P = \frac{5\,EI}{L^2} = 0,507\ P_{cr} \qquad q = \frac{P}{10\,L} = \frac{EI}{2\,L^3}$$



i) Problema I

Nudo / Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
(1) Cargas distribuidas (q)		1		1		1		1		$\frac{EI}{2L^3}$
(2) Cargas concentradas equivalentes ($q_{disc} = F_{disc}$)	-1		-2		-2		-2		-1	$\frac{EI}{16L^2}$
(3) Valor medio de cortadura sin corregir (V′)		-1		-3		-5		-7		$\frac{EI}{16L^2}$
(4) Momento flector sin corregir (M′)	0		-1		-4		-9		-16	$\frac{EI}{64L}$
(5) Corrección del momento flector (M_{corr})	0		4		8		12		16	$\frac{EI}{64L}$
(6) Momento flector (M)	0		3		4		3		0	$\frac{EI}{64L}$
(7) Curvatura (χ)	0		3		4		3		0	$\frac{1}{64L}$
(8) Curvatura concentrada equivalente (χ_{disc})	7		34		46		34		7	$\frac{1}{3072}$
(9) Pendiente media sin corregir (θ′)		7		41		87		121		$\frac{1}{3072}$

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
(10) Deflexión sin corregir (y′)	0		7		48		135		256	$\frac{L}{12288}$
(11) Corrección de deflexión (y_{corr})	0		-64		-128		-192		-256	$\frac{L}{12288}$
(12) Deflexión ($y = y_1$)	0		-57		-80		-57		0	$\frac{L}{12288}$

ii) Procedimiento de iteración

i = 1

Utilizando la primera iteración del ejemplo 1, que corresponde a la solución del Problema II, se obtiene:

0 46 68 46 0 $\frac{5}{384}\Delta$ y_{II}

Cálculo de Δ:

$$\Delta(0+1+2+1+0) = \frac{5\Delta}{384}(0+46+68+46+0) + \frac{L}{12288}(0-57-80-57-0)$$

$\therefore \Delta = -0{,}00824\ L$

Cálculo de y_1 (x):

$y_1(x) = y_I(x) + y_{II}(x)$ [$\Delta = -0{,}008324\ L$]

0 -0,00957 -0,01381 -0,00957 0 L y_1

i = 2
Problema II

Nudo Segmento	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D	D-E	E	Coeficiente de escala
i = 2										
y_1	0		-1		-1,443		-1		0	Δ
M	0		1		1,443		1		0	$\frac{5EI\Delta}{L^2}$
χ	0		-1		1,443		1		0	$\frac{5\Delta}{L^2}$
χ_{disc}	2,279		11,443		16,43		11,443		2,279	$\frac{5\Delta}{48L}$
θ'		2,279		13,722		30,152		41,595		$\frac{5\Delta}{48L}$
y'	0		2,279		16,001		46,153		87.748	$\frac{5\Delta}{192}$
y_{corr}	0		-21,937		-43,874		-65,811		-87,748	$\frac{5\Delta}{192}$
y	0		-19,658		-27,874		-19,658		0	$\frac{5\Delta}{192}$

Cálculo de Δ

$$\Delta\,(-3,443) = \frac{5\,\Delta}{192}\,(-67,14) + \frac{194\,L}{12288} \Rightarrow \Delta = 0,00932\,L$$

Cálculo de y_2 (x):

0 -0,00941 -0,01328 -0,00941 0 L y_2

Resultado exacto: y (L/2) = -0,01326 L

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales I

OBJETIVOS

Se explicarán las consecuencias de la plasticidad del material y de sus imperfecciones geométricas y constructivas sobre la resistencia a pandeo de las columnas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 3.3.1: Propiedades físicas de los metales 1
Lección 8.3: Tipos de inestabilidad elástica

LECCIONES AFINES

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Columnas
Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Vigas-columnas
Lecciones 9.12.1 y 9.12.2: Cerchas y vigas en celosía

RESUMEN

Se discute el pandeo inelástico de una barra ideal (es decir, de una barra perfectamente recta y sin tensiones residuales) considerando distintas hipótesis de comportamiento: rígido-plástico ideal, elástico-plástico ideal y real. Se examinará la influencia de las imperfecciones geométricas y de las tensiones residuales, tanto separadamente como actuando conjuntamente.

1. INTRODUCCIÓN

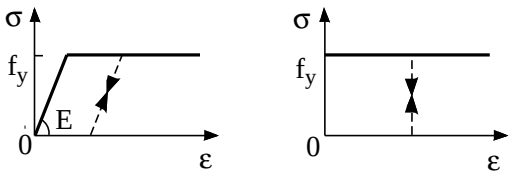
Los elementos estructurales reales no se comportan exactamente como prevé la teoría de bifurcación elástica. Primero, el material no es infinitamente elástico, por lo que se produce un comportamiento elasto-plástico y un pandeo no elástico. En segundo lugar, los elementos estructurales presentan una serie de imperfecciones (principalmente de naturaleza geométrica y o mecánica), que pueden reducir drásticamente la resistencia. El cambio rápido en la deformación al incrementarse la carga (característico en el fenómeno de pandeo) conduce a la aparición de fenómenos de segundo orden, lo que unido a la inelasticidad del material desemboca en un comportamiento global no lineal de la estructura.

Con el objetivo de ilustrar las características fundamentales del comportamiento real, esta lección analizará los casos más simples de pandeo, como el una barra biarticulada, cargada en sus extremos y con una sección transversal bisimétrica (pandeo a flexión de una columna).

En la Lección 8.3 se identificaron los parámetros que gobiernan el comportamiento elástico de una barra perfecta, es decir, sin ninguna excentricidad en la carga. En esta lección se examinarán inicialmente las consecuencias de la inelasticidad del material en ausencia de cualquier tipo de imperfección. Después, se evaluará el efecto de las imperfecciones geométricas y de las tensiones residuales. Finalmente, se analizará la influencia conjunta de todos estos factores.

2. CONSECUENCIAS DE LA PLASTICIDAD DEL MATERIAL

El comportamiento de los aceros no aleados suele representarse a través de una relación elasto-plástica ideal en una gráfica de tensión deformación como la de la Figura 1a. Para los



(a) Curva elástico - Plástico ideal (b) Curva rígido - Plástico ideal

Figura 1 Comportamiento ideal del material

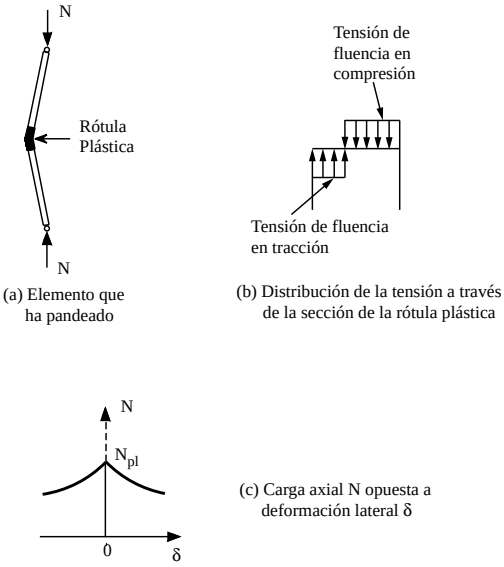
casos en que sólo hay pequeñas deformaciones elásticas el modelo rígido-plástico de la Figura 1b, refleja adecuadamente el comportamiento del material (la plataforma representa la tensión de fluencia f_y).

2.1 Modelo de comportamiento rígido-plástico ideal

Por comportamiento rígido-plástico se entiende aquél para el cual no se producen ni deformaciones axiales ni laterales para valores bajos de la carga, N. Cada sección transversal experimenta la misma tensión de compresión uniforme de valor σ = N/A, mientras que la deformación axial sólo es posible cuando σ alcanza el valor de la tensión de fluencia fy. La carga axial correspondiente se llama "carga de aplastamiento" y viene dada por:

$$N_{p1} = A\ fy \qquad (1)$$

En este punto, cualquier pequeña perturbación provoca un desplazamiento lateral que induce un momento flector adicional. El elemento colapsa con la deformación confinada en una rótula plástica en un punto de su longitud (Figura 2a). La distribución de tensiones es birectangular (Figura 2b), con deformación plástica tanto en tracción como en compresión. El elemento permanece en equilibrio mientras la carga N es menor que la carga de aplastamiento. En este caso ya no existe la tensión de fluencia a compresión a lo largo de toda la sección transversal. Cuanto mayor es el desplazamiento, mayor es el momento flector en la rótula plástica y entonces más pequeña es la carga axial (Figura 2c).



(a) Elemento que ha pandeado

(b) Distribución de la tensión a través de la sección de la rótula plástica

(c) Carga axial N opuesta a deformación lateral δ

Figura 2 Pandeo de un tornapunta biarticulado de material ideal rígido - plástico

2.2 Modelo de comportamiento elasto-plástico ideal

Mientras la carga elástica crítica de pandeo N_{cr} es menor que la carga de aplastamiento N_{p1}, el elemento permanece recto y bajo deformación elástica axial. Cuando se produce el colapso debido a un momento elástico crítico para una carga $N = N_{cr}$, la deformada lateral resultante induce momentos flectores, que aumentan la tensión en la parte cóncava del elemento y disminuyen en la parte convexa. La fluencia ocurre, en la parte central del elemento, bajo compresión y ocasionalmente bajo tracción.

Cuando, por el contrario, la carga de aplastamiento N_{p1} se alcanza antes de la carga

elástica crítica de pandeo Ncr, el comportamiento es similar al de una barra rígido-plástica, pero con deformaciones elásticas axiales y flexurales. La carga última, en este caso, es la carga de aplastamiento, N_{p1}.

2.3 Curva de resistencia para una barra ideal

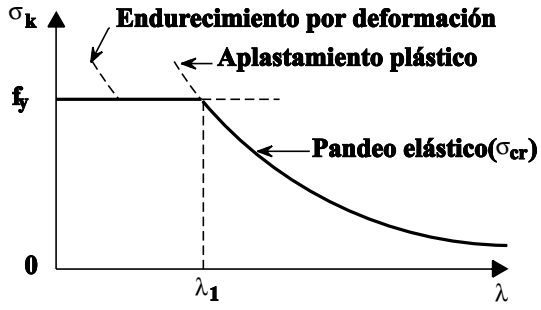
El análisis elástico del pandeo de columnas subraya la influencia de la esbeltez $\lambda = l/i$ en la resistencia. l es la longitud de pandeo de la barra (ver Lección 9.7) igual a la longitud del elemento cuando está biarticulado, y $i = \sqrt{I/A}$ es el radio de giro en el plano en el que se considera el pandeo a flexión. Representando la tensión de compresión media, σk, en la rotura frente a la esbeltez, λ, se puede comprender claramente la relación entre los dos tipos de comportamiento (ver Figura 3a). El pandeo crítico elástico está representado por la hipérbola $\sigma = \sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$. El límite de su aplicabilidad viene representado por la línea de aplastamiento plástico $\sigma = f_y$. Las dos líneas se intersectan para un valor de la esbeltez λ_1, llamado esbeltez de referencia, tal que $\pi^2 E/\lambda_1^2 = f_y$, lo que lleva a:

$$\lambda_1 = \pi\sqrt{E/f_y} \qquad (2)$$

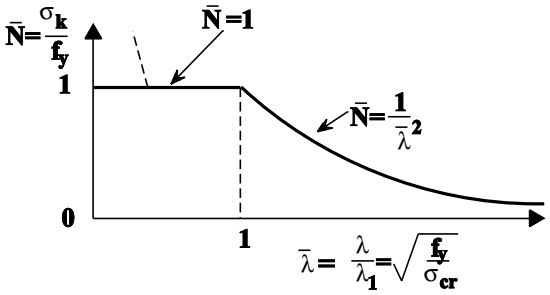
Por ello, la ruptura ocurre por aplastamiento cuando $\lambda < \lambda_1$, y por pandeo plástico cuando $\lambda > \lambda_1$. Normalmente la curva se dibuja normalizada (Figura 3b), donde $\bar{N} = \sigma_K / f_y$ se dibuja frente a $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_1$, de manera que el aplastamiento plástico ($\bar{N} = 1$) y el pandeo elástico ($\bar{N} = 1/\bar{\lambda}^2$ se crucen para $\bar{\lambda} = 1$.

2.4 Consecuencias del comportamiento elasto-plástico del material

El diagrama real tensión-deformación de algunos tipos de acero se incluye en la Figura 4. Si se compara con el comportamiento elasto-plástico ideal, aparecen tres diferencias:



(a) En función de σ_k y λ



(b) Fórmula no dimensional

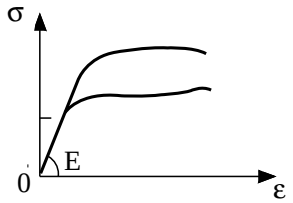
Figura 3 Curvas de resistencia para barras simplemente apoyadas e inicialmente rectas de material elasto-plástico

a) para altas deformaciones, el material puede presentar endurecimiento por deformación.

b) la deformación tiene un valor máximo, punto en el cual el material se rompe.

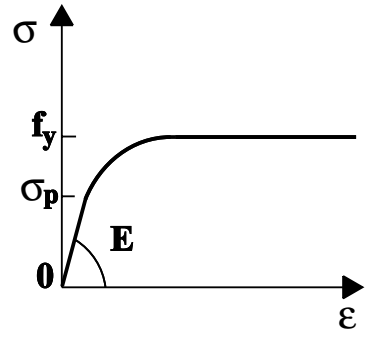
c) puede no presentarse un punto de fluencia claramente definido.

Dado que en el pandeo no es necesaria una gran ductilidad del material, el punto (b) es normalmente irrelevante.

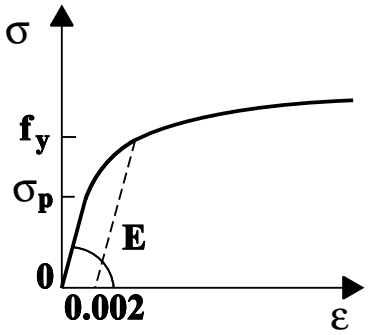


(a) Ideal elástico - plástico

Figura 4 Relación σ - ε para aceros de alta resistencia



(a) Falta de punto de fluencia definido claramente con plataforma



(b) Falta de punto de fluencia definido claramente sin plataforma

Figura 5 Comportamiento elastoplástico no ideal (aceros de alta resistencia)

El endurecimiento por deformación no afecta a la fluencia inicial, pero contribuye a un aumento en la carga de rotura. Este efecto, obviamente, es más marcado para bajos valores de la esbeltez, para los que la deformación plástica es predominante, y debe elevar la correspondiente porción de la curva de resistencia de la columna (Figura 3a). En la práctica el efecto beneficioso del endurecimiento por deformación suele despreciarse.

Las diferentes aleaciones de acero presentan diferentes comportamientos tensión-deformación. Los aceros de alta resistencia, en particular, no presentan un punto de fluencia claramente definido y pueden clasificarse como se indica a continuación:

1. Los que tienen curvas tensión-deformación con un tramo elástico hasta un valor proporcional σ_p, con la plataforma de fluencia para $\sigma = f_y > \sigma_p$ (Figura 5a).

2. Los que tienen un tramo elástico similar pero no plataforma de fluencia, endureciéndose por deformación en todo el tramo no elástico. En este caso la tensión de fluencia, f_y, se toma como un 0.2% (Figura 5b). Esta falta de un claro punto de fluencia tiene las siguientes consecuencias:

- Una barra esbelta $\left(\lambda \geq \lambda_p,\ \text{donde}\ \lambda_p = \pi\sqrt{E / \sigma_p}\right)$ colapsará por pandeo elástico mientras σ_{cr} no supere σ_p.

- Un elemento muy “rechoncho” fallará por aplastamiento plástico sin desplazamiento lateral.

- En el rango intermedio de esbelteces ($\lambda \leq \lambda_p$), la rigidez del material para resistir tensiones $\sigma > \sigma_p$ disminuye progresivamente al crecer la tensión por encima de σ_p. El pandeo inelástico puede ocurrir para una carga inferior tanto a la carga de aplastamiento como a la carga crítica elástica.

La curva de resistencia de la barra se convierte en la que se muestra en la Figura 6 (el endurecimiento por deformación no se ha incluido).

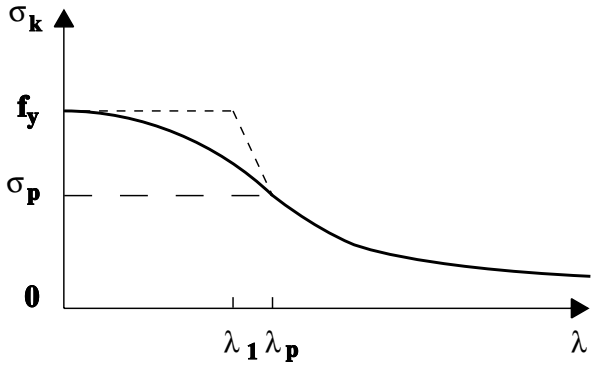


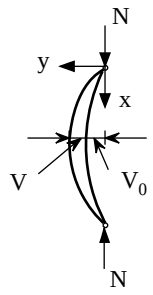
Figura 6 Curva de resistencia de una barra inicialmente recta de un material no ideal con comportamiento elastoplástico (endurecimiento por deformación despreciado)

3. RESISTENCIA DE BARRA REALES

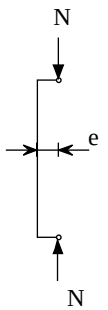
En la sección previa se consideraron modelos de barras muy idealizados que no representan las respuestas reales de los elementos sometidos a compresión, en los que se presentan imperfecciones inevitables en cualquier proceso de fabricación. Los siguientes apartados estudiarán el efecto de estas imperfecciones en la respuesta estructural real. Primero se considerarán una a una, independientemente, y después conjuntamente, tal como se pueden presentar en una estructura real.

3.1 Efecto de las imperfecciones geométricas

Las imperfecciones geométricas pueden ser, o bien falta de rectitud del elemento (Figura 7a), o bien excentricidades en la carga aplicada (Figura 7b).



(a) Directriz inicial deformada



(b) Excentricidad de carga

Figura 7 Tornapunta biarticulado con defecto geométrico inicial

El pandeo se caracteriza por campo de desplazamientos predominante asociado al modo de pandeo del elemento. Cualquier deformación inicial afectará a la inestabilidad, al igual que lo hará cualquier excentricidad en la carga aplicada. Los efectos desestabilizadores secundarios reducen la resistencia, si se compara con la de un miembro perfecto.

Al estar contenidas en el rango normal de tolerancias de fabricación, estas imperfecciones no son visibles y no pueden cuantificarse con precisión de antemano. Sin embargo, no deben olvidarse en un diseño correcto.

Se considerarán los dos tipos de imperfecciones geométricas que se muestran en la Figura 7:

- la falta inicial de rectitud en la barra en el plano de pandeo.
- la excentricidad accidental de la supuesta carga axial.

3.1.1 Falta de rectitud

La falta de rectitud inicial de una barra biarticulada (Figura 7a) se conoce también con los términos “curvatura inicial” o “deformación inicial”. Este defecto provoca momentos flectores secundarios tan pronto como se aplica la carga, que conducen a mayores deformadas debidas a la flexión y a un crecimiento del brazo de palanca de las fuerzas de compresión aplicadas en los extremos. Como consecuencia aparece un comportamiento geométrico no lineal. Existirá una deformada estable mientras el momento de la carga, es decir, el producto de las carga por la deformada lateral, no supere el momento resistente en ninguna sección. El pandeo de una columna con una curvatura inicial se produce por divergencia del equilibrio, al contrario que los elementos comprimidos ideales, que pandean por bifurcación del equilibrio.

Cualquier sección transversal de la barra sufre una combinación de carga axial y flexión, independientemente del valor de la carga.

Puesto que no existe linealidad (se necesita conocer la deformada para determinar el equilibrio), los efectos del momento flector y de la carga axial no pueden superponerse para obtener la respuesta conjunta.

Si se consideran cargas y condiciones de contorno elementales, se puede emplear un procedimiento directo de resolución, basado en la integración de la ecuación diferencial del equilibrio que describe la deformada. La ecuación fundamental del equilibrio para una barra con una curvatura inicial elástica $v_o(x)$ en el plano de pandeo es (ver Figura 7a):

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{N(v_0 + v)}{EI_z} = 0 \qquad (3)$$

donde v(x) es la deflexión adicional asociada a la carga axial N. Puesto que el primer modo de pandeo de una barra biarticulada es una semionda senoidal, la curvatura inicial se supone parecida. Se puede obtener fácilmente que la amplitud de la deflexión total vt en la sección crítica (en x = 0.5 L en este caso) es:

$$v_t = v_o / (1 - N/N_{cr}) \qquad (4)$$

donde $N_{cr} = \pi^2 EI_z/L^2$ es la carga crítica de pandeo. La carga axial amplifica la falta de rectitud inicial y el momento flector de primer orden Nvo en un factor 1/(1 - N/Ncr):

$$M = Nv_t = Nv_o/(1 - N/N_{cr}) \qquad (5)$$

En la Figura 8 (curva O´AB) se ha dibujado la carga axial N frente a la deflexión lateral total v_t en el plano de pandeo. La deflexión tiende a infinito cuando N se acerca a la carga crítica elástica N_{cr}, necesitandose una carga de tracción infinita para enderezar la barra.

La distribución de momentos flectores aumenta con el desplazamiento lateral. El momento flector y las tensiones son máximas en las secciones críticas: tensiones de compresión debidas a la coincidencia de la carga axial y del momento flector en la parte cóncava de la barra. La primera fluencia ocurrirá si aumenta constantemente la carga axial. El valor de N correspondiente a la primera fluencia, llamado N_y, constituye la frontera de la validez C de la respuesta elástica O´AB (Figura 8).

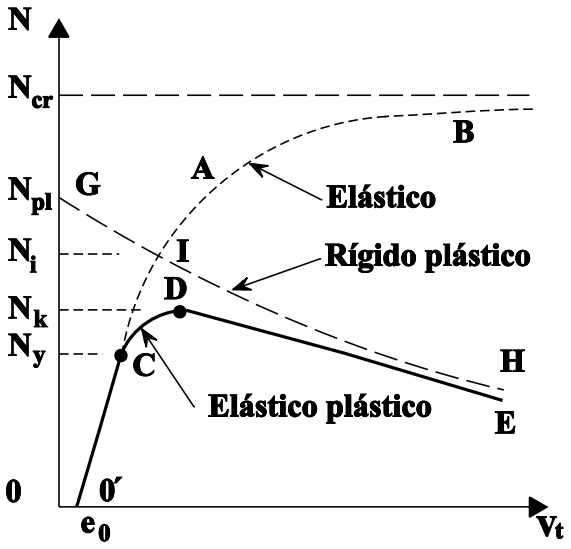


Figura 8 Respuesta de una barra inicialmente arqueada (hipótesis: $N_{pl} < N_{cr}$)

Cualquier incremento en N por encima de N_y provoca una extensión de la fluencia, tanto a lo largo de la barra, como a lo largo de la sección (Figura 9). Este fenómeno irá acompañado de una degradación de la rigidez de la barra, tal que para un valor Nk, la barra colapsa (punto D en la Figura 8). Esta ruptura se deberá al deterioro de la rigidez a flexión por dos motivos: la carga axial (inestabilidad) y la extensión de la fluencia (plasticidad). La distribución de las tensiones en la sección en las etapas C y D se representan en la Figura 10. Normalmente la parte cóncava de la barra no fluye por tracción en el colapso.

El comportamiento posterior al colapso DE es asintótico a la respuesta rígido-plástica GH (ver figura 2c). Esto último se ha representado en la Figura 8, suponiendo que $N_{p1} < N_{cr}$. Obviamente la carga de fluencia N_y y la carga última N_K tienen como límites superiores a Ncr y N_{p1} (se puede dar el caso en que $N_{cr} > N_{p1}$ o $N_{cr} < N_{p1}$). En cualquier caso la carga última nunca superará la carga Ni en donde se cotan los comportamientos elástico y rígido-plástico (punto I).

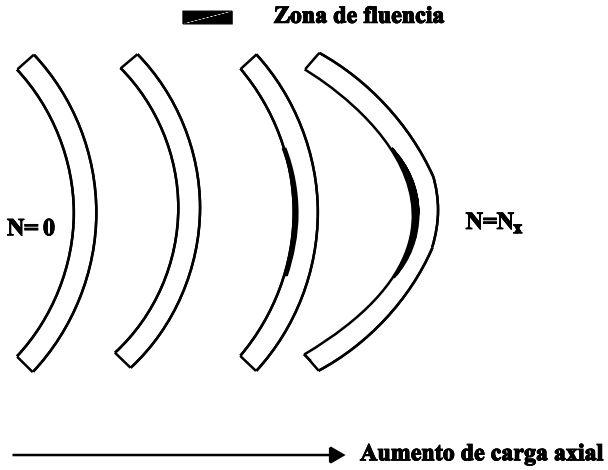


Figura 9 Extensión de la fluencia al acercarse el colapso

La proximidad o lejanía de N_y y N_k con respecto a N_{cr} y N_{p1} depende de la esbeltez de la barra y de la amplitud de la curvatura inicial.

La influencia de la esbeltez y de la falta de rectitud en la respuesta elástica-plástica se ilustra en la Figura 11, para el caso de una barra de acero de sección rectangular. Como conclusiones cabe destacar las siguientes:

a) Cualquiera que sea la esbeltez, cuanto mayor es la curvatura inicial, menor es la carga última.

b) Si se fija un valor de la curvatura inicial relativa (V_0/L), a menores valores de la esbeltez, mayor es la pendiente del tramo elástico.

c) El comportamiento posterior al colapso es una curva decreciente lentamente para barras esbeltas para cualquier falta de rigidez que esté dentro de un cierto valor tolerable.

d) Para elementos rechonchos, el comportamiento post-colapso es una curva decreciente, cuya pendiente crece cuando disminuye la curvatura inicial.

Si se conoce la curvatura inicial de antemano (o si se ha medido), es posible construir una curva de resistencia última a partir de las cargas de colapso calculadas. Dicha curva tiene la forma (a) mostrada en la Figura 12. Si la curvatura inicial es similar al modo de pandeo, la curva de resistencia empezará en $\sigma_K = f_y$ para esbelteces despreciables e irá por debajo de la correspondiente a barras inicialmente rectas, aproximándose a estas últimas, cuando crece la esbeltez. Para barras rechonchas, la influencia de la curvatura inicial es despreciable y la carga de aplastamiento plástica es aún la carga última. Por otro lado, barras muy esbeltas presentan cargas críticas elásticas N_{cr} más bajas que la carga de aplastamiento N_{p1}. En estos casos, el punto C de la Figura 8 puede elevar la curva de respuesta elástica, de tal manera que la carga de colapso esté cercana a la carga crítica elástica. La influencia de la curvatura inicial es especialmente marcada para valores medios de la esbeltez. La mayor pérdida de resistencia ocurre en la vecindad de λ_1, donde el aplastamiento plástico y el pandeo elástico son casi coincidentes y por ello interactúan más.

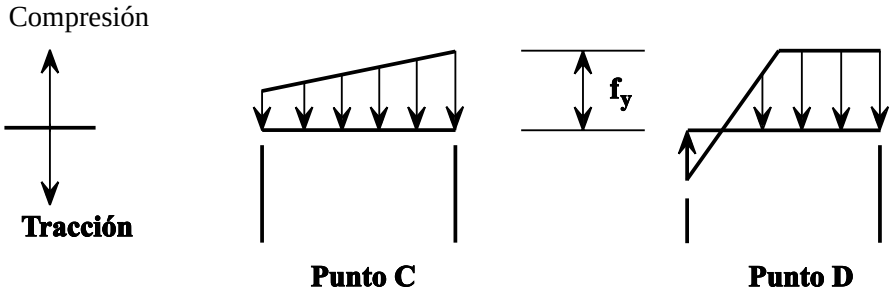
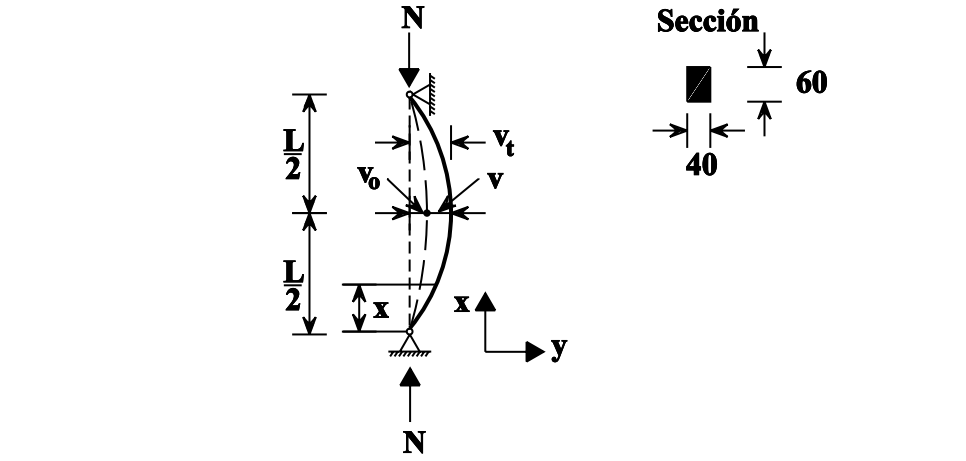
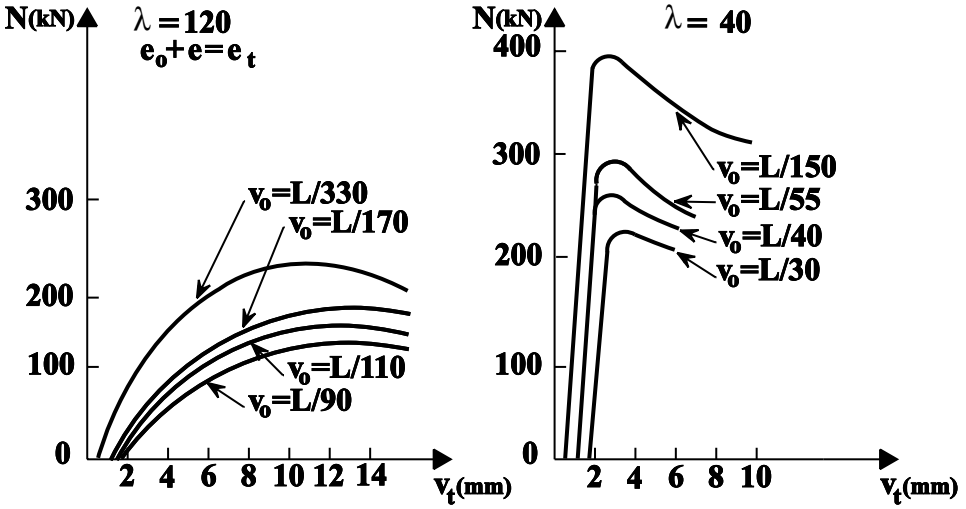


Figura 10 Distribución de tensión en la sección crítica de una barra inicialmente arqueada



(a) Deformación inicial para pandeo según eje más débil



(b) Respuesta elastoplástica para diferentes valores de falta de rectitud (E=210000 N/mm^2; f_y=210 N/mm^2)

Figura 11 Influencia de esbeltez y falta de rectitud en la respuesta elastoplástica

Si el criterio de colapso se establece en la carga de fluencia N_y en vez de en la carga máxima N_K, la curva de resistencia será más baja pero de la misma forma (curva b - Figura 12).

3.1.2 Excentricidad de la carga

Una carga de compresión, N, aplicada al final de una barra biarticulada inicialmente recta (Figura 7b), con una excentricidad, vo, induce un momento flector de primer orden en dicha barra, que flectará lateralmente en un modo similar a la barra torcida analizada anteriormente.

La ecuación diferencial del equilibrio es, en este caso, como sigue:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{N(v_0 + v)}{EI} = 0 \qquad (6)$$

La única diferencia con respecto a la Ecuación (3) es que la imperfección inicial v_o no es una función de x. Al integrar la Ecuación (6) puede verse como el flector de primer orden $M_0 = N\ v_o$ se amplifica por un factor sec $\left(\pi\sqrt{N/N_{cr}}/2\right)$.

Los factores de amplificación asociados a la curvatura senoidal inicial y la carga excéntrica son muy parecidos para el rango de valores de N/N_{cr} usados en la práctica. Por ello, la respuesta carga-deformada para una barra recta excéntricamente comprimida es similar a la de la Figura 8, exceptuando que la curva de respuesta empieza en el origen de coordenadas.

Al contrario que la curvatura inicial, que depende bastante de la longitud de la barra, la excentricidad está más relacionada con el tamaño de la sección. Además, el flector de primer orden es constante a lo largo de toda la longitud de la barra por lo que los efectos la influencia de la flexión tiende a hacer la resistencia última de barras muy achatadas más baja que la carga de aplastamiento plástica, como puede verse en la curva de resistencia (c) de la Figura 12.

3.2 Efecto de las tensiones residuales

Los elementos estructurales laminados y las placas sufren tensiones residuales en su interior a consecuencia de un enfriamiento desigual después del laminado. Similarmente, se presentan estas tensiones en las secciones soldadas, por el aporte de calor y el enfriamiento del material soldado y del material base que le rodea. En las secciones laminadas en frío estas tensiones se deben a las enormes deformaciones plásticas que se producen en el proceso de conformado. Para elementos no cargados en equilibrio, las tensiones residuales constituyen un estado de pretensión.

La distribución y magnitud de estas tensiones depende de muchos parámetros, (ver Lecciones 9.5.1 y 9.5.2). En las secciones laminadas y soldadas de tamaño normal, las tensiones de tracción residuales aparecen en las zonas que se enfrían al final, Estas tensiones se equilibrarán con compresiones residuales en el resto de la sección. Suponiendo que el espesor de la sección no sea muy grande, se puede suponer que el valor de las tensiones residuales es constante a lo largo del espesor. Una distribución típica de tensiones residuales para una sección en doble te se ha dibujado en la Figura 13a.

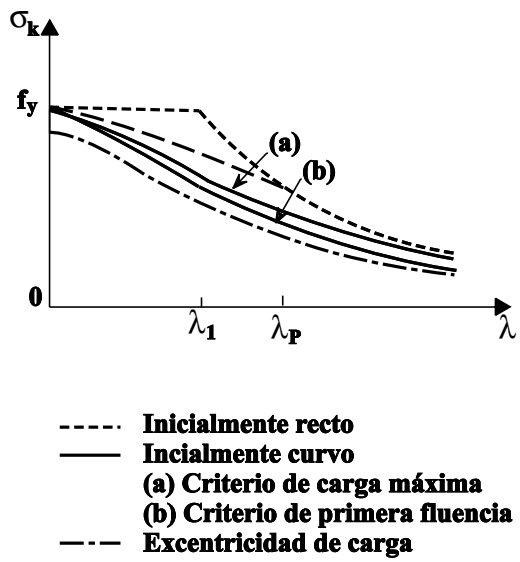


Figura 12 Curvas de resistencia

Las tensiones residuales producirán fluencias iniciales, antes de que la tensión media de compresión $\bar{\sigma}$ alcance la tensión de fluencia del material f_y. De hecho el comienzo de la fluencia se produce en la fibra o fibras con mayor tensión de compresión residual $\sigma_{r,c}$ para una carga N_y para la cual $\bar{\sigma}_p + \sigma_{r,c} = f_y$.

Hasta este nivel de carga, el comportamiento es elástico. La tensión aplicada $\bar{\sigma} \le \bar{\sigma}_p$ uniformemente distribuida se superpone a la distribución de tensiones residuales $\sigma_{r,c}$. Cualquier carga adicional por encima de N_y induce la distribución de la fluencia en la sección. Las fibras en fluencia tienen una rigidez reducida comparadas con las que están en el rango elástico, porque experimentan deformaciones específicas ε mayores que la de fluencia ε_y. Consecuentemente la rigidez a flexión de la barra es constante hasta la primera fluencia, después dismi-

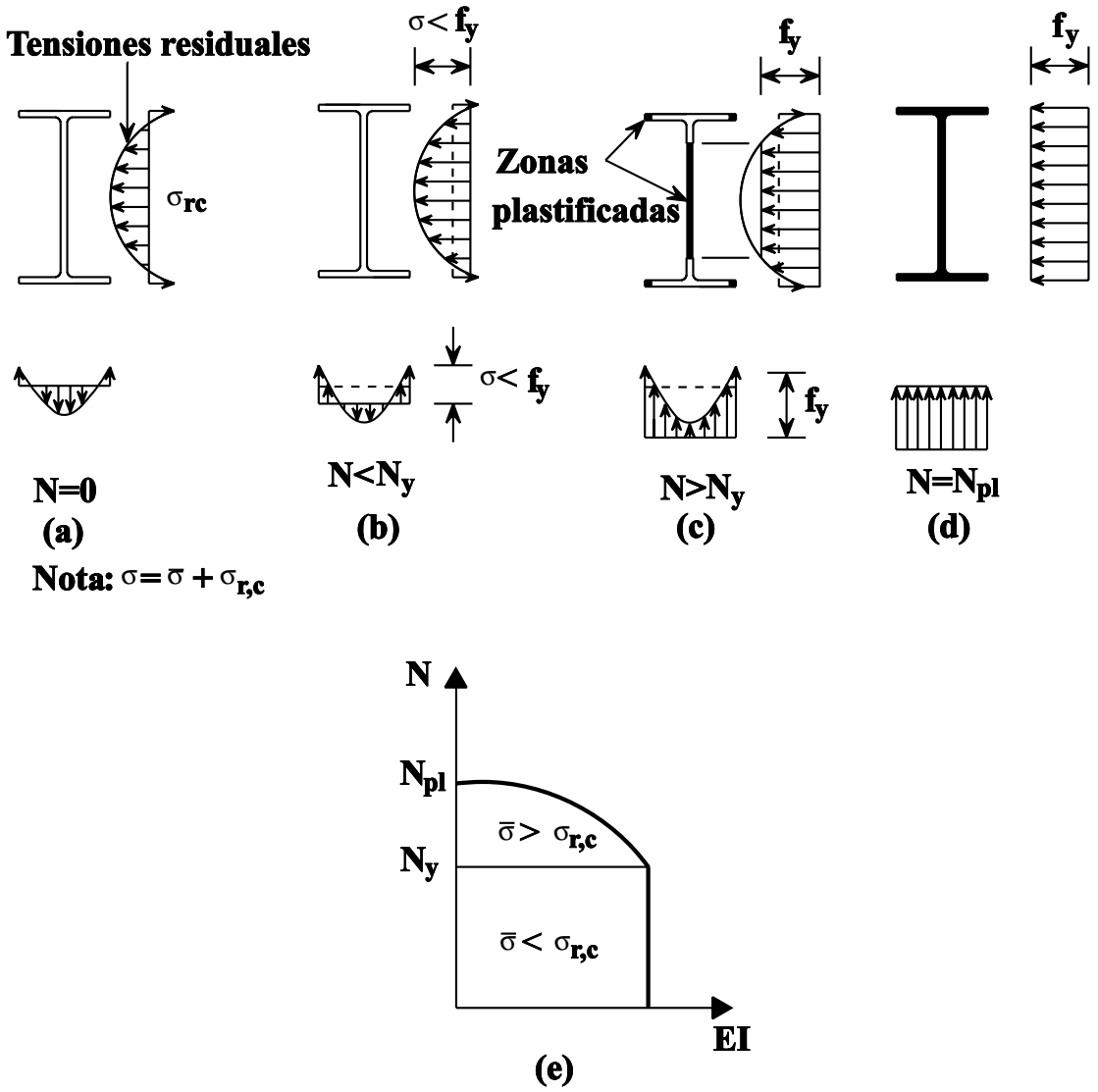


Figura 13 Influencia de tensiones residuales en la rigidez a pandeo de una barra (hipótesis: comportamiento elastoplástico)

nuye progresivamente para mayores cargas (Figura 13e) hasta anularse completamente en la carga de aplastamiento plástica (suponiendo que se desprecia el endurecimiento por deformación). Toda la sección fluye cuando la tensión media aplicada alcanza la tensión de fluencia del material. En la Figura 14 se ha dibujado la tensión media aplicada $\bar{\sigma}_k$ frente a la deformación axial media $\bar{\varepsilon}$ (acortamiento/longitud). Esta gráfica es similar a la curva σ - ε para aceros sin un punto de fluencia definido, pero con una plataforma de fluencia (Figura 5a). El comportamiento es tal como si una columna achatada comprimida con tensiones residuales estuviera hecha con un acero ficticio teniendo una relación tensión-deformación y un límite de proporcionalidad σ_p que es diferente a los del material real debido a la presencia de las tensiones residuales.

La carga de colapso de la columna achatada no se ve afectada, por tanto, por las tensiones residuales, y aún es igual a la carga plástica de aplastamiento. Igualmente, barras muy esbeltas, cuyo tensión crítica de pandeo no supera el valor $\bar{\sigma}_p$, pandean elásticamente y no se ven afectadas por la presencia de tensiones residuales.

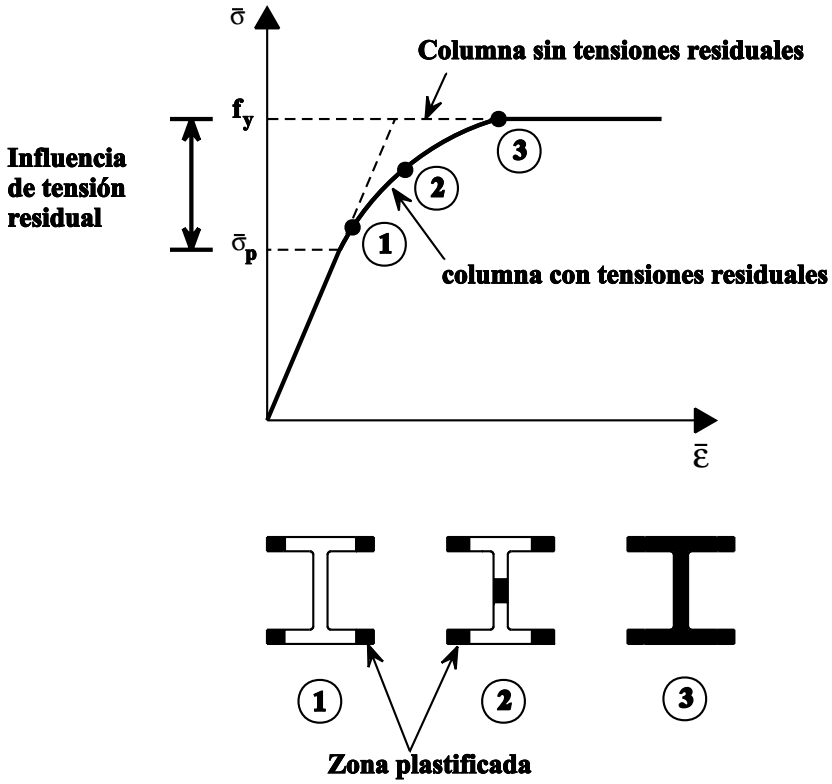


Figura 14 Tensión axial aplicada frente a deformación axial media en ensayos de columnas

La influencia sobre el rango medio de esbelteces es más significativa. La fluencia prematura reduce la rigidez a flexión, haciendo que la barra pandee inelásticamente para una carga inferior, tanto a la carga elástica crítica de pandeo, como a la carga plástica de aplastamiento. La correspondiente curva de comportamiento es la que se muestra en la Figura 6. No debe olvidarse, sin embargo, que las coordenadas representan la tensión media aplicada y deformación media axial, respectivamente, por lo que $\bar{\sigma}_p$ es substituido por σ_p.

La mayor pérdida de resistencia debida a la presencia de tensiones residuales se produce otra vez para $\lambda \approx \lambda_1$.

3.4 Influencia combinada de las imperfecciones

Todos las imperfecciones analizadas separadamente antes, ocurren simultáneamente en la práctica. La curvatura inicial, excentricidad inicial de la carga, tensiones residuales y falta de un punto de fluencia definido disminuyen la resistencia de la columna en todo o parte del rango de esbelteces. Por otro lado, el endurecimiento por deformación, eleva la curva de resistencia, aunque sólo para valores bajos de la esbeltez. La ganancia de resistencia así obtenida compensa más que la pérdida de resistencia debida a excentricidades accidentales. En cualquier caso, la curva de resistencia de la columna se suele considerar interrumpida en $\bar{\sigma} = f_y$, por lo que la resistencia de reserva se suele ignorar.

Test e investigaciones numéricas han demostrado claramente que:

a) Los efectos de las tensiones residuales y de la falta de rectitud no pueden simplemente sumarse para obtener una buena aproximación de su acción conjunta sobre la resistencia última.

b) Para esbelteces intermedias y tensiones residuales pequeñas, la influencia combina-

da es inferior a la suma de las partes, aunque para los otros casos puede ser mayor.

c) Los cambios en la distribución de las tensiones residuales concluye con cambios en la resistencia de la columna, aunque menores para columnas curvadas que para columnas inicialmente rectas.

d) La influencia de la curvatura inicial y de las tensiones residuales es mayor para columnas con rigideces intermedias. En este rango las cargas de aplastamiento y las críticas son casi coincidentes. La resistencia última depende de la rigidez a flexión, de la resistencia a fluencia del material, de la amplitud y distribución de las tensiones residuales y de la curvatura inicial. La interacción entre estas dos últimas imperfecciones puede originar una gran caída en la resistencia última, si se compara con la resistencia axial de una columna perfecta.

Debido a que todas las desviaciones con respecto a una barra y material ideales están sujetas a variaciones estadísticas, es imposible predecir con exactitud la resistencia real de un elemento estándar. Para el diseño, se usan curvas que son el límite inferior, que aseguran con una cierta probabilidad que las cargas de pandeo no superan la resistencia última real.

4. RESUMEN FINAL

1. Una barra comprimida inicialmente recta, fabricada con un material elástico-plástico ideal, y que no tenga tensiones residuales puede fallar bien por aplastamiento plástico para $\lambda < \lambda_1$ o por pandeo plástico para $\lambda > \lambda_1$.

2. Esta resistencia "ideal" es menor en la práctica debido a imperfecciones geométricas y estructurales como falta de rectitud, excentricidad de la carga, tensiones residuales y falta de un límite de fluencia claramente definido.

3. Para valores muy bajos de la esbeltez se suele producir un incremento en la resistencia debido al endurecimiento por deformación. Sin embargo, suele ser despreciado por lo que la resistencia última de las columnas muy rechonchas coincide con la carga plástica de aplastamiento.

4. Para valores intermedios de la esbeltez las imperfecciones reducen la resistencia. La mayor pérdida se produce para el rango de valores $\lambda \approx \lambda_1$, donde las cargas plásticas de aplastamiento y las cargas críticas de pandeo elástico coinciden e interactúan más.

5. Para grandes esbelteces el efecto de las imperfecciones es pequeño, y la carga última está próxima a la carga crítica de pandeo elástico.

6. La esbeltez es un parámetro geométrico en el que se puede basar la determinación de la naturaleza del comportamiento y del modo de fallo.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Ballio G. and Mazzolani F., "Theory and design of Steel Structures", Chapman and Hall, London, 1983.

2. Dowling P.J., Knowles P. and Owens, G.W., "Structural Steel Design", Butterworths, London, 1988.

3. Galambos T.V. (editor), "SSRC Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, 1988.

4. McGuire W., "Steel Structures", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N-J., 1968.

5. Picard A. and Beaulieu D., "Calcul des charpentes en acier", Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.6.2: Pandeo de elementos estructurales reales II

OBJETIVOS/CONTENIDO

Se extenderán y generalizarán, a otros fenómenos de inestabilidad, las conclusiones presentadas en la Lección 8.6.1 sobre pandeo de columnas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.3: Tipos de inestabilidad elástica

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales I

LECCIONES AFINES

Lección 9.3: Pandeo local

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Columnas

Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Vigas-columnas

Lecciones 10 y 11.

RESUMEN

Se considerarán el pandeo de placas y los pandeos que incluyen deformaciones torsionales, como ocurre en el pandeo de láminas (por ejemplo, un cilindro sometido a compresión axial). Para cada tipo de pandeo se acompañará una descripción básica del fenómeno. El comportamiento se analizará en las fases de pre-pandeo, pos-pandeo y colapso, y se identificarán los parámetros geométricos más significativos. Se comentará brevemente como pueden reforzarse los elementos para prevenir el fallo por pandeo.

1. INTRODUCCIÓN

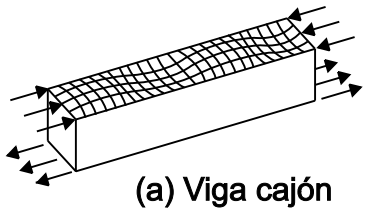
La influencia de las imperfecciones, plasticidad del material y endurecimiento por fluencia sobre la resistencia última del pandeo a flexión de columnas, se ha estudiado con detalle en la Lección 8.6.1. Esta es la inestabilidad de un elemento que mejor se ha estudiado y se tiene una casi completa compresión del fenómeno.

La mayoría de las conclusiones obtenidas en la lección previa son válidas, en términos generales, para otras formas de inestabilidad. Estas otras formas, sin embargo, se caracterizan por otros tipos de deformaciones, por lo que la naturaleza de las imperfecciones que más afectan a la resistencia son distintas que a las del pandeo a flexión. Para conocer la resistencia real al pandeo de las columnas, se debe analizar la influencia de las imperfecciones en estos otros tipos de inestabilidad que pueden presentarse.

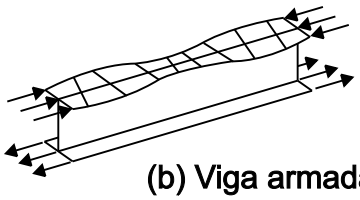
El pandeo de placas será examinado en primer lugar, porque se produce a menudo en forma de pandeo local. Además, ayuda al entendimiento del pandeo torsional de columnas, donde el pandeo ocurre únicamente por giro de las secciones transversales. Después se estudiará el pandeo flexural-torsional, que se conoce así por la relación que existe siempre entre las deformaciones de flexión y pandeo en el pandeo lateral-torsional de vigas. Se abordará el estudio del pandeo de láminas. Este complejo fenómeno se ilustra mediante el estudio de los cilindros sometidos a carga axial.

2. PANDEO DE PLACAS

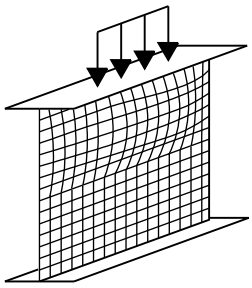
El pandeo de placa ocurre cuando secciones de pared delgada son sometidas a tensiones de compresión. Este fenómeno es bastante similar al pandeo de columnas, pero afecta a elementos de la sección transversal en vez de a la sección en su conjunto. Las tensiones de compresión pueden aparecer como consecuencia de una compresión axial, pero pueden provenir también de la flexión del elemento e incluso de fuerzas concentradas en pequeñas zonas (figuras



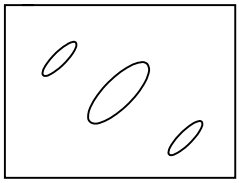
(a) Viga cajón



(b) Viga armada

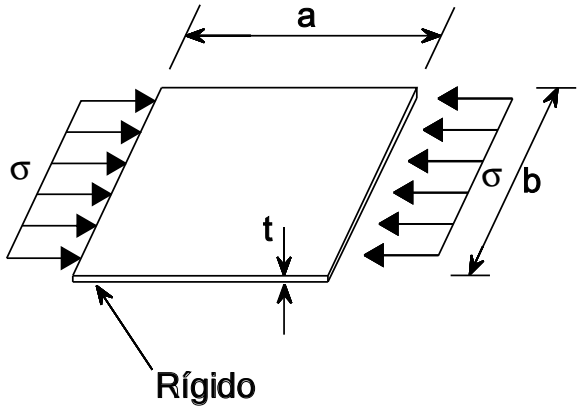


(c) Alma abombada sometida a carga



(d) Alma sometida a cortante

Figura 1a, 1b, 1c, 1d



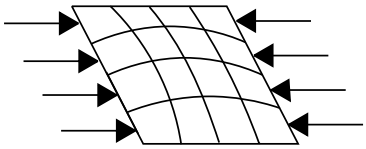


Figura 2

1a, 1b y 1c). El pandeo local puede ocurrir también en placas sometidas a cortantes (Figura 1d), puesto que los esfuerzos cortantes pueden descomponerse en tensiones principales de compresión y tracción.

Las secciones laminadas en frío y las secciones de paredes más delgadas son las más sensibles al pandeo local.

Los modos elásticos de pandeo y sus correspondientes tensiones críticas de compresión se derivaron, partiendo de las ecuaciones de una placa con pequeñas deformaciones, en la Lección 8.3.

Se sabe, desde hace bastante tiempo, que la carga crítica de pandeo de una placa no es una buena medida de la resistencia real de la placa. Tan pronto como la placa tiende a pandear, las deformadas fuera del plano provocan fuerzas debidas al alargamiento del plano medio de la placa. Para entender este comportamiento, se considerará una placa, inicialmente recta, con todos sus lados bien apoyados, bien empotrados, y sometida a una compresión uniaxial uniforme. Se supondrá, además, que la geometría es tal que el modo de pandeo es una única semionda senoidal (Figura 2). Para realizar este

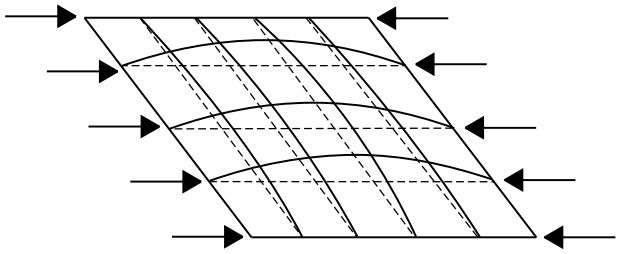
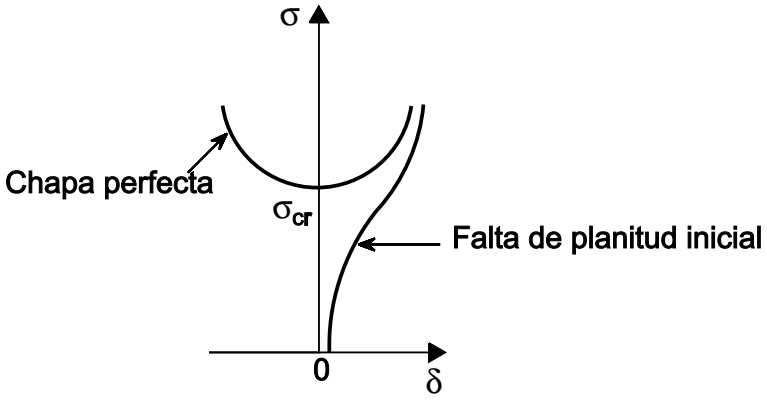


Figura 3

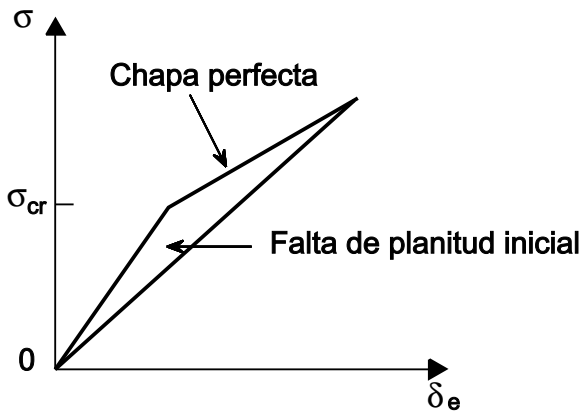
análisis la placa puede ser sustituida por un sistema de cintas en las dos direcciones ortogonales. Las cintas longitudinales están comprimidas y podrán pandear. Por debajo de la carga crítica de pandeo elástico de la placa, todas las cintas longitudinales están rectas, puesto que la placa permanece horizontal. Todas mantienen su rigidez inicial y sufren igual tensión de compresión. Una vez que la placa pandea, las bandas longitudinales próximas a los lados se ven obligadas a permanecer rectas mientras que las más alejadas de los lados son más propensas a pandear. En otras palabras, las primeras conservan su rigidez axial mientras que las últimas pierden parte de su rigidez inicial.

El pandeo de la placa aumenta la longitud de las cintas transversales porque en los lados longitudinales está impedido el acortamiento en la dirección transversal. Por ello, aparecen tensiones de membrana en las cintas transversales, que estabilizan las cintas longitudinales (Figura 3). Esto explica porqué se pueden alcanzar estados de equilibrio estables por encima de la carga crítica elástica de pandeo, y porqué es posible una gran resistencia pos-pandeo, suponiendo que el material no fluya prematuramente. Esta es la diferencia fundamental entre el comportamiento de una placa y el de una columna, la cual no exhibe esa reserva de resistencia ante el pandeo.

Cuando la placa pandea, los desplazamientos en el plano y fuera del plano interactúan, provocando un comportamiento no lineal. El comportamiento de la placa, en el caso de gran-



(a) Curva tensión aplicada frente a deformación lateral



(b) Curva tensión frente a valor del acortamiento

Figura 4

des deflexiones, sólo puede ser deducido de las ecuaciones no lineales de compatibilidad y equilibrio. Se ha representado, Figura 4, la tensión aplicada frente a la deformada lateral, y al acortamiento en el extremo. Este último es bilineal cuando la placa es perfectamente plana, y la pendiente representa la rigidez axial de la placa. La rigidez axial pos-crítica depende de las restricciones impuestas en el plano por el contorno, pero varía, normalmente, entre un 40 y un 75% de la rigidez inicial. Cuanto mayores sean las restricciones contra el desplazamiento en el plano en el contorno (sobre todo de los lados longitudinales), mayor será el efecto estabilizador de las tensiones de membrana, y mayor la reserva de resistencia pos-crítica.

La carga última se alcanza finalmente cuando la rigidez de la placa se ha deteriorado lo suficiente debido a la fluencia del material. El pandeo de la placa, como se ha mencionado antes, resulta, en una distribución no uniforme de tensiones de membrana en toda la anchura de la placa, con tensiones máximas en los lados longitudinales (Figura 5). La fluencia, por lo tanto, ocurrirá primero en los contornos y se extenderá rápidamente hasta que se alcance el colapso.

La resistencia posterior al pandeo es más acusada en placas que tienen proporciones esbeltas y que, hasta un momento muy avanzado, se comportan elásticamente. La carga última, en estos casos, puede superar varias veces la carga crítica elástica. Para placas de baja y media esbeltez, el comportamiento está muy influenciado por la plasticidad del material. Así, cuanto más achatada es la placa, más fluencia se produce antes del pandeo, lo que puede ocasionar que la resistencia última pueda ser incluso menor que la carga crítica elástica.

Los procesos de fabricación llevan aparejados la existencia de imperfecciones geométricas y de tensiones residuales. En la mayoría de los casos, ambas tienen consecuencias en el comportamiento pre y pos-pandeo.

El principal defecto geométrico es la falta de planitud, la cual, como podría esperarse, afecta significativamente al pandeo. Debido a la ondulación de la placa, las deformaciones fuera del plano crecen desde el comienzo del proceso de carga. La magnitud de la desviación con respecto al plano influye en la relación carga - deformación, aunque, mientras la respuesta sea elástica, el comportamiento de las placas, sea cual sea la magnitud de la imperfección, se aproxima al de una placa plana ideal (Figura 4a). En la curva carga en el extremo frente a acortamiento, el efecto de la falta de planitud es el de redondear el “codo” en la tensión crítica (Figura 4b). Además de la magnitud de la ondulación también es importante la forma inicial de la misma, cuanto más se parezca al modo de pandeo, más fácilmente se producirá el pandeo y más suavemente avanzará. Por otro lado, cualquier defecto previo que difiera del modo de pandeo tenderá a retrasar el pandeo de la placa, que cuando se produce lo hace con un cambio de forma brusco y acompañado de un ruido característico. Debido a la naturaleza aleatoria de la forma de esta imperfección (desconocida en la fase de diseño), normalmente se supone, conservativamente, que dicha forma se aproxima al primer modo de pandeo de la placa.

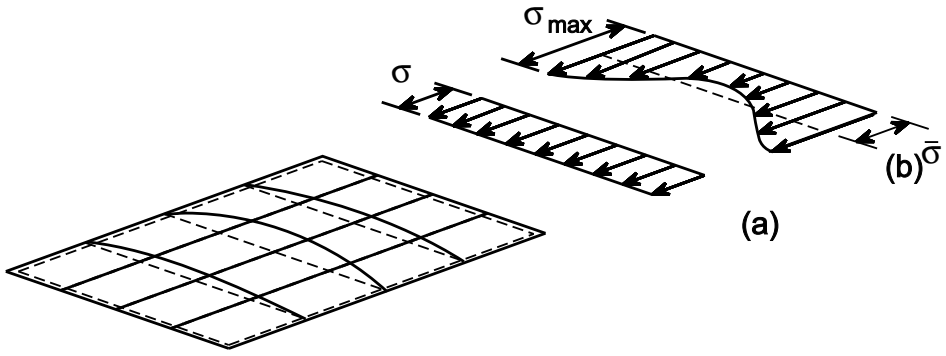


Figura 5 Distribución de tensiones: (a) antes del pandeo y (b) después del pandeo

Las tensiones residuales también tienden a reducir la rigidez axial inicial y modifican el proceso de fluencia.

La esbeltez de la placa es el parámetro geométrico que gobierna la resistencia última de la placa. Esta resistencia se representa normalmente (Figura 6a) dibujando la tensión media aplicada frente al parámetro de esbeltez $\lambda' = b/t$, siendo "b" la dimensión de la placa en la dirección perpendicular a la compresión. Una placa, inicialmente plana, debería pandear al alcanzar una tensión crítica:

$$\sigma_{cr} = k_\sigma [\pi^2 E/12 (1 - \upsilon^2)] (1/\lambda')^2 \qquad (1)$$

siendo k_σ el coeficiente de pandeo de la placa y υ el coeficiente de Poisson. Debido a la plasticidad del material, la carga de aplastamiento constituye un límite para la resistencia de la placa y obligará a cortar la curva de pandeo elástico. Como se explicó anteriormente, la tensión media última de una placa esbelta (aquella para la cual σ_{cr} es menor que la tensión de fluencia f_y,) supera la tensión crítica elástica como consecuencia de la resistencia posterior al pandeo. A resultas de ello, la curva de tensión última va por encima de la de tensión crítica. La transición entre aplastamiento y pandeo ocurre cuando $\sigma_{cr} = f_y$, lo que ocurre para el siguiente valor de la esbeltez:

$$\lambda_1' = \pi\sqrt{kE / 12(1 - v^2) f_y} \qquad (2)$$

Para una placa grande, simplemente apoyada, sometida a compresión uniforme, el coeficiente de pandeo es aproximadamente k = 4 y

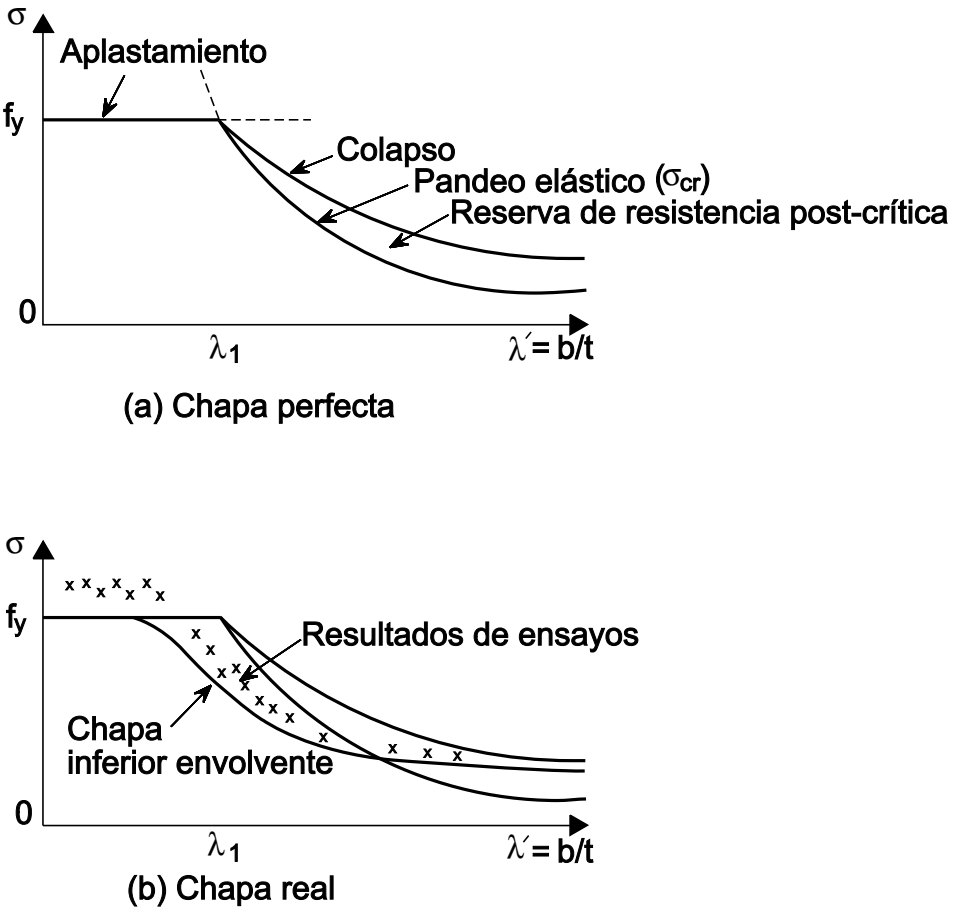
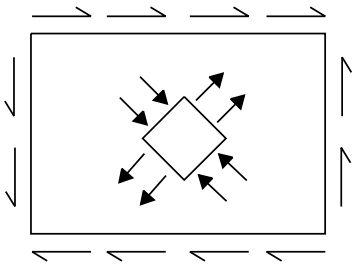


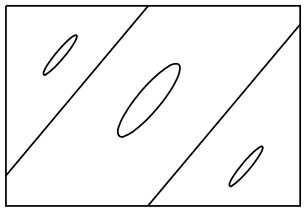
Figura 6

consecuentemente el valor de $\lambda_1 = 1{,}9\sqrt{E / f_y}$ varía entre 56 y 46 para los tipos normales de acero Fe360 y Fe510. El valor del coeficiente de pandeo k, para otros casos, depende del parámetro de aspecto, del tipo de carga y de las condiciones de contorno.

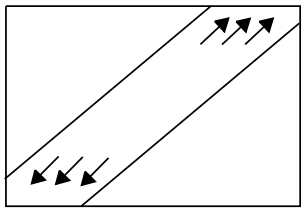
La existencia de una resistencia posterior al pandeo en placas sometidas a cortante, puede explicarse físicamente como sigue: un elemento cuadrado, cuyos lados se encuentran orientados a 45° de los lados de la placa, sufre tensión de tracción, σ_1, en dos de sus caras opuestas y, tensiones de compresión, σ_2, en las otras dos (Figura 7a). Estas tensiones de compresión pueden inducir pandeo con forma de ondulaciones en la dirección de las tensiones de tracción (Figura 7b). Las tensiones elásticas críticas de cortadura, τ_{cr}, tienen una expresión parecida a σ_{cr}. También τ_{cr} depende del coeficiente de aspecto y de las condiciones de apoyo. Una vez que la placa pandea a cortadura, el incremento en las tensiones de compresión no es posible, mientras, la rigidez axial inicial de la placa, en la dirección en la cual actúan las componentes de tracción, todavía está casi completamente disponible. El aumento en la carga de cortadura es resistido, básicamente, por los incrementos en las tensiones de tracción, estrechándose las ondulaciones. La placa se comporta como una serie de bandas en la dirección de la tracción y apareciendo el llamado campo de tracciones (Figura 7c). Este campo gira cuando las tensiones aplicadas crecen, para alinearse progresivamente con la diagonal de la placa. La carga cortante última se alcanza cuando estas bandas fluyen. En este caso también, las restricciones en el plano influyen apreciablemente en la reserva de resistencia tras el pandeo.



(a) Tensiones en un cuadrado de 45°



(b) Forma del pandeo elástico



(c) Banda de tensión diagonal

Figura 7

Como conclusión, se puede decir que, la falta de planitud inicial, las tensiones residuales, y el endurecimiento por fluencia, son parámetros que afectan la resistencia de las placas. Su influencia es similar a la que ejercen sobre el pandeo de columnas, con la única diferencia de que, para grandes esbelteces, la curva de resistencia de la placa se aproxima a la curva pos-pandeo, más que a la curva crítica de pandeo.

Las conclusiones anteriores pueden ser extendidas cualitativamente a cualquier porción de placa que experimente tensiones de compresión. Cuantitativamente se puede decir que la magnitud de la resistencia posterior al pandeo, puede variar apreciablemente con el tipo carga y las condiciones de apoyo.

Paralelamente a como se presentan las curvas de resistencia de las columnas, las curvas de resistencia de placas se suelen dibujar con ejes normalizados (Figura 6b): la tensión media última se divide por la tensión de fluencia del material, mientras que la esbeltez normalizada de la placa, al igual que para columnas, se define como:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{f_y / \sigma_{cr}} \qquad (3)$$

Haciendo uso de la Ecuación (1), la esbeltez normalizada para placas es:

$$\bar{\lambda}_p = (b / t)\left(1{,}05 / \sqrt{k}\right)\sqrt{f_y / E} \qquad (4)$$

Por consiguiente, $\bar{\lambda} = 1$ es la esbeltez límite para la transición entre aplastamiento y pandeo de placa. La esbeltez normalizada incorpora la esbeltez usual de la placa, $\lambda' = b/t$, pero modificada, a través de k, por el coeficiente de aspecto de la placa, el tipo de carga y las condiciones de contorno. Para tener en cuenta las imperfecciones reales, las curvas de resistencia deben ser tomadas como límites inferiores de los resultados de los test disponibles.

3. PANDEO TORSIONAL DE COLUMNAS

La configuración inestable debida a un pandeo torsional sólo es posible en situaciones especiales. Este tipo de pandeo se ilustrará mediante una barra compuesta por cuatro alas idénticas, formando una sección en forma de cruz (Figura 8). Cada ala es una placa plana delgada, libre para pandear bajo una compresión. Si esas placas estuvieran simplemente apoyadas a lo largo del eje de la columna, pandearían de tal modo que cualquier línea OA del ala, perpendicular a los contornos longitudinales, permanecerían aproximadamente rectas, rotando alrededor del punto 0. Puesto que las alas son todas idénticas, deberían pandear todas para el mismo valor de la tensión. Por lo tanto, es posible encontrar una forma de pandeo, en la cual, todas las secciones de la barra no se tuercen, sino que giran entorno a 0. Las cuatro alas continúan encontrándose formando ángulos rectos, por lo que el hecho de que estén unidas rígidamente por un lado común no es significativo. Esta forma de pandeo, en la cual el eje de la barra permanece recto, pero las secciones giran se denomina “pandeo torsional”.

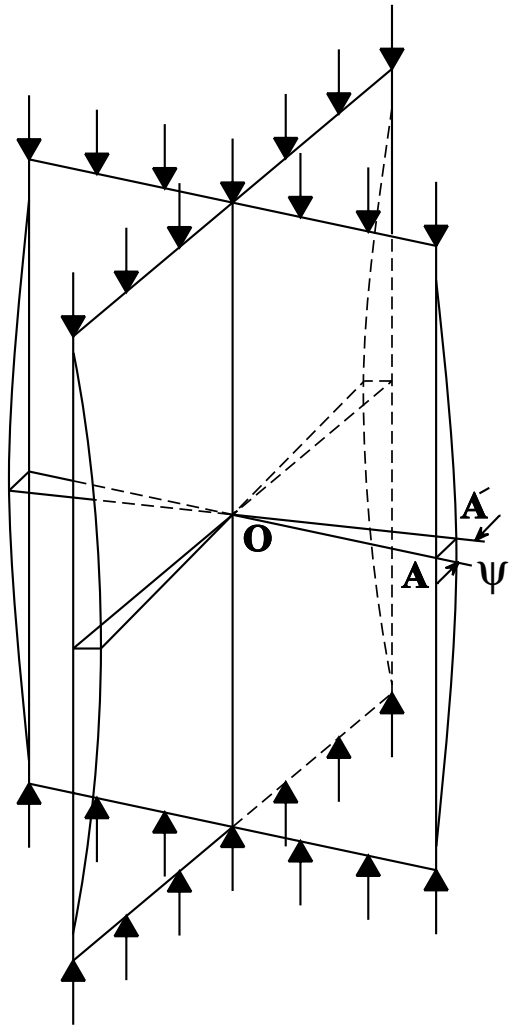


Figura 8

Al estar presente la torsión en este proceso de pandeo, la tensión crítica elástica de pandeo dependerá, parcialmente, de la rigidez torsional de Saint-Venant y del modulo de alabeo. Además, las restricciones a la torsión y al alabeo en los apoyos, deben reflejarse en los parámetros empleados.

El pandeo torsional sólo puede ocurrir cuando el centro de esfuerzos cortantes y el baricentro de la sección coinciden, o lo que es igual, sólo en secciones simétricas. Los elementos con paredes delgadas favorecen, obviamente, este tipo de pandeo. Puesto que el pandeo a flexión (asociado al pandeo de columnas) también puede ocurrir, es preciso examinar cuál de estas dos formas de inestabilidad tiene tensiones críticas más bajas.

Al igual que el pandeo a flexión, la carga crítica elástica de pandeo torsional no es una medida adecuada para medir la resistencia. Se deben tener en cuenta, de nuevo, las imperfecciones geométricas, tensiones residuales, influencia de la plasticidad del material y del endurecimiento por fluencia. En lo relacionado con las imperfecciones geométricas, las más importantes son la torsión inicial en la barra y la ondulación en los componentes de la sección. Al contrario que para el pandeo a flexión, sobre el que se tiene mucha información, la resistencia última asociada al pandeo a torsión no ha podido conocerse con precisión, por la falta de ensayos y, consecuentemente, de resultados experimentales. La decisión sobre la importancia de las imperfecciones geométricas, tensiones residuales, y el resto de parámetros ya mencionados, suele estar basada, más en el buen juicio

del ingeniero, que en un procedimiento completamente justificado. Se suele aceptar que los métodos empleados para el pandeo de columnas pueden ser extendidos al pandeo torsional, suponiendo que la reducción en la resistencia debida a las imperfecciones y la plasticidad son iguales en ambos casos, cuando ambos se refieren a sus correspondientes coordenadas generalizadas. La esbeltez normalizada se define, por consiguiente como:

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,T}} \qquad (5)$$

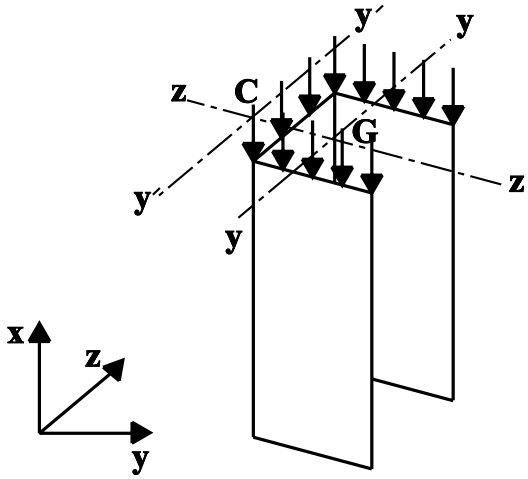
siendo $\sigma_{cr,T}$ la tensión crítica para el pandeo torsional elástico.

4. PANDEO FLEXURAL-TORSIONAL

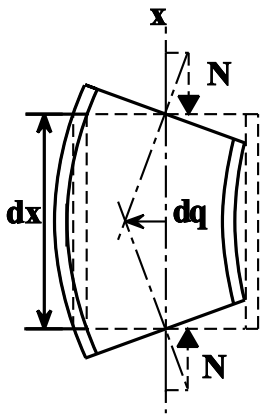
Si el baricentro y el centro de esfuerzos cortantes no coinciden los desplazamientos debidos a la flexión y a la torsión se combinan. Como consecuencia de ello se produce una reducción en la carga crítica, si se compara con la asociada al pandeo a flexión. Este fenómeno es particularmente importante en el caso de angulares y secciones en U.

Para ilustrar esta forma de pandeo, se considerará una sección en U sometida a una compresión uniaxial aplicada en su baricentro, de manera que las secciones experimenten una tensión uniforme (Figura 9a). Las dimensiones de la sección se elegirán de tal modo que el momento de inercia alrededor del eje yy, I_{yy}, sea mayor que el correspondiente al eje zz. El pandeo a flexión según el eje zz será el que hay que considerar (Figura 9b). Tan pronto como la barra comienza a pandear en la dirección yy, es decir, pandeando alrededor del eje zz, su deformada v(x) produce un momento flector M(x) = Nv(x), y da lugar a la aparición de un cortante asociado, V = dM/dx = N(dv(x)/dx). Todo ocurre como si la barra estuviera sometida a una carga transversal uniformemente repartida q = - dV(x)/dx = - N ($d^2v(x)/dx^2$), actuando en el plano yy que contiene al baricentro G, y no en el plano zz que contiene el centro de esfuerzos cortantes C (Figura 9c). Por lo tanto la flexión alrededor de zz y el correspondiente cortante inducen un momento de torsión $dM_t = qz_o\,dx$, donde z_o es la distancia entre el baricentro y el centro de cortantes. Esto significa que el pandeo puro a flexión en el plano yy es imposible, porque las deformaciones debidas a la flexión y a la torsión están inevitablemente unidas. Esta forma de pandeo se denomina “pandeo flexural-torsional”.

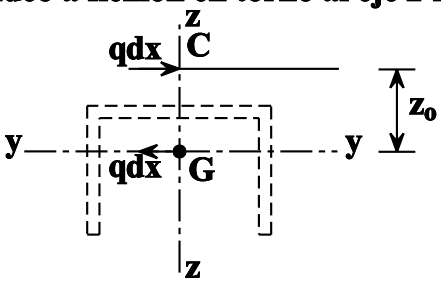
El pandeo flexural-torsional está gobernado por tres ecuaciones diferenciales de equilibrio que contienen las derivadas de las tres funcione: desplazamientos v y w en los planos yy y zz y el



(a) Sección IPN sujeta a compresión uniforme axial



(b) Pandeo a flexión en torno al eje z-z



(c) Sección transversal de la IPN

Figura 9

giro Ψ. La carga crítica de pandeo dependerá de las condiciones de contorno para v y w en los extremos (apoyada o empotrada) y de las restricciones para el giro y el alabeo de Ψ.

En el caso más normal de barra biapoyada, completamente libre para alabear, se tendrá $v = v'' = 0$, $w = w'' = 0$ y $\Psi = \Psi'' = 0$ en los extremos, y la tensión crítica para este tipo de pandeo será:

$$\sigma_{cr,FT} = \frac{\sigma_{cr,zz} + \sigma_{cr,T} \pm \sqrt{(\sigma_{cr,T} - \sigma_{cr,zz})^2 + 4\sigma_{cr,zz}\,\sigma_{cr,T}(z_0 / r_0)^2}}{2[1 - (z_0 / r_0)^2]} \quad (6)$$

donde y_o y z_o son las coordenadas del centro de cortantes y $r_0^2 = y_0^2 + z_0^2$. Es evidente que este valor es siempre menor que el correspondiente al pandeo a flexión, $\sigma_{cr,zz}$ alrededor del eje zz y que el de pandeo torsional, $\sigma_{cr,T}$. También debe comprobarse si es menor que el pandeo a flexión $\sigma_{cr,yy}$ alrededor del eje yy, que es la otra raíz de la ecuación característica.

Debe apreciarse que para una sección bisimétrica ($z_o = y_o = r_o = 0$), las raíces son:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cr,yy} = \sigma_{cr,zz}$$

y que el menor de los tres valores –$\sigma_{cr,T}$, $\sigma_{cr,zz}$ y $\sigma_{cr,yy}$– es el que dominará.

El pandeo flexural-torsional conlleva deformaciones debidas a ambos tipos de pandeo. La resistencia última estará afectada, pues, por todos aquellos defectos que influyen en los dos fenómenos.

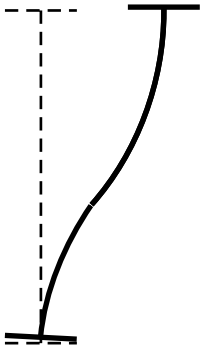
Como en el caso de pandeo a torsión, existe una falta de información acerca de la pérdida de resistencia debido a imperfecciones, tensiones residuales y plasticidad del material. De nuevo, se empleará el procedimiento empleado para pandeo a flexión, generalizandolo mediante el uso de curvas normalizadas. La esbeltez normalizada se definirá como:

$$\bar{\lambda}_{FT} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,FT}} \quad (7)$$

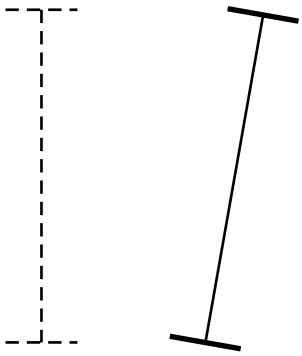
5. PANDEO LATERAL-TORSIONAL DE VIGAS

Cuando una viga se ve sometida un momento alrededor de su eje mayor, ya sea por momentos aplicados en los extremos, o más comúnmente, debido a cargas transversales, una de las alas, junto con una parte del alma, se encuentran comprimidas y tienen, por ello, tendencia a pandear.

El pandeo del ala comprimida en el plano del alma está normalmente restringida por el propio alma, debido a la gran rigidez de ésta en su plano. El pandeo en su propio plano es, por lo tanto, más usual porque el alma suministra una limitada rigidez al pandeo en esa dirección. Si el alma es muy esbelta, tiende a deformarse y la restricción que impone es despreciable y el pandeo lateral torsional es parecido a un pandeo del ala por flexión alrededor del menor eje de la sección (Figura 10a). Un alma poco esbelta actúa aproximadamente como una placa rígida y el pandeo lateral-torsional obliga a la sección a girar (Figura 10b). Debido a la rotación de los ejes principales con respecto a su posición inicial, la deformación resultante es una combinación de flexión lateral y torsión.



(a) Alma esbelta



(b) Alma achaparrada

Figura 10

Para una viga perfecta, cargada en la dirección de mayor inercia, el pandeo lateral-torsional se produce para un valor crítico del momento flector máximo, o de la tensión de compresión máxima. Este valor depende de varios factores: la forma del diagrama de momentos flectores, las condiciones de contorno (restricciones a la flexión, torsión y alabeo), el nivel de aplicación de las cargas transversales y la posible asimetría de la sección transversal. Puesto que este tipo de pandeo incluye flexión y torsión, el momento flector crítico será función de la longitud de la viga L, las rigideces a torsión y alabeo, GJ y EI_w y de la rigidez a flexión en torno al eje menor, EI_{zz}.

El momento flector elástico crítico, para una sección en doble T, será por ejemplo, el siguiente:

$$M_{cr,LT} = C_1[\pi^2 EI_{zz} /(kL)^2] \left[C_2 g + \sqrt{(C_2 g)^2 + (EI_\omega / EI_{zz})[1 + GJ(kL)^2 / \pi^2 EI_\omega]}\right] \quad (8)$$

donde C_1, C_2 y C_3 son coeficientes que reflejan la influencia de los factores anteriormente mencionados y g es la distancia desde el centro de esfuerzos cortantes al punto de aplicación de las cargas transversales. La tensión crítica para el pandeo lateral-torsional elástico tiene la forma:

$$\sigma_{cr,LT} = M_{cr,LT} / W_{yy} \quad (9)$$

donde W_{yy} es el módulo de la sección a lo largo del eje mayor.

Además de la plasticidad del material y de las tensiones residuales, las imperfecciones geométricas producen una disminución en la resistencia en comparación con la carga crítica elástica. Cualquier imperfección que provoque una torsión y/o flexión lateral debe considerarse. Un estudio estadístico reciente sobre los resultados de tests, llevado a cabo durante la preparación del Eurocódigo 3, ha demostrado que la forma de la curva de resistencia última para pandeo a flexión es bastante adecuada para la respuesta ante un pandeo lateral-torsional, siempre que los parámetros de la curva se midan adecuadamente. Al igual que para los anteriores tipos de pandeo, la esbeltez normalizada para pandeo lateral-torsional se define como:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,LT}} \qquad (10)$$

6. PANDEO DE LÁMINAS

El pandeo de láminas es, probablemente, el fenómeno de inestabilidad más complicado. Paralelamente al pandeo de placas, depende de la forma de la sección transversal más que de los desplazamientos de dicha sección en conjunto. Las tensiones de compresión pueden proceder de compresión axial, flexiones y cargas concentradas aplicadas en una zona pequeña. Además, las láminas pueden estar sometidos a presiones internas o externas (tuberías, silos, tanques, etc.).

El caso más simple para el estudio es el de un depósito cilíndrico comprimido axialmente (Figura 11). La tensión crítica de pandeo elástico es:

$$\sigma_{cr} = \left[1/\sqrt{3(1-\nu^2)}\right] Et/r \qquad (11)$$

siendo t el espesor de la pared, y r el radio del cilindro. Esta formula es muy conocida en la forma, σ_{cr} = 0,605 Et/r, válida para cilindros de acero. La curva carga-acortamiento muestra una drástica pérdida de resistencia, tan pronto como se alcanza la carga crítica (Figura 12). Cuando pandea, el depósito tiende a adoptar un modo de pandeo, que se encuentra en equilibrio con las cargas axiales, pero que es más bajo que la carga crítica. Esto es una característica de las láminas, cualquiera que sea el tipo de lámina y tipo de carga: al contrario que las placas, no son capaces de experimentar ninguna reserva de resistencia tras el pandeo.

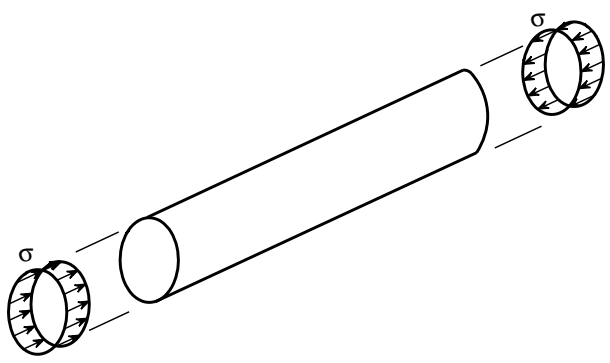


Figura 11

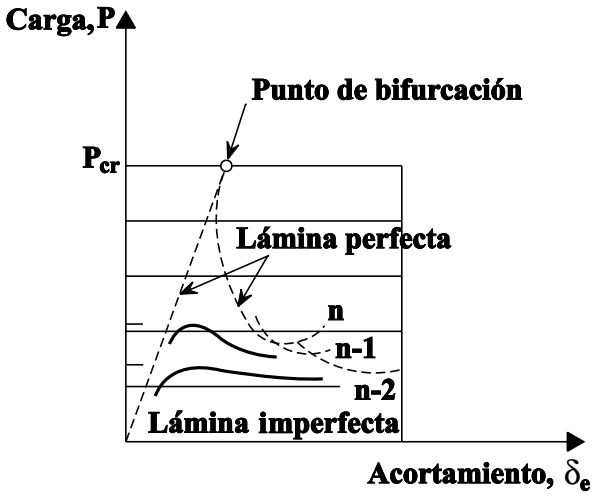


Figura 12

Incluso imperfecciones muy pequeñas ocasionan una desviación prematura de la curva

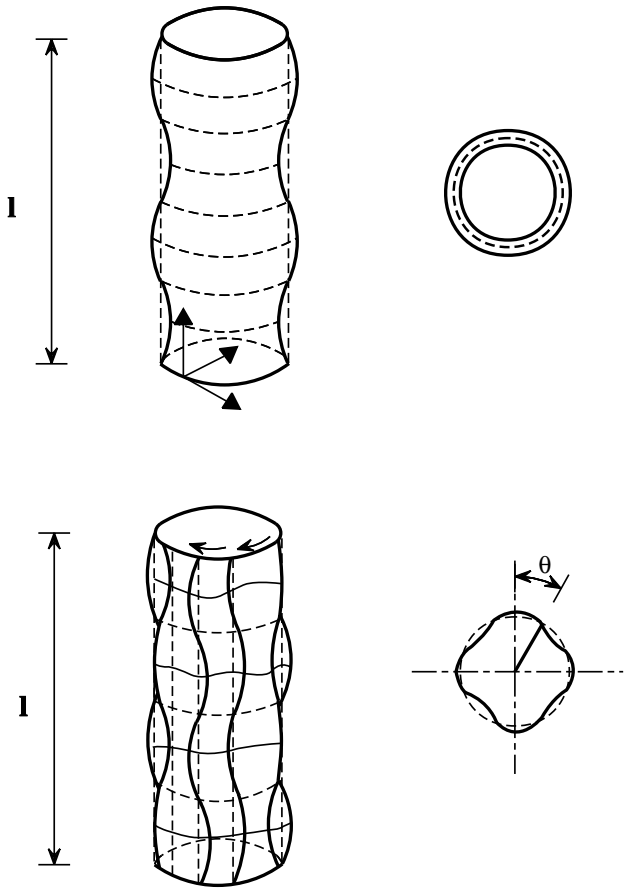


Figura 13

carga - desplazamiento de un depósito perfecto, provocando una reducción importante en la resistencia (Figura 12). Por lo tanto, las cargas elásticas críticas no pueden ser alcanzadas por los depósitos reales. La influencia de las imperfecciones sobre la carga última de los depósitos es un problema muy complejo, que ha sido ampliamente investigado.

De acuerdo con la teoría clásica de pandeo de láminas, un depósito cilíndrico perfecto puede pandear, o bien asimétricamente - con una sucesión de anillos pandeando -, o bien en forma de tablero de ajedrez (Figura 13a, b). En dependencia de las circunstancias, el depósito la lámina puede alcanzar una configuración en forma de diamante, tras el pandeo. Para tener en cuanta las imperfecciones, las reglas de diseño han usado tradicionalmente un coeficiente de reducción, α, que afecta la tensión crítica elástica. Los valores de α se han obtenidos de tests realizados en modelos de gran tamaño.

Siguiendo las Recomendaciones de ECCS, el valor de esta factor debe depender solamente de la esbeltez, r/t, de la lámina cuando las imperfecciones se mantienen por debajo de un cierto nivel. Se introduce un factor de seguridad adicional, γ, en el caso de depósitos cilíndricos sometidos a compresión meridional debido a su comportamiento pos-crítico excepcionalmente malo.

La influencia de los diferentes tipos de imperfecciones en la respuesta última puede variar mucho dependiendo del tipo de lámina y del tipo de carga. Se define una curva de resistencia normalizada dibujando el cociente σ/f_y frente a la esbeltez normalizada $\bar{\lambda}_s \left(\bar{\lambda}_s = \sqrt{f_y / \alpha\sigma_{cr}}\right)$, como ya se ha hecho para las curvas de resistencia de columnas y placas (Figura 14).

Debe notarse que cuando $\bar{\lambda}_s$ crece, la curva de resistencia se aproxima a la carga crítica (multiplicada por el coeficiente de reducción α).

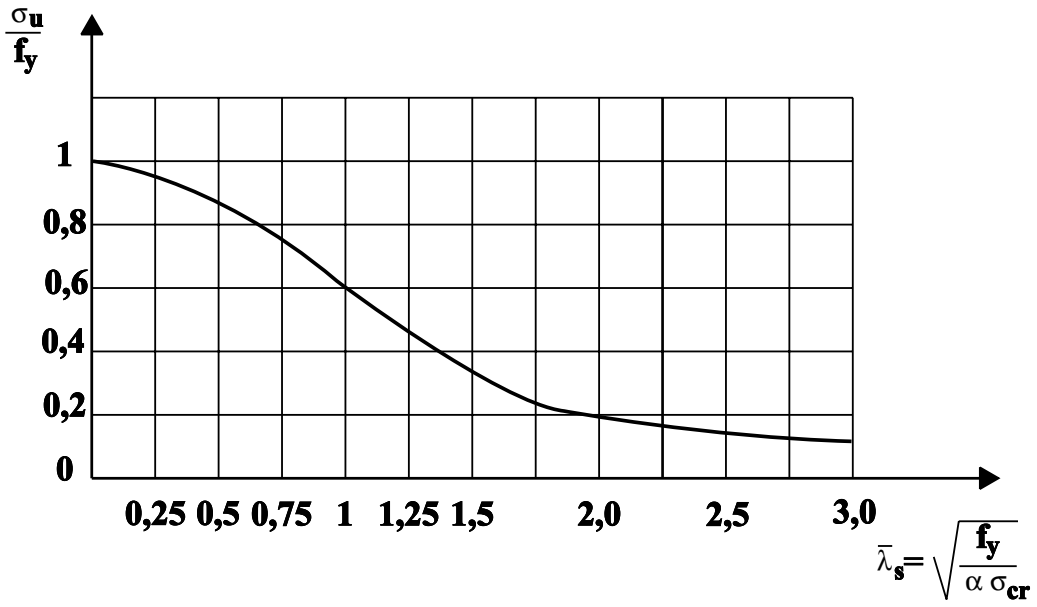


Figura 14

7. MEJORA DE LA RESISTENCIA AL PANDEO

La resistencia a pandeo de un elemento, o de una parte de una sección, puede ser mejorada empleando diferentes procedimientos.

Para una forma de pandeo dada, una reducción en la esbeltez implicará una mejora de la carga última. Esto puede conseguirse incrementando las dimensiones de la sección. También puede conseguirse distribuyendo el material de un modo diferente en torno al baricentro, pero manteniendo el área de la sección constante, aunque al hacerlo, pueden cambiarse la respuesta de la sección y/o del elemento, de tal manera que otra forma de pandeo pase a ser la crítica. En particular, una reducción del espesor de las partes de la sección transversal, con el objetivo de mejorar la distribución del material, suele llevar a que el pandeo de placa sea el que gobierne el diseño.

Un modo diferente de mejorar la resistencia frente al pandeo de un elemento es dotarlo de mejores o mayores restricciones, de tal manera que el modo de pandeo se modifique. La carga crítica elástica de una columna comprimida, por ejemplo, se multiplica por un factor 4 si se coloca un apoyo simple a media altura, de tal manera que la columna pandee siguiendo dos medias ondas senoidales. Igualmente una viga simplemente apoyada, flectando en torno a su eje mayor, se refuerza ante el pandeo lateral-torsional procurando reducir los giros a flexión y a torsión en los extremos, o más fácilmente, impidiendo los desplazamientos laterales del ala comprimida mediante unos refuerzos adecuados. La resistencia última de una placa delgada puede mejorarse apreciablemente disponiendo rigidizadores longitudinales, y posiblemente transversales. Si son lo suficientemente rígidos, la placa pandeará entre los rigidizadores, con una tensión crítica elástica mayor. Los refuerzos en los depósitos también producen un incremento en la resistencia.

Aunque la resistencia de diseño está relacionada con la resistencia última, más que con la tensión crítica elástica, los comentarios anteriores pueden ser extendidos cualitativamente cuando se hable de la resistencia última.

8. ESTABILIDAD DE PÓRTICOS

Cuando se diseñan columnas como parte de un pórtico, sería conveniente aislar las columnas del resto del pórtico, y tratar su diseño como un problema aparte. La mayoría de las columnas pertenecientes a pórticos de edificaciones experimentan flexiones aplicadas en sus extremos, además de las cargas axiales. Estos esfuerzos de flexión dependen de la interacción entre las columnas y los elementos próximos - vigas y columnas. En algunos casos, la columna soportará las vigas cuando fallen. Esta es la situación en la que las vigas se han diseñado plásticamente mientras que la columna permanece en régimen elástico. En otros casos, las vigas soportan a las columnas, si las primeras se diseñan elásticamente y permanecen en régimen elástico hasta el colapso producido por la inestabilidad de las columnas.

La mayoría de las columnas en los pórticos son elementos con apoyos elásticos sometidos a combinaciones de esfuerzos axiales y momentos en los extremos. Por eso se les denomina vigas-columna.

En la mayoría de los pórticos de edificios, los desplazamientos horizontales iniciales se impiden mediante el uso de sistemas de arriostramiento, por ejemplo, en fachadas, escaleras, usando hormigón armado como núcleo central. En esos casos los extremos no están libre para experimentar desplazamientos horizontales. La estabilidad de pórticos sin desplazamientos horizontales iniciales se reduce a la estabilidad de cada una de las columnas. Por lo tanto es necesario desarrollar reglas especiales para elementos comprimidos, con apoyos elásticos y sometidos a momentos adicionales en los extremos.

Algunas vece los pórticos deben soportar la acción de fuerzas horizontales, debidas al viento o a terremotos, que provocan momentos flectores en todo el pórtico, así como desplazamientos horizontales que crecen desde su base hacia arriba. Entonces, las columnas se desplazan de acuerdo con una forma de S, llamada doble curvatura de flexión. Los desplazamientos horizontales permiten a las fuerzas de gravedad desarrollar momentos flectores adicionales, que se llaman momentos secundarios porque son consecuencia de las cargas de volumen actuando sobre el pórtico deformado. El término secundario no es muy apropiado puesto que el valor de estos momentos no debe despreciarse. La comprobación de la estabilidad considerando la estabilidad individual de las columnas parece más una receta de cocina que un procedimiento de diseño, pero ello se debe a que se ha de tener en cuenta la influencia de los efectos de segundo orden sobre el pórtico.

El estudio a fondo de estos temas tan complejos queda fuera del alcance de esta lección. Estos temas se estudian en detalle en las lecciones del grupo 9 y en otras lecciones dedicadas a sistemas.

9. RESUMEN FINAL

1. Los aspectos más destacados del pandeo de los elementos que se han estudiado se resume en la tabla siguiente:

Tipo de pandeo	Tipo de elementos	Carga	Parámetros de rigidez	Esbeltez	Esbeltez normalizada
Flexión	Columnas	Compresiónl axial	EI_{yy} o EI_{zz}	L/i_x o L/i_y	$\sqrt{f_y / \sigma_{cr}}$
Torsión	Columnas (secciones abiertas bisimétricas o con simetría puntual)	Comprensión axial	GJ, EI_ω	–	$\sqrt{f_y / \sigma_{cr,T}}$
Flexural torsional	Columnas (secciones abiertas bisimétricas o con simetría puntual)	Comprensión axial	GJ, EI_ω, EI_{yy} y/o EI_{zz}	–	$\sqrt{f_y / \sigma_{cr,FT}}$
Lateral torsional	Vigas	Flexión eje mayor	GJ, EI_ω, EI_{zz}	–	$\sqrt{f_y / \sigma_{cr,LT}}$
Placa	Placa delgada o parte de sección	Compresión o cortante	$\frac{Et^3}{12(1-v^2)}$	b/t	$\sqrt{f_y / \sigma_{cr}}$
Láminas	Depósitos cilíndricos	Comprensión axial	–	r/t	$\sqrt{f_y / \alpha\sigma_{cr}}$

2. Los medios más efectivos de mejorar la resistencia al pandeo son incrementar las dimensiones de la sección transversal y/o emplear refuerzos, restricciones de apoyo adecuadas para modificar el modo de pandeo.

3. La estabilidad de pórticos sin desplazamiento horizontal inicial está controlada por la estabilidad de cada una de las columnas individuales.

4. La estabilidad de un pórtico con desplazamientos horizontales iniciales está controlada por la rigidez a flexión de las columnas y vigas y la rigidez de la conexión viga-columna.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Ballio, G. and Mazzolani, F, “Theory and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, London, 1983.

2. Dowling, P.J., Knowles, P. and Owens, G.W., “Structural Steel Design”, Butterworths, London, 1988.

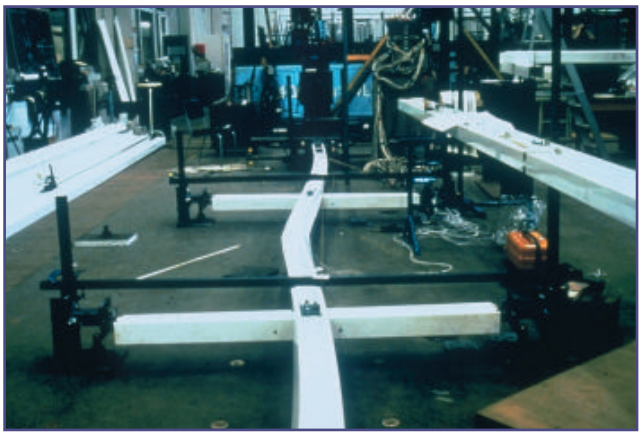
3. Galambos, T.V. (editor), “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”, John Wiley and Sons, New York, 1988.

4. McGuire, W, “Steel Structures”, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

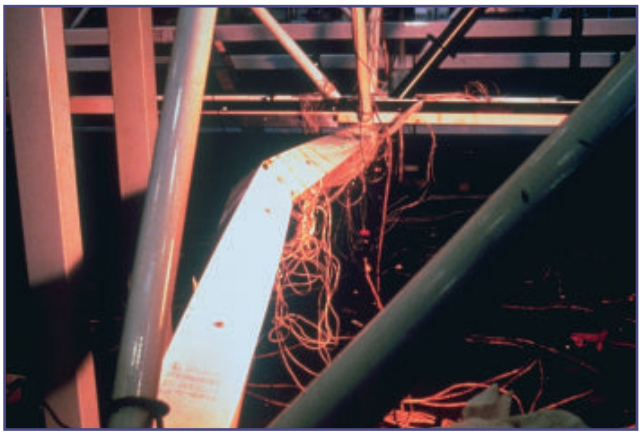
5. Picard, A. and Beaulieu, D., “Calcul des charpentes en d’acier”, Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.

6. ECCS Recommendations of Steel Shells, ECCS Publication No. 56, 1988.

DIAPOSITIVAS COMPLEMENTARIAS DEL TOMO 8: ESTABILIDAD APLICADA



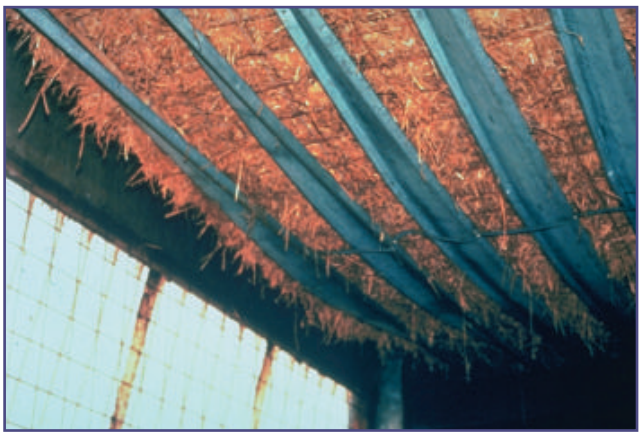
T8c1 Pandeo lateral de columnas



T8c2 Fallo local de sección rectangular hueca



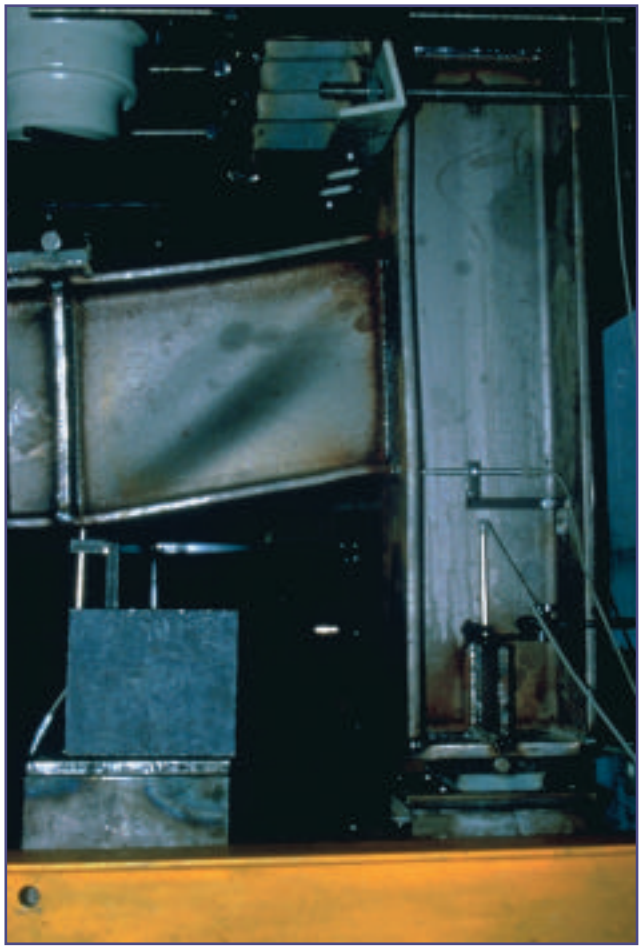
T8c4 Pandeo lateral-torsional de vigas



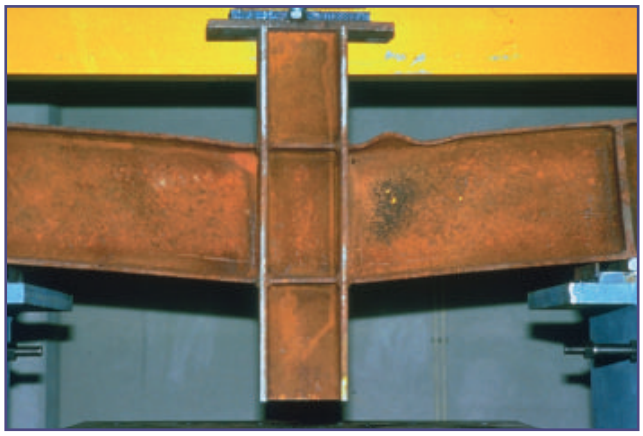
T8c5 Pandeo lateral-torsional de vigas



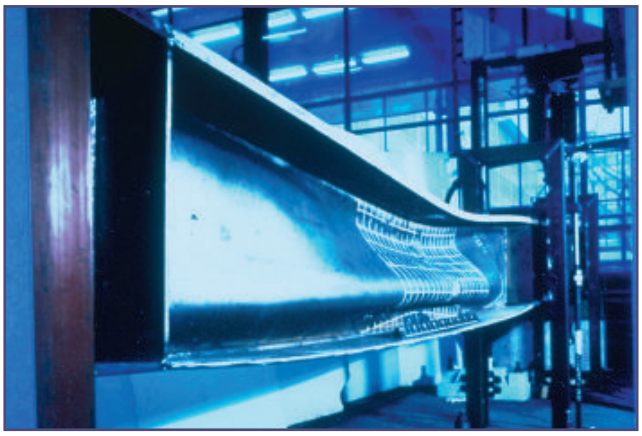
T8c3 Pandeo lateral de columnas



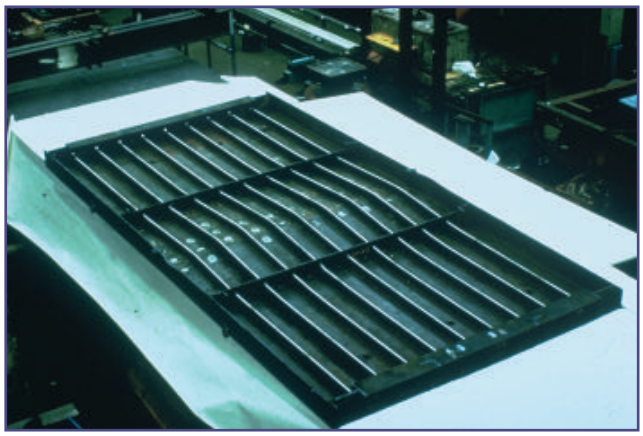
T8c6 Pandeo local de ala de viga



T8c7 Pandeo local de ala de viga



T8c8 Pandeo de alma de viga armada



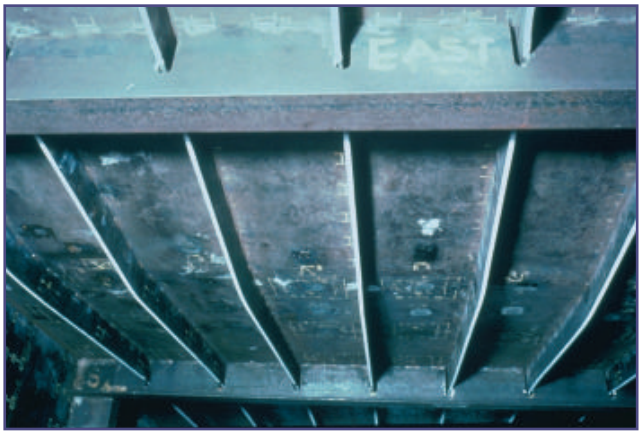
T8c9 Pandeo total de ala rigidizada comprimida



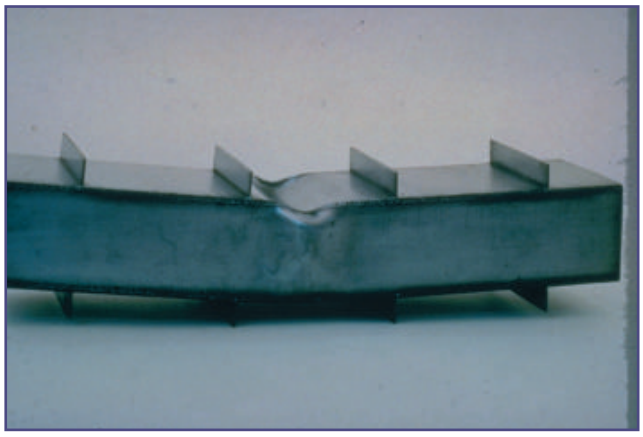
T8c10 Pandeo de placa rigidizada bajo compresión longitudinal y carga hidrostática



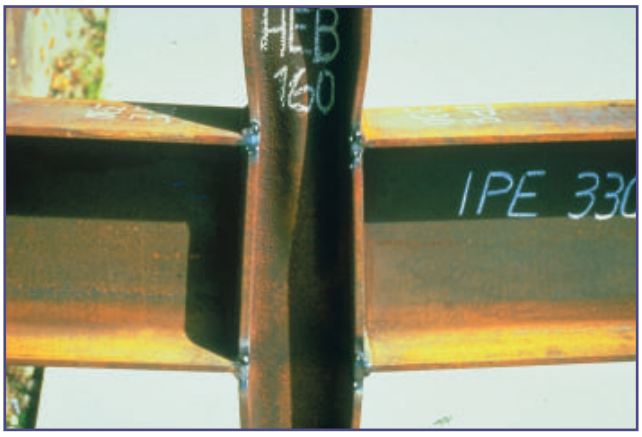
T8c11 Pandeo de ala rigidizada comprimida de viga cajón bajo cortante y momento



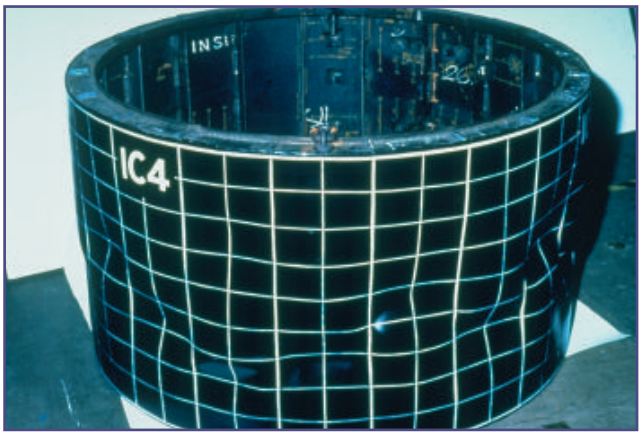
T8c12 Pandeo de ala de viga cajón



T8c13 Fallo de ala comprimida de viga cajón



T8c14 Pandeo de alma de columna (compresión local)



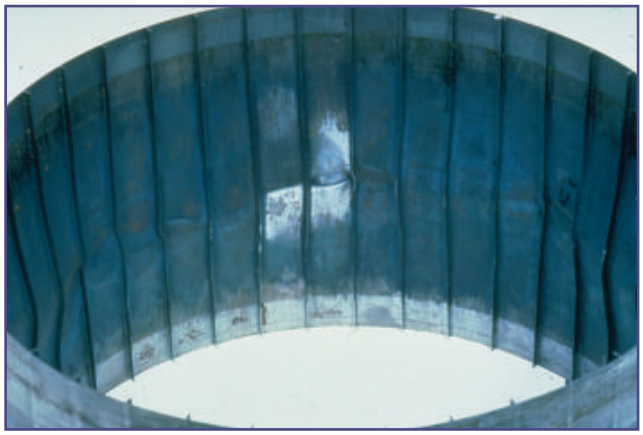
T8c15 Pandeo por compresión de envolvente de depósito



T8c16 Ensayo del alma de estructura compleja. La línea de apertura facilita el pandeo por cortante horizontal (modelo de compuerta en el Támesis)



T8c17 Ensayo del alma de estructura compleja. La línea de apertura facilita el pandeo por cortante horizontal (modelo de compuerta en el Támesis)



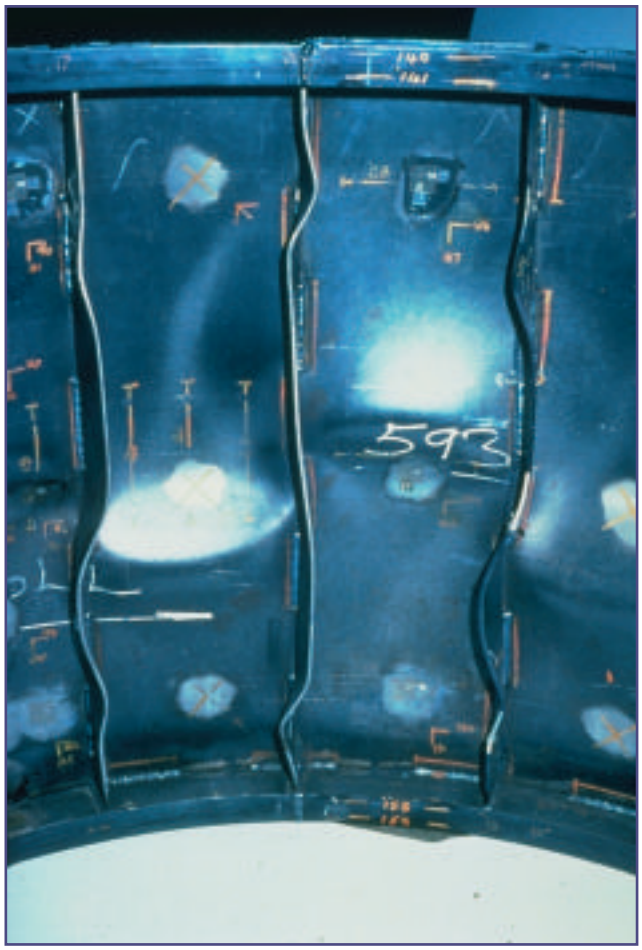
T8c18 Pandeo por compresión de envolvente de depósito



T8c19 Pandeo por compresión de envolvente de depósito



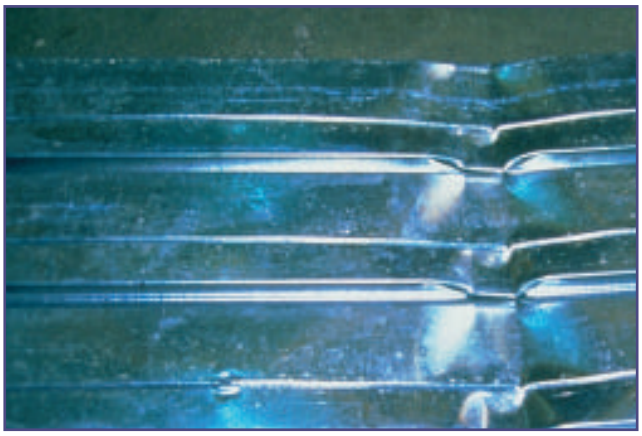
T8c20 Aplastamiento de cilindro por presión hidrostática



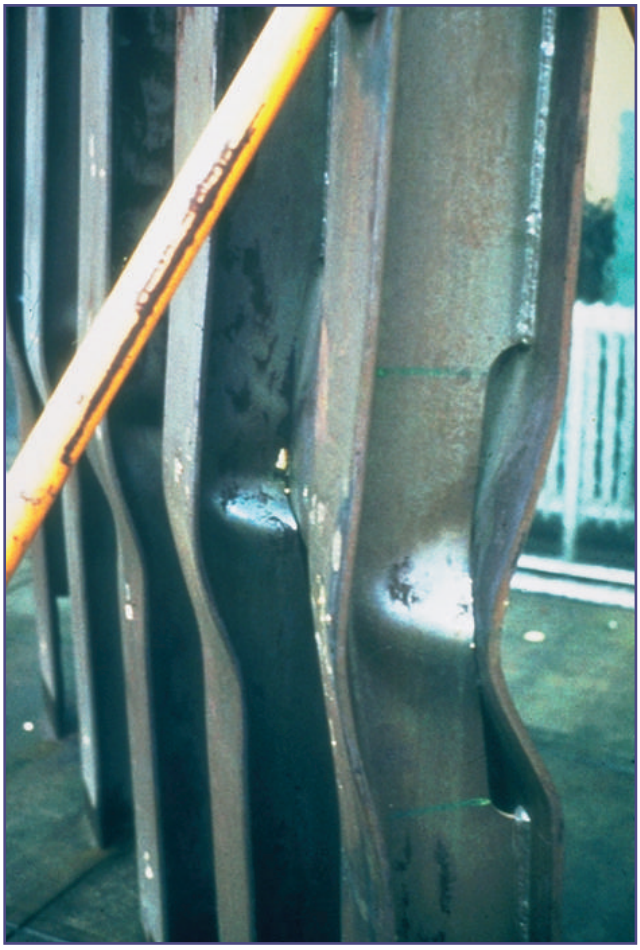
T8c21 Pandeo por compresión de envolvente de depósito



T8c22 Fallo local de sección circular hueca



T8c23 Fallo local de chapa trapecial



T8c24 Pandeo local en viga a la que se le recortó parcialmente el alma