9

Elementos estructurales

Instituto Técnico
de la Estructura
en Acero



ITEA

ÍNDICE DEL TOMO 9

ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.1: Métodos de Análisis de estructuras de acero 1

1 INTRODUCCIÓN 4
2 ANÁLISIS ELÁSTICO GLOBAL 5
3 ANÁLISIS PLÁSTICO GLOBAL 9
4 COMENTARIOS ADICIONALES 13
5 RESUMEN FINAL 14
6 BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL 14

Lección 9.2: Clasificación de secciones transversales 15

1 INTRODUCCIÓN 18
2 CONDICIONES PARA LA CLASIFICACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES 19
3 CRITERIOS PARA LA CLASIFICACIÓN DE SECCIONES 21
4 RESUMEN FINAL 26
5 BIBLIOGRAFÍA 26
APÉNDICE I 27

Problema Resuelto 9.1 (i), (ii) y (iii): Clasificación de secciones transversales 33

PROBLEMA 9.1 (i) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A COMPRESIÓN 36
PROBLEMA 9.1 (ii) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN 38

PROBLEMA 9.1 (iii) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN Y COMPRESIÓN 40

Lección 9.3: Pandeo local 47

1 INTRODUCCIÓN 50
2 DEFINICIÓN DE "ANCHURAS EFECTIVAS" 51
3 CÁLCULO DE LAS BARRAS 52
3.1 Pilares en compresión 52
3.2 Vigas en flexión 53
3.3 Pilares excéntricos 54
4 RESUMEN FINAL 55
5 BIBLIOGRAFÍA 55

Problema Resuelto 9.2: Pandeo local 57

1 PROBLEMA 59
2 HIPÓTESIS 61
3 PROPIEDADES DE LA SECCIÓN BRUTA 62
3.1 Área de la sección A_g 62
3.2 Posición z_g del centroide 62
3.3 Segundo momento de inercia respecto al eje yy 62
3.4 Módulos de la sección 62
4 SECCIÓN EFECTIVA PARA LA COMPRESIÓN AXIAL 63
4.1 Determinación de la clase de la sección 63
4.2 Determinación de las anchuras efectivas 63
4.3 Propiedades de la sección 64
5 SECCIÓN EFECTIVA PARA LA FLEXIÓN 65
5.1 Determinación de la clase de la sección 65
5.2 Determinación de las anchuras efectivas 67
5.3 Propiedades de la sección 68
5.3.1 Área de la sección $A_{eff,M}$ 68
5.3.2 Posición del centroide 68

5.3.3 Segundo momento de inercia en el eje yy 68
5.3.4 Módulo de sección 68
5.4 Posibilidad de seguir mejorando 69

Lección 9.4.1: Elementos sometidos a tracción I 71

1 INTRODUCCIÓN 74
2 COMPORTAMIENTO DE LAS SECCIONES DE LOS ELEMENTOS EN TRACCIÓN 76
2.1 En general 76
2.2 Tensiones residuales 76
2.3 Uniones 77
3 ANÁLISIS 79
3.1 Condiciones de rigidez 79
3.2 Resistencia de la sección 79
3.2.1 Área neta 80
3.2.2 Resistencia de las secciones netas 80
3.2.3 Verificación 81
4 RESUMEN FINAL 83
5 BIBLIOGRAFÍA 83

Problema Resuelto 9.3 (i), (ii) y (iii): Elementos sometidos a tracción I 85

PROBLEMA 9.3 (i) 88
PROBLEMA 9.3 (ii) 91
PROBLEMA 9.3 (iii) 94

Lección 9.4.2: Elementos sometidos a tracción II 97

1 INTRODUCCIÓN 100
2 COMPOSICIÓN DE CABLES 101
3 PROPIEDADES MECÁNICAS 103

4 VALORES DE CÁLCULO 104
5 UNIONES 105
6 COMPORTAMIENTO DEL CABLE 106
7 MÓDULO DE ELASTICIDAD DEBIDO A LA FLECHA 110
8 RESUMEN FINAL 111
9 BIBLIOGRAFÍA 111

Problema Resuelto 9.4 (i), (ii): Elementos sometidos a tracción II 113

PROBLEMA 9.4 (i) 116
PROBLEMA 9.4 (ii) 121

Lección 9.5.1: Pilares I 127

1 INTRODUCCIÓN 130
2 CLASES PRINCIPALES DE ELEMENTOS DE COMPRESIÓN 131
2.1 Elementos simples con sección uniforme 131
2.2 Elementos simples con sección no uniforme 132
2.3 Pilares compuestos 132
3 COMPRESIÓN PURA SIN PANDEO 136
3.1 Pilares gruesos y cortos 136
3.2 Área efectiva 136
4 ESTABILIDAD DE PILARES DE ACERO ESBELTOS 137
4.1 Tensión crítica de Euler 137
4.2 Pandeo de pilares reales 137
5 LAS CURVAS DE PANDEO EUROPEAS 141
5.1 Esbeltez de referencia $\overline{\lambda}$ 141
5.2 Base de las curvas de pandeo de la ECCS 141
5.3 Imperfección inicial de curvatura equivalente 143
5.4 Pasos del cálculo de elementos en compresión 145
6 RESUMEN FINAL 146
7 BIBLIOGRAFÍA 146

Lección 9.5.2: Pilares II 147

1 INTRODUCCIÓN 150
2 FORMULACIÓN ANALÍTICA DE LAS CURVAS DE PANDEO EUROPEAS 151
2.1 Deflexión inicial 151
2.2 Excentricidad de la carga aplicada 151
2.3 La fórmula de Ayrton-Perry 152
2.4 Factor de imperfección generalizado 152
2.5 Formulación europea 153
3 PANDEO POR TORSIÓN Y FLEXO-TORSIÓN 155
3.1 Sección sometida a pandeo por torsión o flexo-torsión 155
3.2 Pandeo por torsión 156
3.3 Pandeo por flexo-torsión 156
4 RESUMEN FINAL 158
5 BIBLIOGRAFÍA 158

Problema Resuelto 9.5 (i), (ii) y (iii): Cálculo de Pilares 159

EJEMPLO 9.5 (I) INFLUENCIA DE LA FORMA DE LA SECCIÓN EN EL PESO DEL PILAR 162
1.1 Consideraciones generales 163
1.2 Pandeo por el eje débil 164
1.3 Pandeo por el eje fuerte 166
1.4 Formas de doble simetría 167
1.5 Conclusión 168
EJEMPLO 9.5 (II) INFLUENCIA DE LA ESBELTEZ EN LA RESISTENCIA PORTANTE DEL PILAR 169
EJEMPLO 9.5 (III) INFLUENCIA DE LA LONGITUD DE PANDEO POR EL EJE FUERTE Y EL EJE DÉBIL SOBRE EL CÁLCULO DEL PILAR 174

Lección 9.6: Pilares compuestos 177

1 INTRODUCCIÓN 180
2 EL EFECTO DE LAS DEFORMACIONES CORTANTES EN LA CARGA ELÁSTICA CRÍTICA DEL PILAR 182

3 EVALUACIÓN DE LA RIGIDEZ AL CIZALLAMIENTO DE LOS PILARES COMPUESTOS ARMADOS A ESCUADRA EN ÁNGULO 185
3.1 Pilares de celosía 185
3.2 Pilares compuestos armados a escuadra 187
3.3 Comparación cuantitativa 188
4 LAS CARGAS ELÁSTICAS CRÍTICAS DE LOS PILARES COMPUESTOS 192
5 CAPACIDAD PORTANTE DE LOS PILARES DE ACERO COMPUESTOS Y LA FILOSOFÍA DE CÁLCULO DEL EUROCÓDIGO 3 193
6 RESUMEN FINAL 197
7 BIBLIOGRAFÍA 197

Problema Resuelto 9.6: Cálculo de pilares compuestos 199

PROBLEMA 9.6 CÁLCULO DE PILARES COMPUESTOS 202
Problema 202
Cálculo de los esfuerzos internos 204
Resistencia al pandeo de los componentes 205

Lección 9.7: Longitudes de pandeo 209

1 INTRODUCCIÓN 212
2 LONGITUD EFECTIVA DE PILARES 213
3 PILARES DE PÓRTICOS SIN FLECHA HORIZONTAL 218
4 PILARES DE PÓRTICOS CON FLECHA HORIZONTAL 221
5 RESUMEN FINAL 222
6 BIBLIOGRAFÍA 222

Problema Resuelto 9.7 (i), (ii) y (iii): Longitudes efectivas 223

PROBLEMA 9.7 (i) CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE PANDEO DE PÓRTICOS SIN FLECHA HORIZONTAL 226
Problema 226
Factores de distribución 226
Longitudes de Pandeo 227

PROBLEMA 9.7 (ii) CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE PANDEO DE PÓRTICOS CON FLECHA HORIZONTAL 229
Problema 229
Factores de distribución 229
Longitudes de pandeo 231
PROBLEMA 9.7 (iii) CÁLCULO DE LAS LONGITUDES EFECTIVAS EN EL PLANO Y FUERA DEL PLANO 233
Problema 233
Factores de distribución 233
Longitudes de pandeo 234

Lección 9.8.1: Vigas arriostradas I 237

1 INTRODUCCIÓN 240
2 TIPOS DE VIGA 241
3 CÁLCULO DE LA FLEXIÓN SIMPLE DE VIGAS 242
4 CÁLCULO DEL CIZALLAMIENTO DE VIGAS 246
5 DEFLEXIONES 248
6 FLEXIÓN DE SECCIONES ASIMÉTRICAS 249
7 FLEXIÓN BIAXIAL 251
8 FLEXIÓN Y TORSIÓN 252
9 RESUMEN FINAL 253
10 BIBLIOGRAFÍA 253

Lección 9.8.2: Vigas arriostradas II 255

1 INTRODUCCIÓN 258
2 COMPORTAMIENTO DE LAS VIGAS DE ACERO EN FLEXIÓN 259
2.1 Vigas determinadas estáticamente 259
2.2 Vigas indeterminadas estáticamente 261
2.3 Flexión de secciones en I 264
2.4 Flexión de secciones monosimétricas 264
3 EFECTO DEL ESFUERZO CORTANTE 266
4 COMPORTAMIENTO PLÁSTICO CON CARGA GENERAL COMBINADA 267

5 RESUMEN FINAL 268
6 BIBLIOGRAFÍA 268

Problema Resuelto 9.8 (i), (ii) y (iii): Vigas arriostradas lateralmente ... 269

PROBLEMA 9.8 (i) 272
Notación 272
Problema 273
PROBLEMA 9.8 (ii) 277
Problema 277
PROBLEMA 9.8 (iii) 281
Problema 281

Lección 9.9.1: Vigas no arriostradas I 285

1 PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE LAS SECCIONES PARA VIGAS 288
2 RESPUESTA DE LAS VIGAS ESBELTAS A LA CARGA VERTICAL 289
3 MODELO FÍSICO SIMPLE 291
4 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA ESTABILIDAD LATERAL 292
5 EL ARRIOSTRAMIENTO COMO MEDIO DE MEJORA DEL COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS 294
6 APLICACIÓN AL CÁLCULO 295
7 EL MÉTODO DEL EUROCÓDIGO 3 297
8 RESUMEN FINAL 300
9 BIBLIOGRAFÍA 300
APÉNDICE: Desviación de λ_{LT} 301

Lección 9.9.2: Vigas no arriostradas II 305

1 INTRODUCCIÓN 308
2 SIGNIFICADO FÍSICO DE LA SOLUCIÓN 311
3 AMPLIACIÓN A OTROS CASOS 313
3.1 Configuración de la carga 313

3.2 Nivel de la carga 313
3.3 Condiciones del apoyo lateral 314
3.4 Vigas continuas 315
3.5 Otras vigas que no sean secciones en I de doble simetría 315
3.6 Vigas arriostradas 316
4 RESUMEN FINAL 317
5 BIBLIOGRAFÍA 317
APÉNDICE 1: ANÁLISIS DEL PANDEO LATERAL CON TORSIÓN 319
APÉNDICE 2: PANDEO DE UNA VIGA CARGADA EN EL CENTRO 323

Problema Resuelto 9.9 (i), (ii) y (iii): Vigas no arriostradas lateralmente 327

PROBLEMA 9.9 (i) 330
PROBLEMA 9.9 (ii) 333
PROBLEMA 9.9 (iii) 337

Lección 9.10.1: Vigas-columna I 341

1 INTRODUCCIÓN 344
2 COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN 345
3 ESTABILIDAD GENERAL 348
4 TRATAMIENTO EN LOS CÓDIGOS DE CÁLCULO 350
5 EFECTO DE LA FORMA DE LOS MOMENTOS PRIMARIOS 352
6 RESUMEN FINAL 353
7 BIBLIOGRAFÍA 353

Lección 9.10.2: Vigas-columna II 355

1 INTRODUCCIÓN 358
2 FORMAS DE COMPORTAMIENTO 359
3 PANDEO POR FLEXOTORSIÓN 361
4 CÁLCULO 362

5 FLEXIÓN BIAXIAL 363
6 CÁLCULO DE LA FLEXIÓN Y COMPRESIÓN BIAXIAL 364
7 CÁLCULO DE SECCIONES QUE NO SEAN DE CLASE 1 O 2 365
8 DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES K 366
9 VERIFICACIÓN DE LA SECCIÓN 368
10 RESUMEN FINAL 369
11 BIBLIOGRAFÍA 369

Lección 9.10.3: Vigas-columna III 371

1 INTRODUCCIÓN 374
2 MÉTODOS PARA VERIFICAR ELEMENTOS AISLADOS 375
2.1 Vigas-columna sólo con flexión monoaxial 375
2.2 Vigas-columna con flexión biaxial 377
3 MÉTODO PARA VERIFICAR PÓRTICOS COMPLETOS 378
3.1 En general 378
3.2 Hipótesis básica 378
3.3 Instrumentos del procedimiento 379
4 RESUMEN FINAL 380
5 BIBLIOGRAFÍA 380

Problema Resuelto 9.10 (i), (ii) y (iii): Vigas columna – Compresión y flexión mono y biaxial 381

PROBLEMA 9.10 (i) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN POR EL EJE DÉBIL DE UNA SECCIÓN H 384
PROBLEMA 9.10 (ii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN POR EL EJE FUERTE DE UNA SECCIÓN H 387
PROBLEMA 9.10 (ii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN H 390

Problema Resuelto 9.11 (i) y (ii): Vigas columna – Compresión y flexión biaxial 393

PROBLEMA 9.11(i) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN BIAXIAL DE UNA SECCIÓN H, MOMENTO NO UNIFORME 396

PROBLEMA 9.11(ii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN BIAXIAL DE UNA SECCIÓN H CON VARIAS FORMAS DE APOYO EN EL SENTIDO FUERTE Y EL DÉBIL 399

Lección 9.11: Pórticos 403

1 INTRODUCCIÓN 406
2 SISTEMAS DE PÓRTICOS 407
3 CONSTRUCCIÓN SIMPLE 408
4 CONSTRUCCIÓN CONTINUA 409
5 MÉTODOS DE ANÁLISIS 410
5.1 Análisis elástico de primer orden 410
5.2 Análisis plástico de primer orden 410
5.3 Carga elástica crítica 410
5.4 Análisis elástico de segundo orden 411
5.5 Análisis rígido-plástico de segundo orden 411
5.6 Primer orden, teoría elasto-plástica 411
5.7 Segundo orden, análisis elasto-plástico 411
5.8 Segundo orden, análisis de la zona plástica 412
6 OBSERVACIONES 413
7 CLASIFICACIÓN DE PÓRTICOS 414
7.1 Pórticos arriostrados 414
7.2 Pórticos sin arriostrar 414
7.3 Pórticos con flecha horizontal 415
8 COMPROBACIÓN DE ELEMENTOS Y CÁLCULO DE PÓRTICOS 418
9 RESUMEN FINAL 421
10 BIBLIOGRAFÍA 421

Lección 9.12: Celosías 423

1 INTRODUCCIÓN A LOS TIPOS Y FINES DE LAS CELOSÍAS 426
2 ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS 429
3 CARGAS EN LAS CELOSÍAS 430

4 ANÁLISIS DE LAS CELOSÍAS 431
4.1 En general 431
4.2 Tensiones secundarias de las celosías 431
4.3 Análisis elástico riguroso 433
5 CONSIDERACIONES SECUNDARIAS 434
5.1 Celosías arriostradas en cruz para edificios 434
5.2 Arriostramiento lateral para puentes 434
5.3 Deflexión de las celosías 435
6 CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA CELOSÍA 436
6.1 Elementos de compresión en edificios 436
6.2 Elementos de compresión en puentes 437
6.3 Elementos de tracción en edificios 438
6.4 Elementos de tracción en puentes 438
6.5 Elementos expuestos a inversión de la carga 438
7 NOTAS ÚTILES PARA EL CÁLCULO 439
8 RESUMEN FINAL 440

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.1: Métodos de Análisis de estructuras de acero

OBJETIVO/CONTENIDO

Introducir métodos de análisis global y relacionarlos con las hipótesis sobre el comportamiento de los materiales y los efectos de las deformaciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Mecánica elemental de materiales.

Análisis elemental de estructuras.

Elementos de cálculo plástico.

Comportamiento elástico y elastoplástico de los materiales.

LECCIONES AFINES

Lección 9.2: Clasificación de secciones transversales

Lección 9.8.1: Vigas arriostradas 1

Lección 9.11: Pórticos

Lecciones del Tomo 16

RESUMEN

El reparto de las fuerzas internas de las estructuras se determina mediante un análisis plástico global. Se puede aplicar una teoría del primer o segundo orden según el tipo de estructura. Estos conceptos se examinan brevemente y se hacen observaciones en términos generales sobre la práctica de proyectos.

1. INTRODUCCIÓN

La verificación de la resistencia de las secciones, la estabilidad de las barras de la estructura o de los perfiles que las componen, y quizá la fatiga, exigen conocer de antemano el reparto de las fuerzas internas en la estructura; de aquí se puede deducir el reparto de las tensiones en cualquier sección que se requiera. La expresión “fuerzas internas” (o también “fuerzas en las barras”) designa generalmente y se refiere a las fuerzas axiales, fuerzas cortantes, momentos de flexión, momentos de torsión, etc.

Las fuerzas internas de una estructura estáticamente determinada se pueden hallar basándose sólo en la estática. En una estructura estáticamente indeterminada las ecuaciones de equilibrio estático no bastan para resolverlas; hace falta también conocer algo de las condiciones geométricas bajo carga. En esta fase importa entender las diferencias fundamentales entre estructura determinada e indeterminadamente estática (hiperestática). las fuerzas internas de una estructura se pueden determinar, bien por análisis elástico o plástico global. Aunque el análisis elástico global puede usarse en todos los casos, el análisis plástico global sólo sirve cuando la sección de las barras y el acero satisfacen determinadas condiciones.

Las fuerzas internas se pueden hallar mediante distintos métodos, según se pueda despreciar o no el efecto de las deformaciones en la estructura. En la teoría de primer orden, se realizan los cómputos referidos solamente a la geometría inicial de la estructura; en tal caso las deformaciones son tan pequeñas que los desplazamientos resultantes afectan poco a la geometría de la estructura y por ello tampoco varían grandemente las fuerzas que actúan en las barras. La teoría de segundo orden toma en cuenta la influencia de la deformación de la estructura, y por tanto, debe hacerse referencia a la geometría deformada bajo carga. La teoría de primer orden puede servir, por ejemplo, para el análisis global en los casos en que la estructura está debidamente arriostrada, impedida la deformación horizontal, o si los métodos de cálculo prevén indirectamente los efectos de segundo orden. La teoría de segundo orden sirve para todos los casos sin restricciones.

Cuando se puede aplicar la teoría de primer orden, el comportamiento de la estructura hecha con un material que obedezca la ley de Hooke, es lineal por sí mismo; los desplazamientos –de traslación o rotación de cualquier perfil– varían linealmente con las fuerzas aplicadas; o sea, todo aumento del desplazamiento es proporcional a la fuerza que lo causa. En tales condiciones, se pueden sumar por el principio de superposición las tensiones, deformaciones, fuerzas internas y desplazamientos debidos a distintas acciones. De hecho este principio dice que los desplazamientos (fuerzas internas) debidos a varias cargas actuando simultáneamente son iguales a la suma de los desplazamientos (fuerzas internas) debidos a la acción de cada carga por separado. Esto no se aplica si la relación tensión-deformación del material no es lineal, o si la estructura (aunque esté hecha con material que obedezca la ley de Hooke) no se comporta linealmente debido a los cambios de geometría causados por las cargas aplicadas.

El principio de superposición, si puede aplicarse, es especialmente útil para determinar la condición más desfavorable de cada barra de una estructura estática indeterminada; la acción recíproca entre distintas partes de la estructura dificulta saber cuál es la carga exacta que produce la condición crítica en el cálculo.

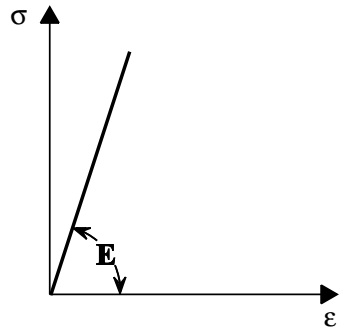
En la práctica, el análisis plástico global se emplea generalmente para estudiar la eficacia de servicio de la estructura; es decir, los estados límites pasados los cuales los criterios de servicio especificados dejan de cumplirse. El análisis plástico global tiene utilidad particular para investigar los estados causantes de un colapso real de la estructura y para hallar la resistencia a la rotura, o los estados límites máximos.

2. ANÁLISIS ELÁSTICO GLOBAL

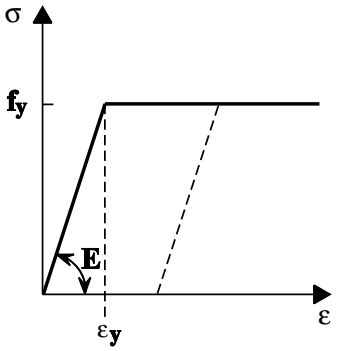
El análisis elástico global supone que el comportamiento de la estructura es elástico, y consiguientemente el del material. Se funda en la hipótesis de que la deformación del material en carga es lineal, sea cual sea la tensión; así, se supone que la deformación es proporcional a la tensión, o sea, que el material obedece la ley de Hooke con todas las cargas (Figura 1). Evidentemente deben considerarse las propiedades verdaderas del material, especialmente la tensión de fluencia, y posiblemente la resistencia, cuando se estudia si las fuerzas internas exceden o no de la resistencia de las secciones y las barras.

Ya se ha dicho que en el análisis elástico global de estructuras determinadas estáticamente, las fuerzas internas se hallan sólo con las ecuaciones de equilibrio estático. En la construcción continua (estructuras estáticamente indeterminadas), las fuerzas de las barras deben cumplir las condiciones de equilibrio y producir deformaciones compatibles con la continuidad elástica de la estructura y con las condiciones de apoyo. Las ecuaciones de equilibrio no bastan para hallar fuerzas desconocidas y necesitan el suplemento de relaciones geométricas simples entre las deformaciones de la estructura. Estas relaciones se denominan condiciones de compatibilidad porque aseguran que sean compatibles las deformaciones geométricas de la estructura deformada.

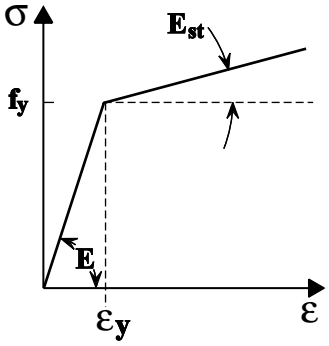
También se requiere que los tipos de unión elegidos sean capaces de mantener, prácticamente sin cambios, el ángulo inicial entre las barras unidas, es decir, se presume que las uniones son rígidas.



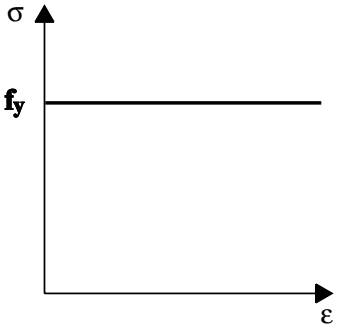
(a) Lineal elástico



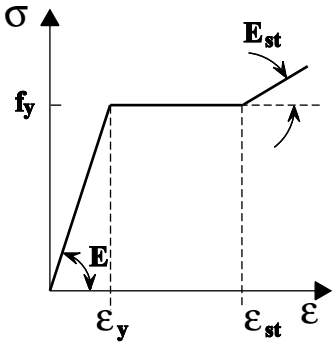
(b) Lineal elástico Perfectamente plástico



(d) Lineal elástico-plástico con endurecimiento por deformación



(c) Perfectamente plástico



(e) Trilineal

Figuras 1a-1e σ–ε Diagramas

Cuando se pueda aplicar la teoría de primer orden, las condiciones de equilibrio y compatibilidad se expresan con referencia a la configuración inicial de la estructura (sin deformación).

Las tensiones resultantes y los componentes de la reacción se pueden hallar mediante dos métodos generales. El primero es el método de flexibilidad, en el que se liberan fuerzas para que la estructura sea estáticamente determinada; las incógnitas son las fuerzas. Estas se hallan asumiendo que la estructura liberada experimenta deformaciones irregulares que se corrigen aplicando las fuerzas adicionales que convenga (Figura 2a).

El segundo planteamiento es el método de rigidez, en el que se restringe la deformación para impedir el movimiento de las uniones, determinándose las fuerzas necesarias para originar la restricción; entonces se permite que se produzcan desplazamientos en las uniones hasta que hayan desaparecido las restricciones ficticias. Una vez que se conocen los desplazamientos, se hallan las fuerzas presentes en la estructura por superposición de los efectos de los desplazamientos separados (Figura 2b).

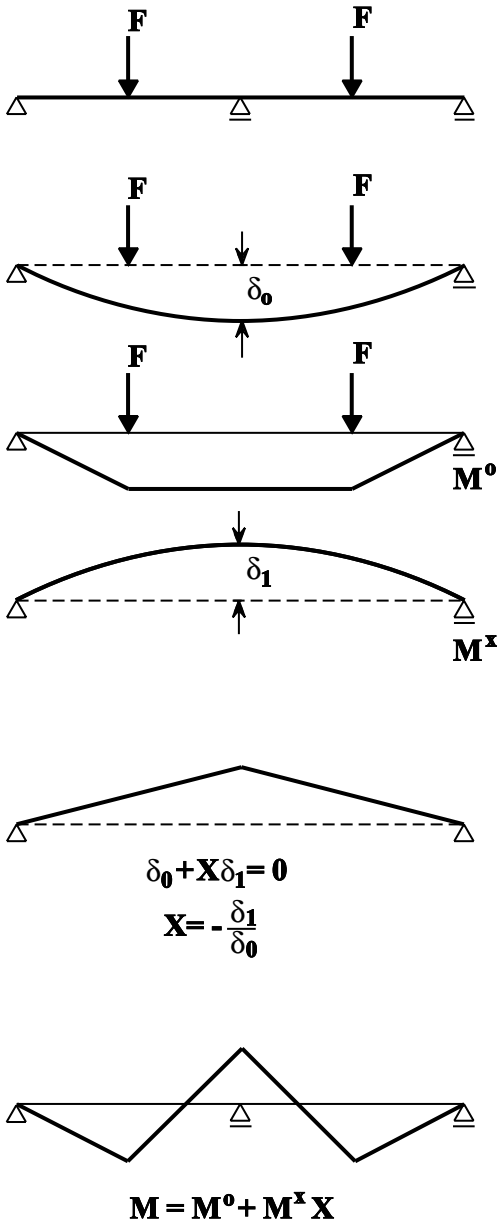


Figura 2a Ejemplos de aplicación de la flexibilidad

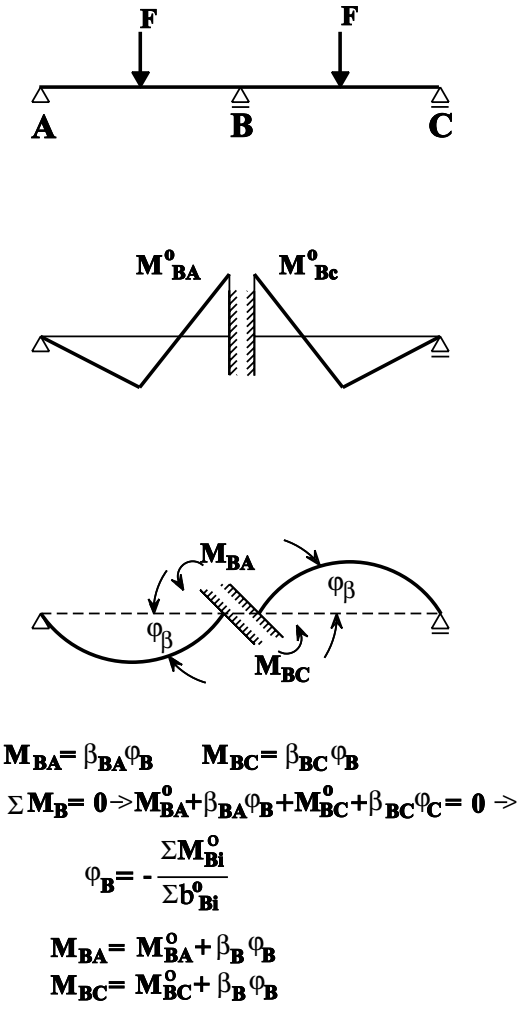


Figura 2b Ejemplos de aplicación del método de la rigidez

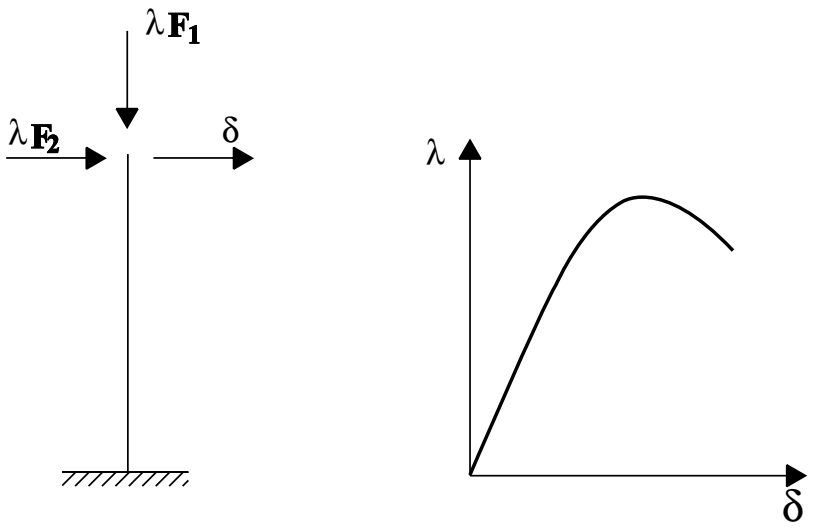


Figura 3 Ejemplo de la teoría de segundo orden

La estructura se puede analizar bien por el método de fuerzas o por el de desplazamiento. La solución en el método de fuerzas estriba en hallar las fuerzas necesarias para restaurar la regularidad de la geometría; el análisis consiste en despejar varias ecuaciones simultáneas, tantas como fuerzas desconocidas, que son las que hay que liberar para hacer la estructura estáticamente determinada. En el método de desplazamiento las incógnitas son los posibles desplazamientos y rotaciones de las uniones. El número de fuerzas de restricción que se añadan a la estructura es igual al número de desplazamientos posibles de las uniones, e igualmente, el análisis se hace despejando un sistema de ecuaciones.

Cuando sea necesario contar con los efectos de segundo orden (alinealidad geométrica), se aplicará la teoría de segundo orden consistente en cálculos iterativos. Como en este caso no se permite el principio de superposición, debe acudirse a un reparto de cargas especificado, que se incrementa por pasos mediante un multiplicador de carga (Figura 3). Se escogen incrementos tan pequeños que permitan suponer un comportamiento lineal durante este aumento de la carga. La configuración deformada que se obtiene al acabar cada aumento especificado de la carga es la geometría de referencia para el siguiente paso; así pues, la teoría elástica de segundo orden consiste en resolver una sucesión de análisis de primer orden de una estructura cuya geometría cambia en cada paso con respecto a los anteriores. Estos cálculos pronto se hacen inmanejables a mano y se necesitan los oportunos

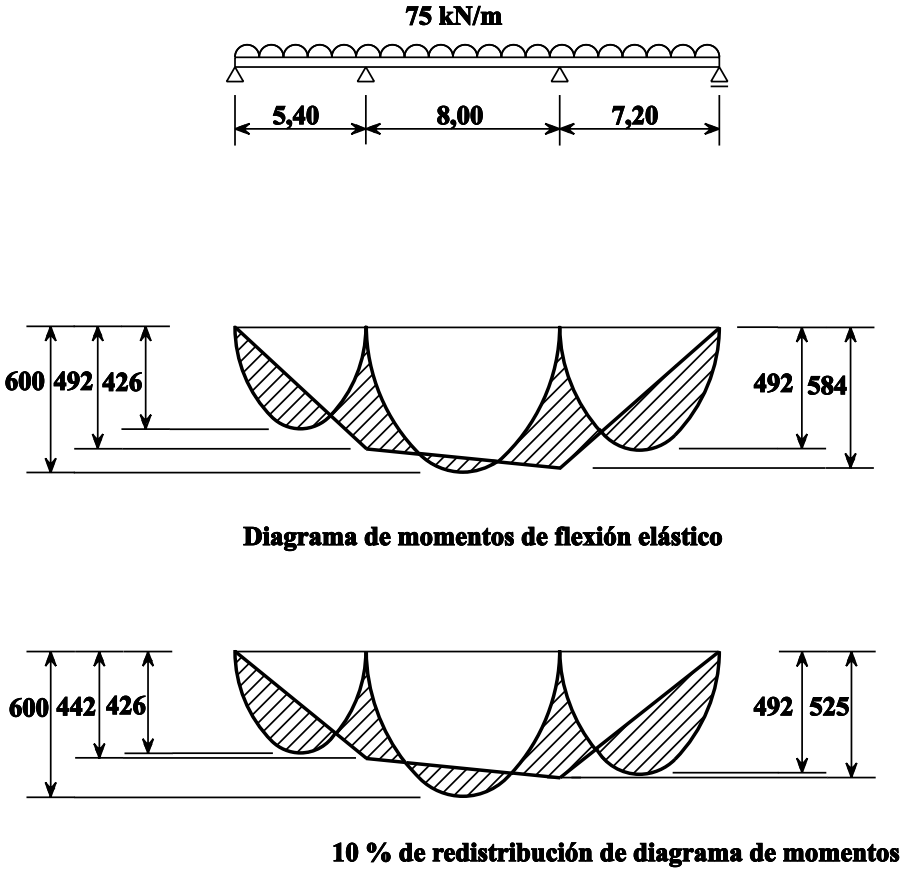


Figura 4 Redistribución del diagrama de momentos

programas informáticos. Estos programas suelen fundarse en el método de rigidez –llamado de desplazamiento– por ser más fácil definir la estructura determinada cinemáticamente, que sirve de geometría de referencia.

Casi todos los códigos y normas permiten hallar las fuerzas en las barras de las estructuras de geometría regular no lineal mediante análisis elástico que luego se amplía, si es necesario, para incluir los efectos de la inestabilidad. Este planteamiento parece incompatible con el rigor teórico al no ser aplicable el principio de superposición, pero ofrece al calculista la posibilidad de valerse de programas normalizados de análisis de pórticos, o sea, elásticos lineales, al menos en el anteproyecto.

Los códigos y normas permiten en ciertas circunstancias una redistribución limitada de los momentos. Es decir, se puede modificar el diagrama del momento elástico de un 5 a un 15% del pico del momento elástico, siempre que los momentos y cortantes que resulten del cálculo permanezcan en equilibrio con las cargas exteriores aplicadas (Figura 4). Por lo tanto, aunque se mantenga de hecho el equilibrio, se viola un tanto la compatibilidad elástica de la estructura. Puede pensarse que este concepto de redistribución de momentos es un reconocimiento muy limitado del potencial que existe dentro de las estructuras indeterminadas estáticamente para soportar cargas superiores a las que requiere la plena resistencia a la flexión de las barras sólo en el punto más crítico. Se llama la atención sobre el hecho de que esto sólo es posible si no se descarga después de alcanzarse la máxima resistencia local; por lo tanto se requiere cierta ductilidad en el comportamiento de la sección transversal, que explica el motivo para limitar el proceso a los perfiles compactos (Ver Lección 9.2).

Se hace hincapié en que puede mantenerse la hipótesis de comportamiento de carga-deformación lineal tanto en el análisis elástico de primer orden como en el de segundo orden, incluso cuando la resistencia de la sección es resistencia plástica (ver Lección 9.2).

3. ANÁLISIS PLÁSTICO GLOBAL

El comportamiento carga-deformación del acero no es infinitamente lineal. La Figura 1b representa la relación tensión-deformación de un material ideal perfectamente elástico; se sigue que la ley de Hooke se limita al campo de tensiones $\sigma \leq f_y$, f_y, que es la tensión de fluencia del material. Más allá, el material cede plásticamente a una tensión constante de $\sigma = f_y$. Si la tensión se reduce en algún punto del campo plástico, el camino de vuelta es una línea recta paralela a la ley de Hooke, cuya inclinación es el módulo de elasticidad E. Tanto E como f_y, y toda la relación tensión-deformación, se suponen los iguales en tracción y en compresión.

La relación tensión-deformación ideal, aunque sólo sea un modelo matemático, se acerca mucho a la conducta del acero dulce estructural, y es también una aproximación razonable a muchos materiales continuamente endurecidos por deformación que se utilizan en ingeniería de estructuras. Suponer una plasticidad perfecta después de llegar a la tensión de fluencia, equivale a despreciar los efectos del endurecimiento por deformación y está del lado de la seguridad.

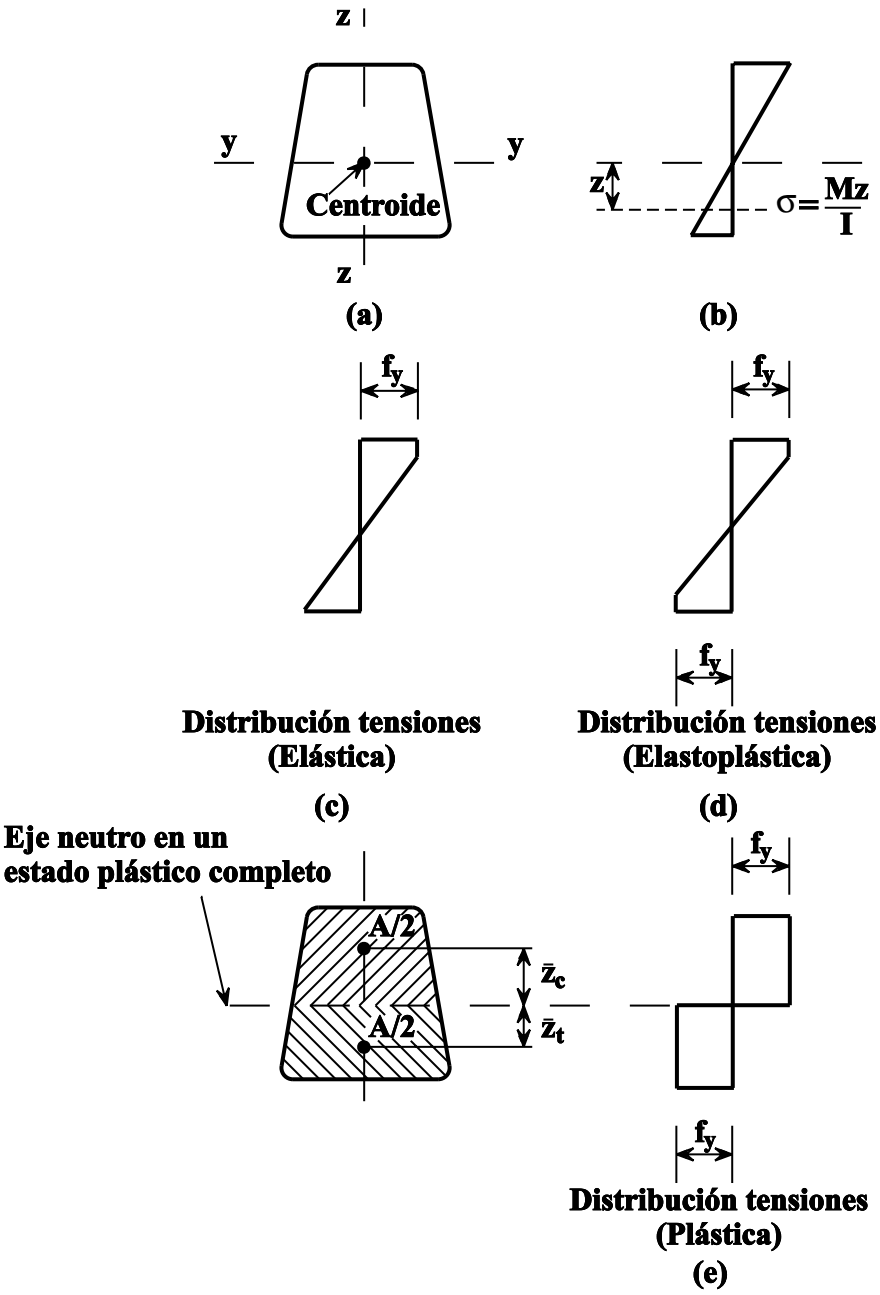


Figura 5 Distribución de tensiones en una sección debido a un momento flector

Veamos una sección con área A que tenga eje de simetría y experimente una flexión en el plano de simetría (Figura 5). Si el momento de flexión es pequeño, la tensión y la deformación varían linealmente a través de la anchura. Al aumentar el momento, la tensión de fluencia llega a una de las fibras superiores, y al aumentarlo más, la tensión de fluencia también llega a la fibra inferior. Si sigue aumentando el momento de flexión, la fluencia se extiende desde las fibras exteriores hacia dentro hasta que se encuentran las dos zonas de fluencia; en este estado se dice que la sección es totalmente plástica. El valor del momento máximo, llamado momento plástico, se deduce de las condi-

ciones de equilibrio. Puesto que no hay fuerza axial, el eje neutro de la sección transversal la divide en dos áreas iguales A/2; la tracción y compresión resultantes son iguales y forman un par igual al momento máximo, o de agotamiento:

$$M_{pl} = 0,5\, A\, f_y \left(\overline{z_c} + \overline{z_t}\right) \qquad (1)$$

siendo $\overline{z}_c$ y $\overline{z}_t$, respectivamente, la distancia del centroide de la zona de tensión y compresión respecto al eje neutro, en estado plenamente plástico. En una sección de doble simetría, las distancias $\overline{z}_c$ y $\overline{z}_t$ son iguales, así que $0,5\, A\overline{z}$ es el primer momento del área S (alrededor del eje de flexión) de media sección, y el momento de agotamiento es:

$$M_{pl} = 2\, S\, f_y \qquad (2a)$$

$$= W_{pl}\, f_y \qquad (2b)$$

siendo $W_{pl} = 2\, S$ el módulo de la sección plástica para flexionarse alrededor del eje en cuestión.

El momento flector máximo que dicha sección puede soportar sin superar nunca la tensión de fluencia es:

$$M_{el} = W_{el}\, f_y \qquad (3)$$

siendo W_{el} el módulo de la sección elástica alrededor del mismo eje; el relativo aumento de resistencia que se obtiene permitiendo la fluencia total de la sección se mide por el factor de forma:

$$\alpha = M_{pl} / M_{el} = W_{pl} / W_{el} \qquad (4)$$

que, por ejemplo, es igual a 1,5 en una sección rectangular, a 1,7 en una sección circular maciza, y varía de 1,12 a 1,18 en perfiles en I, H y U flexionados alrededor de su eje principal “yy”.

Al aumentar la carga sobre una estructura se produce fluencia en algunos puntos y experimenta deformaciones elastoplásticas. Al seguir aumentando la carga la estructura alcanza un estado totalmente plástico en el que se forma un número de secciones plenamente plásticas suficiente para transformar la estructura en un mecanismo plástico (Figura 6); este mecanismo se colapsa si se sigue cargando. Hay que estudiar el mecanismo de colapso y conocer la magnitud de la carga que lo ocasiona para hallar el factor de carga en el análisis. O también, si el factor de carga está especificado, puede calcularse la estructura de modo que la carga de colapso sea igual o mayor que el producto del factor de carga por la carga de servicio de referencia. El análisis plástico supone, por tanto, además del reparto de tensiones plásticas dentro de la sección (formación de rótulas plásticas), también una redistribución del momento flector suficiente para que se desarrollen todas las rótulas plásticas que hacen falta para que tenga lugar el mecanismo plástico.

Cuando se forma fluencia en una sección, su valor efectivo de rigidez a la flexión, EI, desciende paulatinamente (Figura 7); de hecho, el módulo efectivo del material fluido es cero cuando se presume un comportamiento perfectamente plástico más allá de la fluencia, y de ahí el término de rótula plástica. Una vez que se produce esta rótula, la estructura se comporta, bajo carga adicional, como

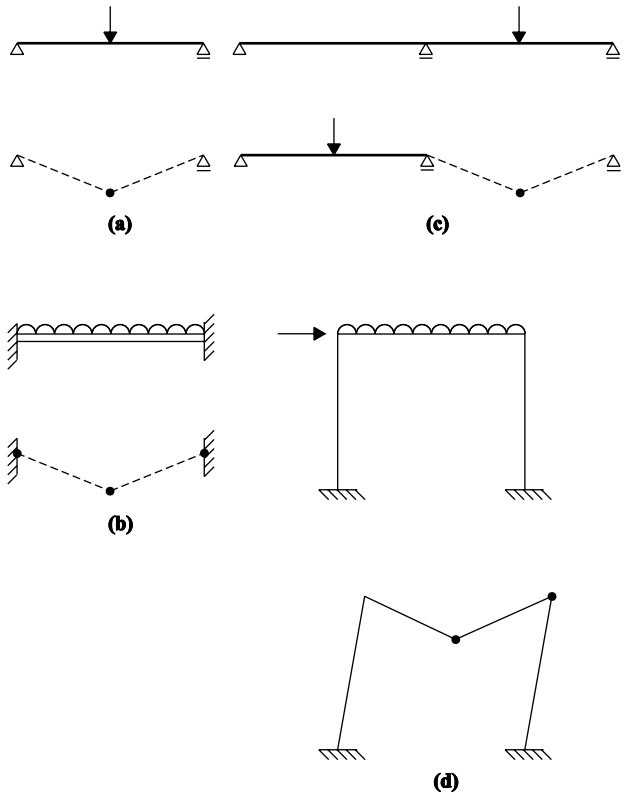


Figura 6 Posibles mecanismos plásticos

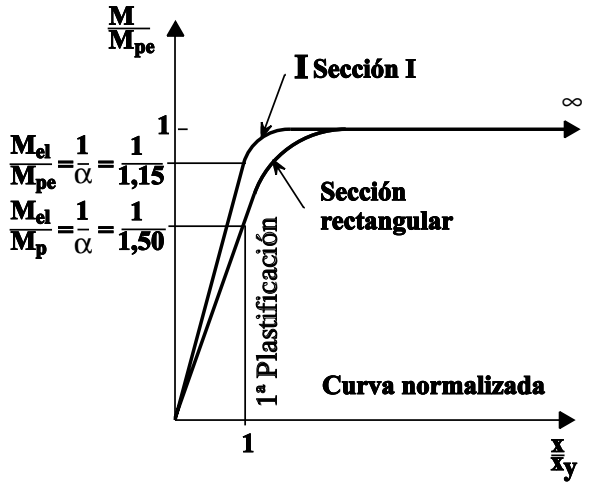


Figura 7 Diagrama momento-curvatura para distintas secciones transversales

si se hubiese introducido una rótula real en la sección fluida. La aparición de la primera rótula plástica en la estructura ocasiona la reducción de la hiperestaticidad inicial en un grado; cada rótula plástica adicional tiene el mismo efecto.

El colapso se produce cuando se han formado las suficientes rótulas plásticas para que la estructura hiperestática inicial se haga paulatinamente menos hiperestática, y finalmente, se convierta en un mecanismo.

En una estructura estáticamente determinada, la ganancia de resistencia debida a la plasticidad depende del valor del factor forma. En la estructura estáticamente indeterminada le afecta el proceso de redistribución del momento.

Para que una estructura pueda redistribuir tensiones dentro de la sección y entre secciones, no debe ocurrir ninguna otra forma de fallo antes del mecanismo de colapso para que pueda llegar a la carga límite. Para que se permita el análisis plástico deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. Que el acero tenga una ductilidad adecuada para que pueda desarrollarse la resistencia plástica de los perfiles (Figura 1b-e).
2. Que una vez formada la rótula plástica, sea capaz de girar a un momento bastante constante de M_p (Figura 7),
3. Que la rótula plástica tenga la suficiente capacidad rotatoria, sin pandeo local ni lateral, para permitir la formación del mecanismo de colapso y la correspondiente redistribución de momentos (Figura 7).
4. Que la carga de la estructura sea predominantemente estática para que un ciclo de fatiga corto (sacudida) no ocasione un fallo.

Para cumplir estas condiciones, hay que poner límites al tipo de acero y a las proporciones de las barras y secciones transversales. Actualmente se permite el cálculo plástico para las clases corrientes de acero dulce, mientras que para otras clases se requiere una longitud mínima de la parte horizontal del diagrama de fluencia y una relación mínima entre la resistencia máxima a la tracción y la tensión de fluencia (endurecimiento por deformación). Las proporciones del ala y el alma de las barras que tengan rótulas plásticas deben sujetarse a ciertos límites, que son más estrictos para aceros de clase más alta. Como la fluencia reduce mucho la rigidez, las barras que tienen rótulas plásticas son especialmente proclives a ser inestables; por lo tanto, los límites de esbeltez de tales elementos estructurales es muy estricto y obliga a arriostrarlos lateralmente, sobre todo donde están las rótulas plásticas.

Lo anterior supone que la resistencia a la rotura por flexión de un perfil se define solamente por su momento plástico; sin embargo, la carga axial y la fuerza de cizalla también tienen un efecto, como se ha dicho en el apartado 9.8.1.

En una estructura sometida a cargas especificadas cuya magnitud aumenta hasta la rotura, le secuencia de formación de rótulas es fija. No obstante, factores tales como el asentamiento, variación de la resistencia del material de las barras, tensiones residuales, efectos térmicos, etc., pueden cambiar la secuencia, pero no lo bastante para afectara la carga de colapso plástico; éste es de hecho estáticamente determinado y no depende de imperfecciones estructurales de ningún tipo.

El análisis plástico se funda en la conducta alineal del material, incluso si los efectos de segundo orden son despreciables. Los métodos

de análisis a mano se valen de los teoremas fundamentales del cálculo plástico, que suelen despreciar las curvaturas elásticas respecto a las plásticas, y concentran las deformaciones plásticas donde hay rótulas plásticas; sus métodos son por lo tanto rígido-plásticos (Figura 1c). Informar a este respecto se sale del ámbito de esta lección y el lector encontrará esta materia tratada en la bibliografía del apartado 6. Los métodos informáticos dependen menos de idealizaciones y son así más realistas en cuanto a las curvaturas y deformaciones causadas por la relación tensión-deformación del material. Estos métodos se llaman elastoplásticos y se distinguen del método plástico perfecto, caracterizado por un parte horizontal de la curva de fluencia infinita (Figura 1c) por la leve pendiente de la zona de fluencia (Figura 1d) o por el campo de deformación-endurecimiento que sigue a la parte horizontal de la curva de longitud limitada (Figura 1e). O bien se pueden adoptar relaciones aún más precisas; los refinados programas de elementos finitos actuales permiten extender la fluencia y se valen del concepto de zonas plásticas en vez del de rótulas plásticas.

El análisis plástico de segundo orden requiere en general trabajar con programas informáticos; pero la carga de colapso de pórticos arriostrados de varias plantas se puede hallar con las fórmulas de Merchant-Rankine que tienen en cuenta de manera muy sencilla la acción recíproca del pandeo elástico y la fluencia.

Conviene destacar que por ser el análisis plástico esencialmente alineal, el principio de superposición no es aplicable.

4. COMENTARIOS ADICIONALES

Debe observarse que las hipótesis hechas en el análisis global deben armonizar con la conducta prevista de las uniones. Las presunciones hechas en el cálculo de las barras también deben coincidir con el método del análisis global (o ser moderadas respecto al mismo) y la conducta prevista de las uniones. En las lecciones dedicadas al cálculo de uniones se trata este asunto con más detalle.

Los códigos y normas en vigor exigen que el análisis global incorpore la previsión de tensiones residuales e imperfecciones geométricas, como falta de verticalidad, falta de rectitud, falta de ajuste y las pequeñas excentricidades inevitables que existen en la uniones reales. Pueden aplicarse imperfecciones geométricas apropiadas con valores que reflejan todos los tipos de imperfección (Figura 8).

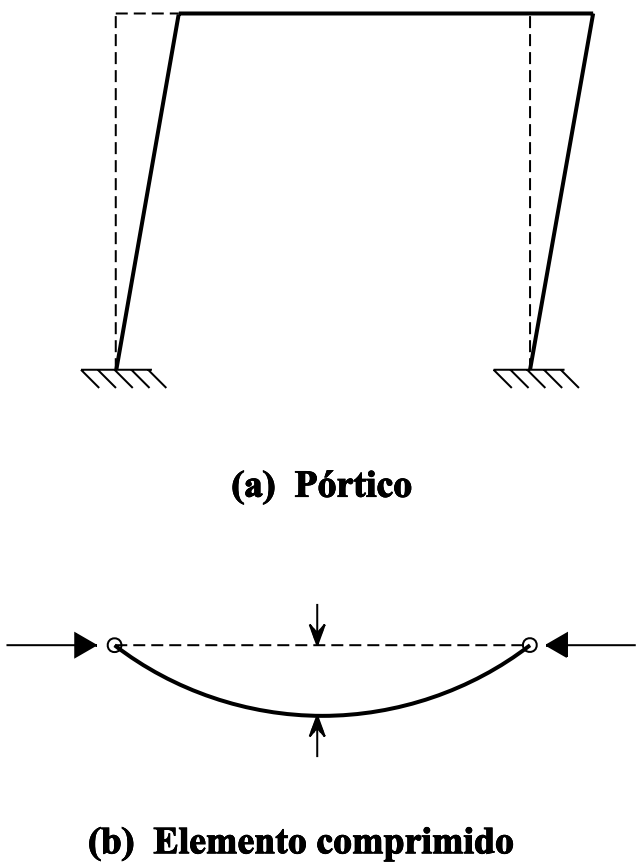


Figura 8 Perfecciones iniciales

5. RESUMEN FINAL

1. Las fuerzas internas de una estructura se pueden hallar con arreglo a un análisis global elástico o plástico.
2. El análisis global suele hacerse según la teoría de primer orden que hace referencia a la geometría inicial de la estructura. La teoría de segundo orden, que expresa el equilibrio y la compatibilidad con respecto a la geometría deflectada de la estructura, es necesaria cuando los efectos de la flecha horizontal no son despreciables.
3. El análisis elástico global supone que el material obedece la ley de Hooke en todo el campo de carga; por lo tanto, la resistencia de un perfil viene regida por la primera aparición de fluencia.
4. El análisis plástico global tiene en cuenta la redistribución de las tensiones directas dentro de las secciones transversales y entre ellas, que resulta en la formación de rótulas plásticas hasta que ocurre el mecanismo de colapso.
5. Se permite el análisis plástico global siempre que las propiedades del material y las proporciones de las barras cumplan los límites y condiciones correspondientes.
6. El análisis elástico global se suele utilizar cuando la conducta de la estructura depende de criterios de servicio eficaz; el análisis plástico global es generalmente apropiado para calcular el estado límite máximo.
7. Sea cual sea el tipo de análisis global, debe armonizar con el comportamiento previsto de las uniones e incorporar las imperfecciones estructurales y geométricas especificadas por los códigos y normas sobre la materia.

6. BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

1. BAKER, J.F., HORNE, M.R. y HEYMAN, J; “The Steel Skeleton: 2.Plastic Behaviour and Design”, Cambridge University Press, 1956, 408pp.

2. BAKER, J.F. y HEYMAN, J; “Plastic Design of Frames: 1.Fundamentals”, Cambridge University Press, 1969, 228pp.

3. LESCOUARC’H, Y.; “Calcul en Plasticité des Structures”, Edit. COTECO, Paris, 1983.

4. ROIK, K.; “Vorlesungen über Stahlbau”, E. ERNST und Sohn, Berlin, 1978.

5. PETERSEN, Chr.; “Static und Stabilität der Baukonstruktionen”, Vieweg Verlog, Braunschweig, 1981.

6. BROHN, D.; “Understanding Structural Analysis”, Blackwells Publications Limited, Oxford, 2nd Ed. 1990.

7. DOWLING, P. J., KNOWLES, P. R. y OWENS, G. W.; Structural Steel Design, Butterworths, 1988.

8. COATES, R. C., COUTIE, M. G. y KONG, F. K.; Structural Analysis, Thomas Nelson & Sons, Londres, 1972.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.2: Clasificación de secciones transversales

OBJETIVO

Describir la clasificación de las secciones transversales y explicar por qué rigen la aplicación de los métodos de análisis del Eurocódigo 3.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 9.1: Métodos de Análisis de estructuras de acero

PROBLEMAS RELACIONADOS RESUELTOS

Lección 9.3: Pandeo local

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Pilares

Lecciones 9.8.1 y 9.8.2: Vigas empotradas

Lecciones 9.9.1 y 9.9.2: Vigas libres

Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Vigas-Pilares

Lección 9.11: Pórticos

Lección 16.9: Edificios sencillos de varias plantas sin deformación lateral

PROBLEMAS RELACIONADOS RESUELTOS

Problema resuelto 9.1: Clasificación de secciones transversales

RESUMEN

Los métodos de análisis aplicados dependen primordialmente de la geometría de la sección, sobre todo de la relación anchura-espesor de los elementos que la forman.

Esta lección describe la clasificación de las secciones en plásticas, compactas y semicompactas y expone las proporciones límite de los elementos por las que se hace la clasificación.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando proyecta una estructura y sus partes, el proyectista debe elegir un modelo estructural conveniente. La elección de modelo afecta a:

- el análisis de la estructura, cuyo fin es conocer las tensiones resultantes (esfuerzos internos y momentos), y
- calcular la resistencia de las secciones.

Así, el modelo consiste en un método de análisis combinado con un método de cálculo de la resistencia de las secciones.

Hay varias combinaciones posibles de métodos de análisis y de cálculo de las secciones, para hallar el estado límite último, que pueden ser de orden elástico o plástico, y cuyas posibles combinaciones se relacionan en la Tabla 1.

pero sin suficiente capacidad rotatoria para que se forme el mecanismo plástico, el estado límite último se referirá a la aparición de la primera rótula plástica. Así, en el modelo II, se hallan los esfuerzos internos mediante un análisis elástico y se comparan con la capacidad plástica de las secciones correspondientes. La aparición de la primera rótula plástica en un sistema estáticamente determinado produce un mecanismo plástico, y el método I y el II deben dar así el mismo resultado. En las estructuras estáticamente indeterminadas, el modelo II, al contrario que el modelo I, no permite redistribuir los momentos.

Cuando las secciones de una estructura no puedan alcanzar su capacidad plástica, el análisis así como el cálculo de las secciones deben hacerse elásticamente. el estado límite máximo, según el modelo III, se alcanza cuando se produce fluencia de la fibra más tensionada. A veces ni siquiera se puede lograr la fluencia de

Modelo	Método de análisis global (cálculo de esfuerzos internos y momentos)	Cálculo de resistencia de la sección de la pieza
I	Plástico	Plástico
II	Elástico	Plástico
III	Elástico	Elástico
IV	Elástico	Pandeo elástico de la chapa

Tabla 1 Cálculo del estado límite último - Definición de modelos de cálculo

El modelo I se refiere al cálculo plástico de estructuras. Dentro de una sección se puede originar plasticidad total, es decir, un reparto de tensiones correspondiente a un bloque plenamente rectangular en el que pueden formarse rótulas plásticas, cuyas características de momento de rotación les confiere la suficiente capacidad rotatoria para que se forme un mecanismo plástico a resultas de la redistribución de momentos en la estructura.

En una estructura compuesta de secciones que pueden alcanzar resistencia plástica, las fibras extremas debido al pandeo prematuro de la chapa de un elemento de la sección; en estos casos, se aplicará el estado límite último antedicho únicamente a las secciones efectivas (modelo IV).

Obviamente no es posible tener un modelo que combine el análisis por el método plástico y el cálculo elástico de las secciones. De hecho, la redistribución de momentos que requiere el análisis plástico no puede suceder sin que algunas secciones estén en plena fluencia.

2. CONDICIONES PARA LA CLASIFICACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES

En el apartado anterior se definen los modelos en términos de criterios de cálculo de estructuras, que viene regido por condiciones relacionadas con problemas de estabilidad. Puede haber redistribución plástica entre secciones y dentro de ellas, siempre que no ocurra un pandeo local prematuro, ya que ello ocasionaría una pérdida de capacidad portante.

Ha de garantizarse que no haya inestabilidad local antes de que la sección adquiera resistencia a la flexión, bien elástica (modelo III) o plástica (modelo II), o se forme un mecanismo plástico completo (modelo I).

Tal mecanismo, que prevé el modelo I, puede ocurrir si la rótula plástica, una vez formada, tiene suficiente capacidad rotatoria para que se forme.

Para que haya suficiente capacidad de rotación, las fibras extremas deben poder soportar mucha deformación sin pérdida de resistencia. Las clases de acero corriente tienen la ductilidad necesaria en tensión para permitir la deformación tensional deseada; ni hay que temer que pierdan resistencia antes de llegar al límite de rotura por tracción. Pero con tensiones comparables, no se trata tanto de la ductilidad del material como de la capacidad para soportarlas sin que se produzca inestabilidad.

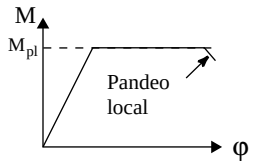
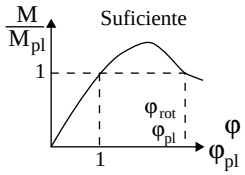
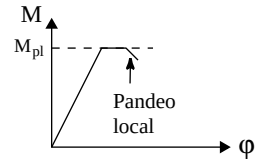
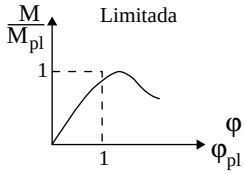
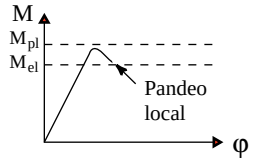
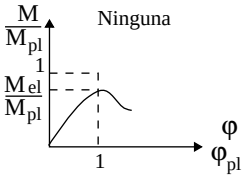
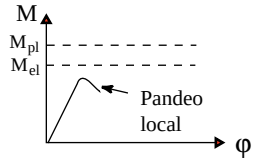
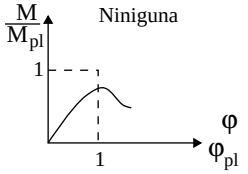
La Tabla 2 presenta en resumen el comportamiento, capacidad de momento y capacidad rotatoria que han de tener las secciones. En esta tabla vemos que los límites están referidos a las clases de sección según el Eurocódigo 3, cada una correspondiente a una exigencia de conducta distinta.

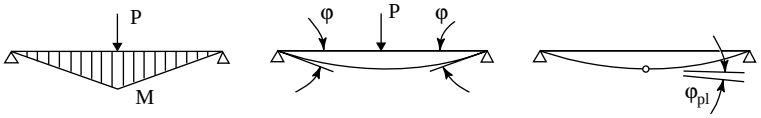
Clase 1 Secciones plásticas: aquellas que pueden desarrollar una rótula plástica con suficiente capacidad de rotación para redistribuir momentos de flexión en la estructura.

Clase 2 Secciones compactas: aquellas que pueden desarrollar resistencia al momento plástico, pero el pandeo local impide la rotación siendo constante el momento de la estructura.

Clase 3 Secciones semicompactas: aquellas en las que la tensión de las fibras extremas debe limitarse hasta la fluencia porque el pandeo local impediría el desarrollo de la resistencia al momento plástico de la sección.

Clase 4 Secciones esbeltas: aquellas cuyas fibras extremas no pueden llegar a la fluencia debido al pandeo local prematuro.

Modelo de comportamiento	Resistencia al momento	Capacidad de rotación	Clase
	Momento plástico en la sección completa 		1
	Momento plástico en la sección completa 		2
	Momento elástico en la sección completa 		3
	Momento elástico en la sección efectiva 		4



Las resistencias al momento de las cuatro clases definidas arriba son:

Clases 1 y 2: el momento plástico es ($M_{pl} = W_{pl} . f_y$)

Clase 3: el momento elástico es ($M_{el} = W_{el} . f_y$)

Clase 4: el momento de pandeo local es ($M_o < M_{el}$).

La respuesta de las distintas clases de secciones transversales sometidas a flexión se representa eficazmente mediante curvas de momento-rotación adimensionados.

Las cuatro clases antedichas se refieren a secciones de vigas en flexión. Para barras cargadas en compresión axial, las clases 1, 2 y 3 se hacen una sola, y en ausencia de pandeo general, se denominan “compactas”; en este caso, la clase 4 se denomina “esbelta”.

Tabla 2 Condiciones de las secciones transversales y clasificación

3. CRITERIOS PARA LA CLASIFICACIÓN DE SECCIONES

Una sección dada se clasifica por la relación anchura-espesor, b/t de sus elementos de compresión que la componen. Son elementos de compresión cualquier chapa que esté en compresión total o parcial debido a una solicitación axial y/o un momento de flexión resultante de la combinación de cargas que considere; la clase a la que pertenezca una sección dada depende en parte del tipo de carga que experimente.

a. **Componentes de la sección**

Una sección se compone de distintos elementos de chapa, como el alma y las alas; casi todos estos elementos, estando en compresión, se pueden dividir en dos categorías:

- elementos internos o rigidizados: se considera que están simplemente apoyados en dos bordes paralelos a la dirección de las fuerzas de compresión.
- elementos exteriores o sin rigidizar: se considera que están simplemente apoyados en un borde, estando el otro libre paralelo a la dirección de las fuerzas de compresión.

Estos casos corresponden, respectivamente, al alma de perfiles en I (o a las almas y alas de las secciones de cajón) y a las alas salientes (Figura 1).

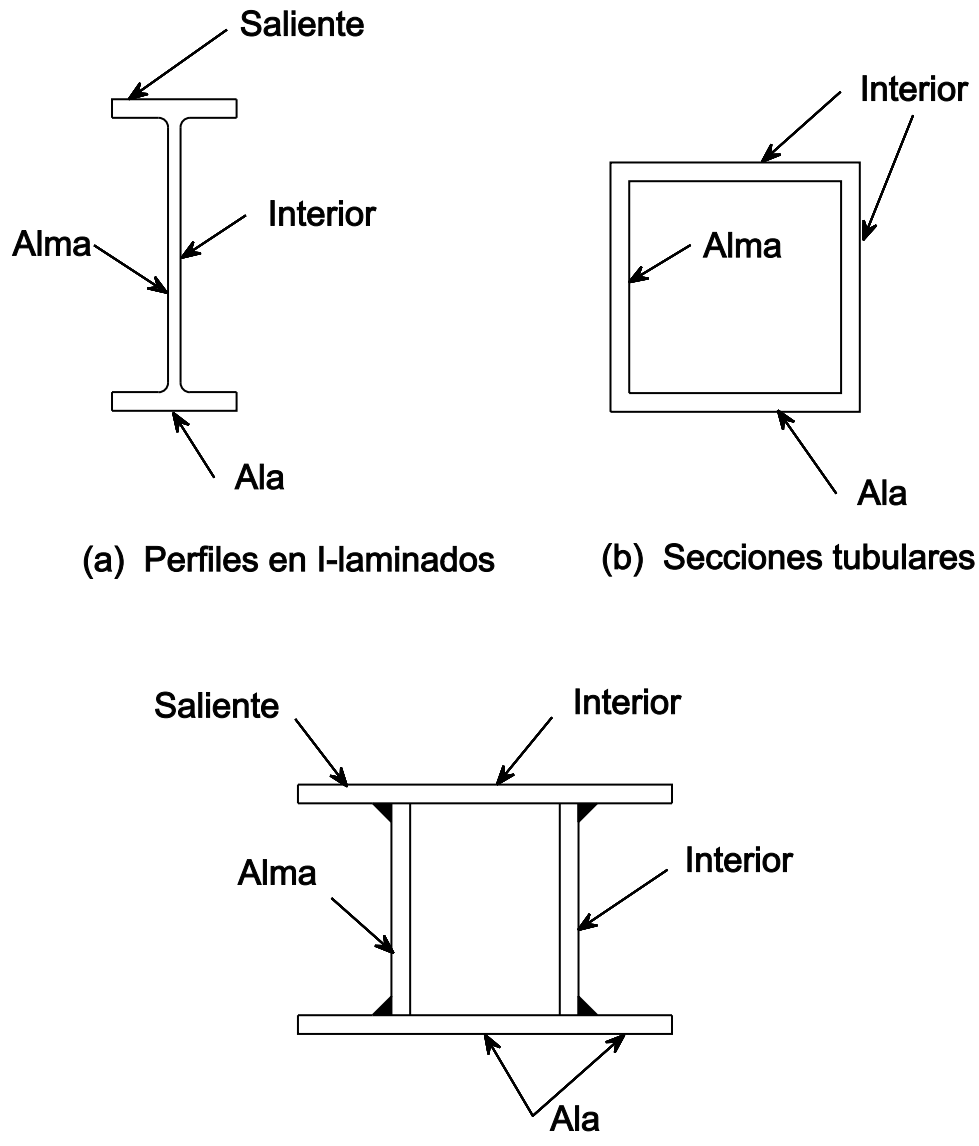


Figura 1 Elementos internos y salientes

b. Comportamiento de los elementos de chapa en compresión

En un elemento de chapa cuya relación de forma $\alpha = a/b$ (longitud-anchura) es mayor de alrededor de 0,8, la tensión crítica de pandeo elástico (tensión de pandeo de Euler) viene dada por:

$$\sigma_{cr} = k_\sigma \frac{\pi^2 E}{12(1-\upsilon^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 \qquad (1)$$

siendo k_σ el factor de pandeo de la chapa (ver abajo),

υ el coeficiente de Poisson,

E el módulo de Young.

La tensión crítica de pandeo es proporcional a $(t/b)^2$ y, por ello, inversamente proporcional a $(b/t)^2$. La esbeltez de la chapa, o la relación anchura-espesor (b/t) representa un papel similar a la relación de esbeltez (L/i) en el pandeo del pilar.

Según la definición de la sección de Clase 3, las proporciones del elemento de chapa, representadas por la relación b/t, deben ser tales que σ_{cr} exceda la resistencia a la fluencia del material f_y , de modo que la fluencia ocurra antes de que pandeen los elementos de chapa. El comportamiento ideal elastoplástico de un elemento de chapa perfecto sometido a compresión uniforme se puede representar por un diagrama carga-esbeltez normalizado en que la carga de rotura normalizada:

$$\bar{N}_p = \sigma_u / f_y$$

y la esbeltez normalizada de la chapa:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{f_y / \sigma_{cr}}$$

trazadas en ordenadas y abscisas respectivamente (Figura 2).

Para $\bar{\lambda}_p < 1$, $\bar{N}_p = 1$, lo que significa que el elemento de chapa puede desarrollar su carga de aplastamiento $\sigma_u = f_y$. Para $\bar{\lambda}_p > 1$, $\bar{N}_p$ se reduce a medida que la esbeltez de la chapa aumenta, siendo σ_u igual a σ_{cr}. Sustituyendo por el valor de σ_{cr} de la ecuación (1) en la anterior, y tomando $\upsilon = 0{,}3$ tenemos:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y \cdot 12(1-\upsilon)^2}{\pi^2 \cdot E \cdot k_\sigma}\left(\frac{b}{t}\right)^2} = 1{,}5\,\frac{b}{t}\sqrt{\frac{f_y}{E \cdot k_\sigma}} \qquad (2)$$

La expresión es bastante general por cuanto la carga, las condiciones límite y la relación de forma influyen en el valor del factor de pandeo k_σ.

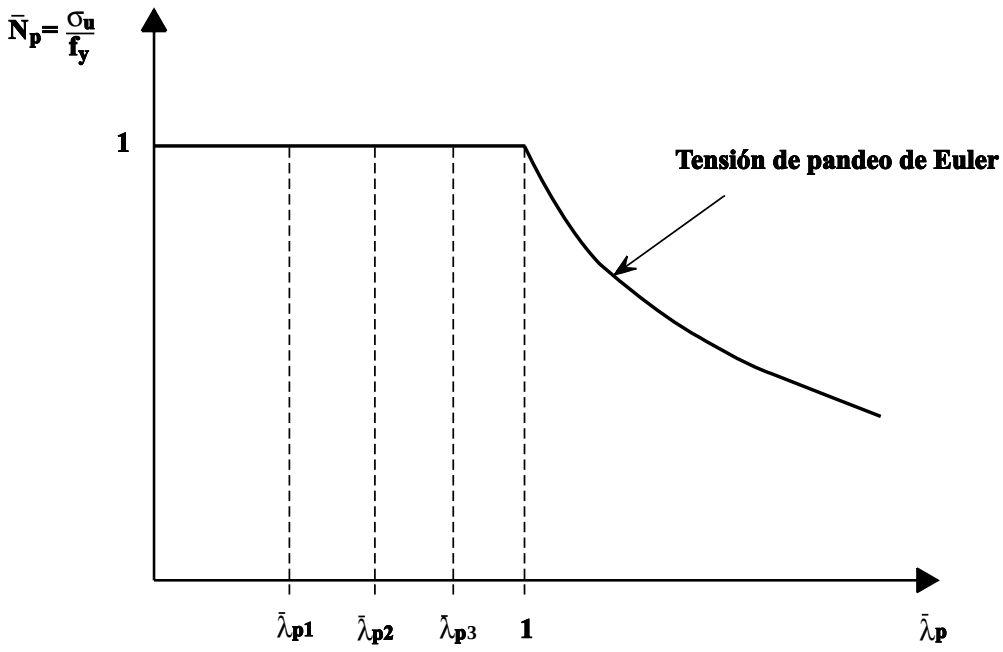


Figura 2 Representación adimensional de la tensión elastoplástica de pandeo

El factor k_σ es un coeficiente de pandeo elástico dimensional que depende de las condiciones de apoyo del borde, del tipo de tensión y de la relación longitud-anchura (a/b) de la forma del elemento de chapa.

En general, los elementos de chapa de una sección tienen una relación de forma mucho mayor que uno y casi todos están sometidos a compresión uniforme. Para estos casos la tabla 3 da factores de pandeo

para elementos de chapa con diversas condiciones en el borde largo.

Condiciones de apoyos en el borde largo	Factor de pandeo k_σ
Empotramiento + empotramiento	6,97
Empotramiento + apoyo simple	5,41
Apoyo simple + apoyo simple	4,00
Empotramiento + libre	1,25
Apoyo simple + libre	0,43
Libre + libre	$(b/a)^2$ (- > 0)

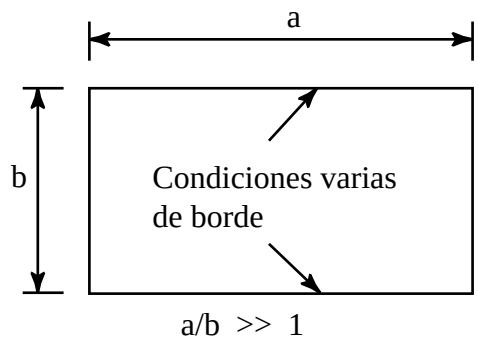


Tabla 3 Factor de pandeo elástico k_σ

Cuando los elementos de chapa se someten a cualquier tipo de solicitación directa que no sea compresión uniforme (p. ej.: el alma de una jácena en flexión), hay que modificar el factor de pandeo k_σ incluyendo el gradiente de la tensión dado por la relación de tensión ψ.

La Tabla 4 presenta factores de pandeo para varias relaciones de tensión ψ de los elementos internos y externos. En el último caso se distingue entre elementos con la punta sometida a compresión o a tensión.

c. **Límite de esbeltez del elemento de chapa**

El comportamiento real es algo distinto del comportamiento elastoplástico ideal representado en la Figura 2, debido a:

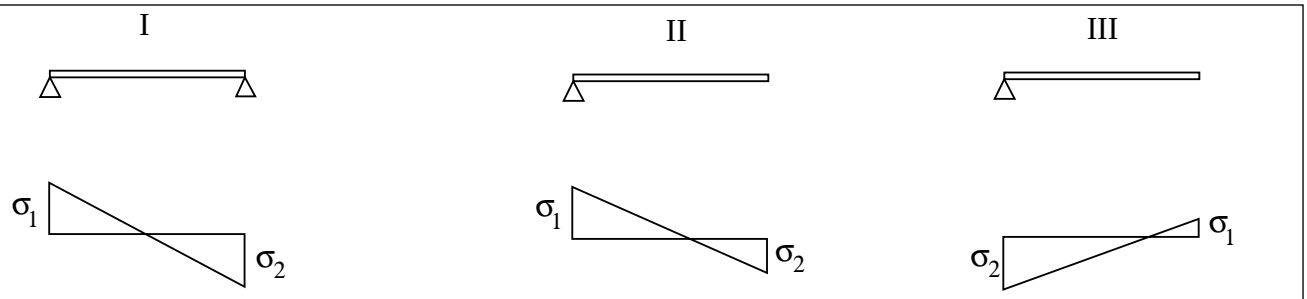
i. imperfecciones iniciales, geométricas y del material,

ii. endurecimiento por deformación del material,

iii. comportamiento posterior al pandeo

Las imperfecciones iniciales producen el pandeo de la chapa, que ocurre cuando $\overline{\lambda}_p < 1$. La correspondiente esbeltez límite de la chapa $\overline{\lambda}_{p3}$, para secciones Clase 3, difiere considerablemente de un país a otro debido a la variación estadística de las imperfecciones y a las propiedades de los materiales que no se conocen lo suficiente para cuantificarlas con exactitud; un examen de los códigos nacionales principales indica que fluctúa de 0,5 a 0,9 aproximadamente. El Eurocódigo 3 ha adoptado $\overline{\lambda}_{p3} = 0{,}74$ como límite de esbeltez de la chapa de los elementos Clase 3 en compresión y $\overline{\lambda}_{p3} = 0{,}9$ para elementos en flexión en los que las fibras extremas de la sección puedan alcanzar la tensión de fluencia. En los elementos de chapa con $\overline{\lambda}_p < \overline{\lambda}_{p3}$ no puede ocurrir el pandeo antes de que la resistencia a la compresión llegue a la tensión de fluencia.

Una sección Clase 1 debe desarrollar un momento de resistencia igual a su capacidad plástica y mantenerla a lo largo de deformaciones inelásticas relativamente largas. Para cum-



σ_2 = fuerza máxima de compresión y σ_2 es positiva $\psi = \sigma_2/\sigma_1$

$\psi = \sigma_2/\sigma_1$		+1	1 > ψ > 0	0	0 > ψ > -1	-1
Factor de pandeo k_σ	Caso I elemento interno	4,0	$\frac{8,02}{1,05+\psi}$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9
	Caso II elemento externo	0,43	$\frac{0,578}{\psi+0,34}$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8
	Caso III elemento externo	0,43	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	0,57	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	0,85

Tabla 4 Factores de pandeo y reparto de tensiones

plir estas condiciones sin pandeo, todo el elemento de placa ha de estar en fluencia y el material deformado en la región de deformación-endurecimiento (ver Tabla 2); esto sólo es posible en los elementos con poca esbeltez de referencia ($\bar{\lambda}_p < \bar{\lambda}_{p1}$), ver Figura 2.

Basándose en ciertos planteamientos teóricos (ver Bibliografía 3, 4 y 5), varias normas proponen valores de $\bar{\lambda}_{p1}$ entre 0,46 y 0,6. La diferencia se explica por la elección de la cantidad de capacidad de rotación necesaria. Un valor de $\bar{\lambda}_{p1} = 0,6$ corresponde a una capacidad de rotación reducida que se estima suficiente en el cálculo plástico habitual (vigas continuas, pórticos sin desplazamiento lateral, etc.). El valor propuesto por el Eurocódigo 3 es:

$$\bar{\lambda}_{p1} = 0,5$$

La sección Clase 2 (o sección compacta) es la que puede llegar justo a la resistencia al momento plástico, pero en ese punto sus resistencias disminuyen rápidamente (Tabla 1). El elemento de chapa está en fluencia y el material deformado en el campo plástico; esto ocurre en los elementos con una esbeltez media de referencia de $\bar{\lambda}_{p2}$, donde:

$$\bar{\lambda}_{p1} < \bar{\lambda}_{p2} < \bar{\lambda}_{p3}$$

El valor propuesto por el Eurocódigo 3 es $\bar{\lambda}_{p1} = 0,6$.

Las relaciones límites b/t se calculan mediante la fórmula (2) y los valores pertinentes de $\bar{\lambda}_p$ y k_σ. La Tabla 5 da algún valor límite de b/t de los elementos de una sección laminada con perfil en I, en compresión o flexión.

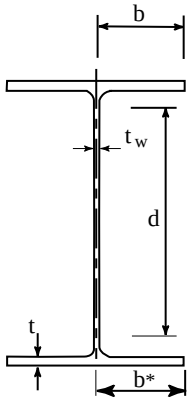
El Eurocódigo 3 especifica las proporciones límites más importantes de los elementos de una sección que permiten clasificarla correctamente. En el Apéndice 1 se dan las proporciones límites para elementos en compresión de las Clases 1 a 3.

Los valores límites de la relación anchura-espesor (b/t) de los elementos de chapa se aplican a piezas de acero de una tensión de fluencia determinada. El Eurocódigo 3, para abarcar todas las calidades de acero, presenta los datos de pandeo local sin dimensiones, por medio de un factor de reducción $\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}$, donde 235 representa la tensión de fluencia del acero dulce y f_y el del acero que se considera.

Los elementos de compresión de una sección (el alma o un ala) están, en general, en clases diferentes y normalmente una sección se clasifica por la clase más desfavorable (más alta) de sus elementos de compresión.

Es importante, en particular en el cálculo plástico, que la sección de las piezas que se escojan sean, en todos los casos, apropiadas para el tipo de comportamiento presupuesto.

Si alguno de los elementos de una sección no se ajusta a los límites dados en la Tabla 5 para la Clase 3, la sección se clasifica en "esbelta" y el pandeo local se tendrá en cuenta en el cálculo. Esto puede hacerse por medio del método de sección efectiva que se trata en detalle en la Lección 9.3.

	Elemento	Sección Clase 1	Sección Clase 2	Sección Clase 3		
				Fórmula	k_σ	b*/t ó d/t_w
	Ala (1) (b*/t)	9 ε	10 ε	$21\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$	0,43	14 ε (1)
	Alma en compresión d/t_w	33 ε	38 ε	$21\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$	1,0	42 ε
	Alma en flexión para d/t_w	72 ε	83 ε	$25,4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$	23,9	124 ε
	f_y	235	275		355	
$\varepsilon = \sqrt{f_y / 235}$	ε	1,0	0,92		0,81	

(1) En la práctica se considera la mitad del ancho del ala, b, en lugar de b*. Por esta razón, los valores en "Essentials of Eurocode 3" son b = 15 ε > b*.

Tabla 5 Relaciones máximas de esbeltez de los elementos de una sección laminada en compresión o en flexión

4. RESUMEN FINAL

1. Los métodos de análisis están influidos por la geometría de las secciones,, y, más en particular, por las relaciones de anchura y espesor de los elementos de chapa en compresión.
2. Debe garantizarse que no ocurra ninguna inestabilidad local antes de llegar al mecanismo completo o antes de que se pueda llegar al momento plástico o elástico.
3. Se definen cuatro clases de sección, correspondiendo cada una a una exigencia de comportamiento distinta: plástica, compacta, semicompacta y esbelta.
4. En la lección se exponen las proporciones límites de los elementos de las secciones que permiten clasificarlas correctamente.
5. Si alguno de los elementos de compresión de una sección no cumple las proporciones límites de la Clase 3 (semicompacta), se tendrá en cuenta el pandeo local en el cálculo.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Bulson, P.S., “The Stability of Flat Plates” Chatto and Windus, Londres 1970.

2. Bureau, A. et Galea, Y., “Application de l’Eurocode 3: Classement des sections transversales en I”. Construction métallique, no. 1, 1991.

3. Salmon, C.G., Johnson, J.E., “Steel Structures. Design and Behaviour”, Harper et Row, Publishers, New York.

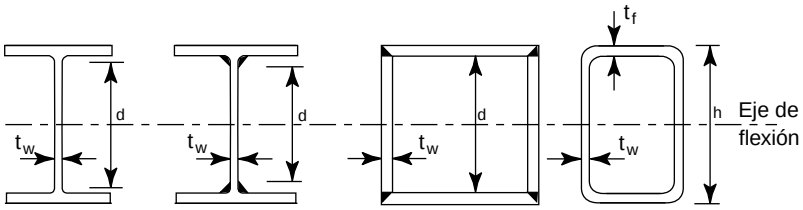
4. Dubas, P., Gehri, E., “Behaviour and Design of Steel Plated Structures”, Publication no. 44, ECCS, TC8, 1986.

5. Commentaire de la norme SIA161 “Constructions Métalliques”, Publication A5, Centre Suisse de la Construction Métallique, Zurich, 1979.

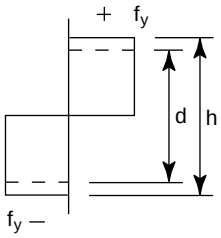
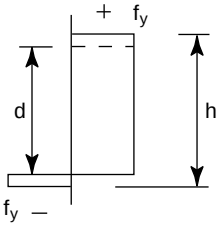
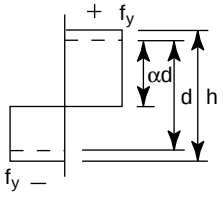
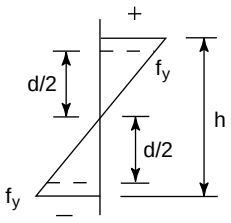
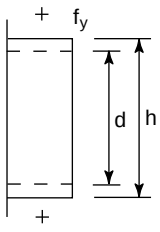
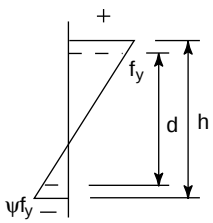
APÉNDICE I

Tabla 1 Relaciones máximas anchura-espesor para elementos en compresión

a. Almas (elementos internos perpendiculares al eje de flexión)



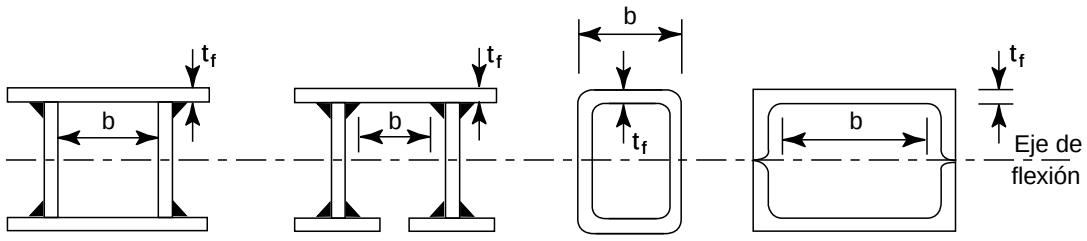
$d = h - 3t$ ($t_f = t = t_w$)

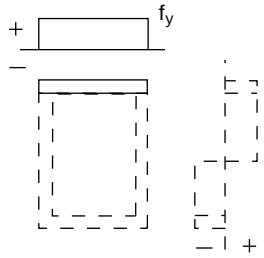
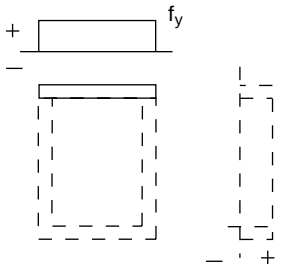
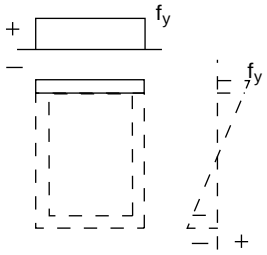
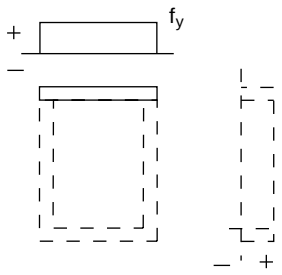
Clase	Alma sujeta a flexión	Alma sujeta a compresión	Alma sujeta a flexión y compresión
Distribución de tensiones en elemento (compresión positiva)			
1	$d/t_w \le 72\,\varepsilon$	$d/t_w \le 33\,\varepsilon$	cuando $\alpha > 0{,}5$: $d/t_w \le 396\,\varepsilon/(13\alpha-1)$ cuando $\alpha \le 0{,}5$: $d/t_w \le 36\,\varepsilon/\alpha$
2	$d/t_w \le 83\,\varepsilon$	$d/t_w \le 38\,\varepsilon$	cuando $\alpha > 0{,}5$: $d/t_w \le 456\,\varepsilon/(13\alpha-1)$ cuando $\alpha > 0{,}5$: $d/t_w \le 41{,}5\,\varepsilon/\alpha$
Distribución de tensiones en elemento (compresión positiva)			
3	$d/t_w \le 124\,\varepsilon$	$d/t_w \le 42\,\varepsilon$	cuando $\psi > -1$: $d/t_w \le 42\,\varepsilon\,/\,(0{,}67 + 0{,}33\,\psi)$ cuando $\psi \le -1$: $d/t_w \le 62\,\varepsilon\,(1-\psi)\,\sqrt{(-\psi)}$

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}$	fy	235	275	355
	ε	1	0,92	0,81

Tabla 2 Relaciones máximas anchura-espesor para elementos en compresión

b. Elementos internos del ala: (Elementos internos paralelos al eje o a la flexión)



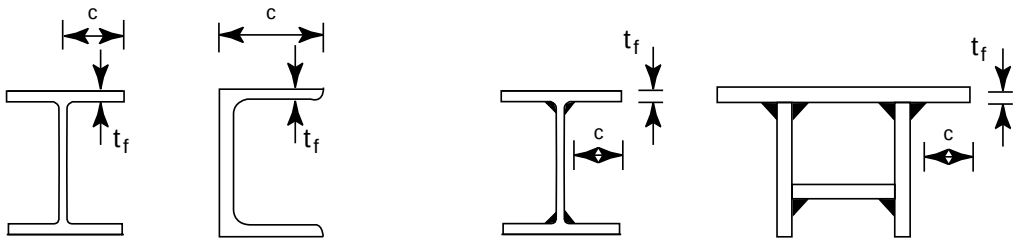
Clase	Tipo	Sección en flexión	Sección en compresión
Distribución de tensiones en elemento y a lo largo de la sección (compresión positiva)			
1	Sección hueca laminada Otras	$(b-3t_f)/t_f \le 33\varepsilon$ $b/t_f \le 33\varepsilon$	$(b-3t_f)/t_f \le 42\varepsilon$ $b/t \le 42\varepsilon$
2	Sección hueca laminada Otras	$(b-3t_f)/t_f \le 38\varepsilon$ $b/t_f \le 38\varepsilon$	$(b-3t_f)/t_f \le 42\varepsilon$ $b/t_f \le 42\varepsilon$
Distribución de tensiones en elemento y a lo largo de la sección (compresión positiva)			
3	Sección hueca laminada Otras	$(b-3t_f)/t_f \le 42\varepsilon$ $b/t_f \le 42\varepsilon$	$(b-3t_f)/t_f \le 42\varepsilon$ $b/t_f \le 42\varepsilon$

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}$

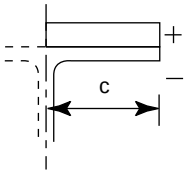
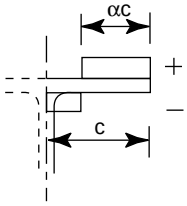
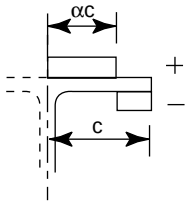
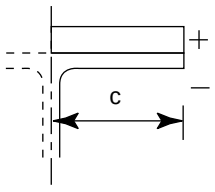
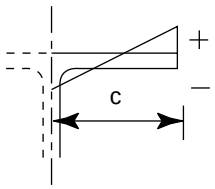
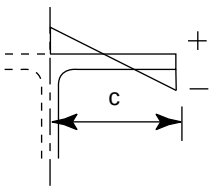
fy	235	275	355
ε	1	0,92	0,81

Tabla 3 Relaciones máximas anchura-espesor para elementos en compresión

c. Alas exteriores:



Secciones laminadas | Secciones soldadas

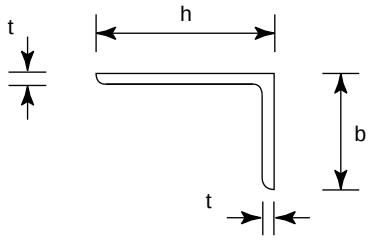
Clase	Tipo de perfil	Ala sujeta a compresión	Ala sujeta a compresión y flexión	
			Punta en compresión	Punta en tensión
Distribución de tensiones en elemento (compresión positiva)				
1	Laminado	$c/t_f \le 10\,\varepsilon$	$c/t_f \le \frac{10\,\varepsilon}{\alpha}$	$c/t_f \le \frac{10\,\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
	Soldado	$c/t_f \le 9\,\varepsilon$	$c/t_f \le \frac{9\,\varepsilon}{\alpha}$	$c/t_f \le \frac{9\,\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
2	Laminado	$c/t_f \le 11\,\varepsilon$	$c/t_f \le \frac{11\,\varepsilon}{\alpha}$	$c/t_f \le \frac{11\,\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
	Soldado	$c/t_f \le 10\,\varepsilon$	$c/t_f \le \frac{10\,\varepsilon}{\alpha}$	$c/t_f \le \frac{10\,\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
Distribución de tensiones en elemento (compresión positiva)				
3	Laminado	$c/t_f \le 15\,\varepsilon$	$c/t_f \le 23\,\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$	
	Soldado	$c/t_f \le 14\,\varepsilon$	$c/t_f \le 21\,\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$	
			para k_σ ver tabla 5.3.3	

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}$	fy	235	275	355
	ε	1	0,92	0,81

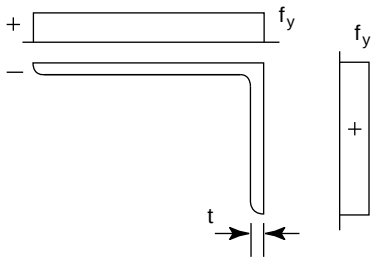
Tabla 4 Relaciones máximas anchura-espesor para elementos en compresión

d. Ángulos

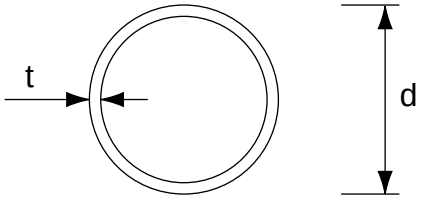
Véase también (c) "Alas exteriores" (Tabla 3)



(No se aplica a los angulares en contacto contíguo con otras piezas

Clase	Sección en compresión
Distribución de tensiones en toda la sección (compresión positiva)	
3	$h/t \leq 15\,\varepsilon$; $(b + h)/2t \leq 11{,}5\,\varepsilon$

e. Secciones tubulares:



Clase	Sección en flexión y/o compresión
1	$d/t \leq 50\,\varepsilon^2$
2	$d/t \leq 70\,\varepsilon^2$
3	$d/t \leq 90\,\varepsilon^2$

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}$

fy	235	275	355
ε	1	0,92	0,81
ε^2	1	0,85	0,66

ESDEP PROBLEMA RESUELTO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema Resuelto 9.1 (i), (ii) y (iii): Clasificación de secciones transversales

CONTENIDO

Problema resuelto 9.1(i): Determinación de la clase de una sección sometida a compresión

Sección HEA 500
Sección IPE 600

Problema resuelto 9.1(ii): Determinación de la clase de una sección sometida a flexión

Sección HEA 500
Sección IPE 600

Problema resuelto 9.1(iii): Determinación de la clase de una sección sometida a flexión y compresión

Sección HEA 500
Sección IPE 600
Sección soldada

NOTAS PREVIAS

Clasificar las secciones permite juzgar su comportamiento último en compresión y flexión, teniendo en cuenta la posibilidad de pandeo local.

La clase a la que pertenece una sección depende de las proporciones (relación anchura-espesor) de sus elementos de compresión (alma, alas), del tipo de carga (compresión, flexión, compresión y flexión) y de la resistencia a la fluencia del material.

Los límites más importantes de las proporciones de los elementos de una sección que permiten clasificarlas correctamente se especifican en la Tabla 5.3.1 del Eurocódigo 3 [1] y se resumen en la Lección 9.2 [2].

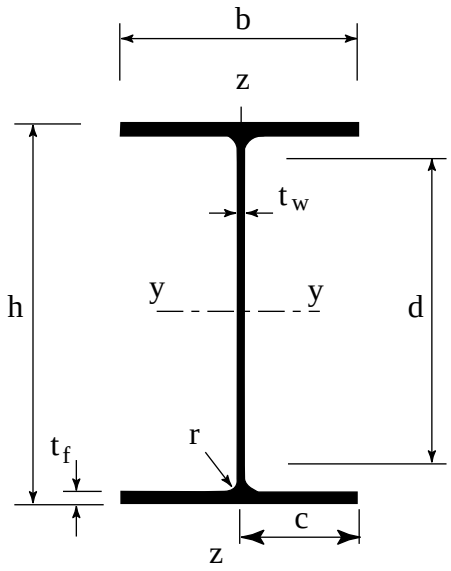
[1] El Eurocódigo 3: “Cálculo de Estructuras de Acero”: ENV 1993-1-1: Parte 1.1: Reglas Generales y Reglas para Edificios, CEN, 1992.

[2] Lección 9.2: Clasificación de Secciones Transversales.

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.1(i) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A COMPRESIÓN

9.1.1.1 Sección HEA 500



Datos:

f_y = 235 N/mm.^{2}

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 1$

h = 490 mm.

b = 300 mm.

t_f = 23 mm.

t_w = 12 mm.

r = 27 mm.

d = h-2t_f - 2r = 390 mm.

c = 0,5 b = 150 mm.

Clasificación del ala:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{150}{23} = 6,5 < 10\varepsilon = 10 : \quad \text{Clase 1}$$

Tabla 5.3.1(3)

Clasificación del alama:

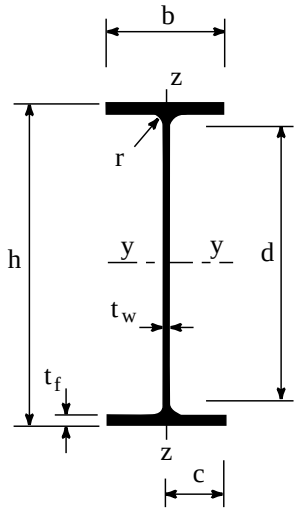
$$\frac{d}{t_w} = \frac{390}{12} = 32,5 < 33\,\varepsilon = 33 : \quad \text{Clase 1}$$

Por tanto, puede considerarse que la sección pertenece a la Clase 1.

Tabla 5.3.1(1)

Referencia en Eurocódigo 3

9.1.1.2 Sección IPE 600



Datos:

f_y = 355 N/mm.^{2}

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0,81$

h = 600 mm.

b = 220 mm.

t_f = 19 mm.

t_w = 12 mm.

r = 24 mm.

d = h-2t_f - 2r = 514 mm.

c = 0,5 b = 110 mm.

Clasificación del ala:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{110}{19} = 5,8 < 10\varepsilon = 8,1 : \quad \text{Clase 1}$$

Tabla 5.3.1(3)

Clasificación del alma:

$$\frac{d}{t_w} = \frac{514}{12} = 42,8 > 42\,\varepsilon = 34,0 : \quad \text{Clase 4}$$

Por tanto, debe considerarse que la sección pertenece a la Clase 4.

Tabla 5.3.1(1)

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.1(ii) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN

9.1.2.1 Sección HEA 500

Los datos de esta sección se han presentado en el problema 9.1.1.1.

Se consideran dos casos distintos:

a) Flexión por el eje y-y:

En este caso puede considerarse que las alas están sometidas a compresión o tracción uniforme, por lo que se clasifican así:

Tabla 5.3.1(3)

$$\frac{c}{t_f} = \frac{150}{23} = 6,5 < 10\varepsilon = 10 : \quad \text{Clase 1}$$

El alma está sometida a flexión y su clasificación es:

Tabla 5.3.1(1)

$$\frac{d}{t_w} = \frac{390}{12} = 32,5 < 72\,\varepsilon = 72 : \quad \text{Clase 1}$$

Por tanto, se puede considerar que la sección pertenece a la Clase 1.

b) Flexión por el eje z-z:

Supongamos que la sección está completamente plastificada en flexión pura. En ese caso, las alas están sometidas a tensiones repartidas uniformemente, a compresión de un lado del alma y a tracción en el otro lado. Por tanto, la clasificación de las alas es:

Tabla 5.3.1(3)

$$\frac{c}{t_f} = \frac{150}{23} = 6,5 < 10\varepsilon = 10 : \quad \text{Clase 1}$$

Con flexión pura por el eje z-z, puede despreciarse la posibilidad de pandeo por la oposición del alma respecto al eje neutro.

Así, puede considerarse que la sección pertenece a la Clase 1.

Referencia en Eurocódigo 3

9.1.2.2 Sección IPE 600

Los datos de esta sección se han presentado en el problema 9.1.1.2.

Se pueden considerar dos casos distintos:

a) Flexión por el eje y-y:

Si se considera que las alas están sometidas a compresión o tracción uniforme, su clasificación es:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{110}{19} = 5,8 < 10\varepsilon = 8,1: \quad \text{Clase 1}$$

Tabla 5.3.1(3)

El alma está sometida a flexión y su clasificación es:

$$\frac{d}{t_w} = \frac{514}{12} = 42,8 < 72\,\varepsilon = 58,3: \quad \text{Clase 4}$$

Tabla 5.3.1(1)

Por tanto, se puede considerar que la sección pertenece a la Clase 1.

b) Flexión por el eje z-z:

Si se presume que la sección está completamente plastificada, las alas están sometidas a compresión o tracción uniforme. En este caso, las alas se clasifican así:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{110}{19} = 5,8 < 10\varepsilon = 8,1: \quad \text{Clase 1}$$

Tabla 5.3.1(3)

Las observaciones sobre el alma de la sección HEA 500 sometida a flexión por el eje z-z, son válidas para este caso.

Así, la sección puede considerarse perteneciente a la Clase 1.

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.1(iii) DETERMINACIÓN DE LA CLASE DE UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN Y COMPRESIÓN

9.1.3.1 Sección HEA 500

La sección está sometida a flexión por el eje y-y y a una fuerza de compresión axial de 400 kN. Los demás datos necesarios se han presentado en el problema 9.1.1.1.

Clasificación del ala:

$$\frac{c}{t_f} = 5,8 < 10\varepsilon = 8,1: \quad \text{Clase 1}$$

Clasificación del alma:

$$\frac{d}{t_w} = \frac{390}{12} = 32,5$$

Este valor es más bajo que el límite de d/t_w en el caso de compresión uniforme del alma ($33\,\varepsilon = 33$), que es el caso de reparto de tensiones en el alma más desfavorable. Así, el alma se puede clasificar en la Clase 1, independiente del reparto de tensiones a que esté sometida.

Tabla 5.3.1(1)

Por tanto, se puede considerar que la sección pertenece a la Clase 1.

9.1.3.2 Sección IPE 600

La sección está sometida a flexión por el eje y-y y a una fuerza axial de 1200 kN. Los datos se han presentado en el problema 9.1.1.2.

Clasificación del ala:

$$\frac{c}{t_f} = 5,8 < 10\varepsilon = 8,1: \quad \text{Clase 1}$$

Tabla 5.3.1(3)

Clasificación del alma:

$$\frac{d}{t_w} = 42,8$$

Referencia en Eurocódigo 3

Este valor es más bajo que cualquier límite del alma en flexión pura (72 ε = 58,3), pero supera el valor límite de la Clase 3 (42 ε = 34) en compresión pura. La cuestión que hay que resolver es: "¿Con qué clase de reparto de tensiones vamos a contar, elástico o plástico?".

Tabla 5.3.1(1)

Supongamos primero una redistribución totalmente plástica:

Por lo tanto:

$N_{Sd} = d_N \times t_w \times f_y$

$\alpha d = (d + d_N)/2$

siendo

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\frac{d_N}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{N_{Sd}}{t_w\, f_y\, d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1200\times 10^3}{12\times 355\times 514}\right) = 0,774$$

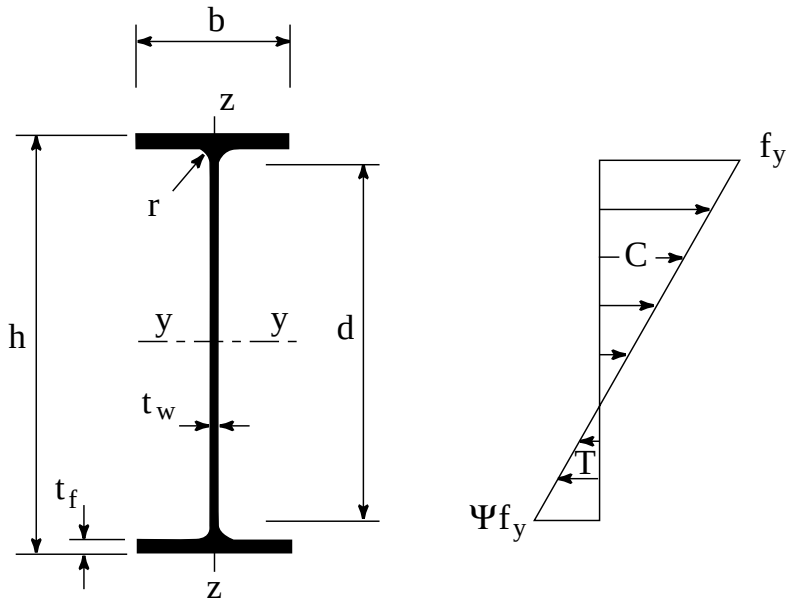
Se observa que el límite (d/t) de la Clase 2, es decir,

Tabla 5.3.1(1)

$$\frac{456\,\varepsilon}{13\alpha - 1} = 40,8$$

se supera.

Lo que quiere decir que debe adoptarse redistribución elástica de tensiones.



El reparto de tensiones en el alma que se considera es tal que la fibra extrema en compresión está en fluencia.

La tensión debida al momento flector es igual a b. Las tensiones en las fibras extremas del alma vienen dadas por las siguientes expresiones:

en compresión: $f_y = \sigma_b + N_w/d.t_w = \sigma_b + N_{Sd}/A$

$\Psi.f_y = -\sigma_b + N_w/d.t_w = -\sigma_b + N_{Sd}/A$

siendo N_w la parte del esfuerzo axial que incide en el alma, y

$N_w = (A_w/A)\, N_{Sd}$

$A_w = d.t_w$

A el área de la sección

De las dos relaciones anteriores tenemos:

$$\Psi = \frac{1}{f_y}\left(\frac{2\,N_{Sd}}{A} - 1\right)$$

$$\Psi = \frac{1}{355}\left(\frac{2 \times 1{,}2 \times 10^6}{15{,}6 \times 10^3} - 1\right) = 0{,}431$$

Referencia en Eurocódigo 3

Tabla 5.3.1(1)

y d/t_w (límite) $= \dfrac{42\,\varepsilon}{0,67 + 0,33\,\psi}$

$= \dfrac{42 \times 0,81}{0,67 + 0,33 \times (0,431)} = 41,9$

$\dfrac{d}{t_w} = 48,8 > 41,9$: Clase 4

y, por tanto, la sección pertenece a la Clase 4.

9.1.3.3 Sección soldada

La sección de abajo está sometida a flexión por el eje z-z y una fuerza de compresión axial de 300 kN.

Los demás datos necesarios son:

f_y = 355 N/mm.^{2}

$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0,81$

A = 9408 mm.^{2}

h = 300 mm.

b = 300 mm.

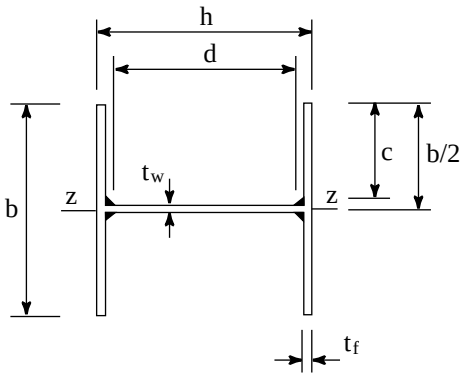
a = 6 mm.

t_f = 12 mm.

t_w = 8 mm.

$c = 150 - \frac{8}{2} - 6\sqrt{2}$

= 137,5

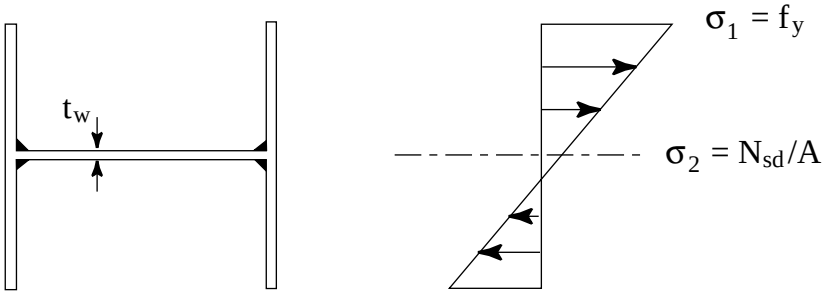


Clasificación de las alas:

Suponiendo un reparto plástico de las tensiones, las alas están sometidas a una tensión uniforme igual a f_y en la zona de compresión.

$$\frac{c}{t_f} = \frac{137,5}{12} = 11,46$$

Este valor excede el c_{lim} de la Clase 3, o sea, 14 ε = 11,34. Lo que significa que debe considerarse un reparto elástico. Se asume que la fibra extrema en compresión está en fluencia.



$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{300000}{9408 \times 355} = 0,09$$

Referencia en Eurocódigo 3

$k_\sigma = 0{,}57 - 0{,}21\,\Psi + 0{,}07\,\Psi^2 = 0{,}55$

Esbeltez del ala:

Tabla 5.3.3

$$\frac{c}{t_f} = 11{,}46 < 21\varepsilon\sqrt{k_\sigma} = 21 \times 0{,}81 \times$$

$$\times\sqrt{0{,}55} = 12{,}6 : \quad \text{Clase3}$$

Tabla 5.3.1 (3)

Clasificación del alma:

El alma está en compresión

$$d = 300 - 2 \times 12 - 2 \times 6\sqrt{2} = 259\,\text{mm}$$

y su esbeltez es:

$$\frac{d}{t_w} = \frac{259}{8} = 32{,}4$$

Cumple con el valor límite de la Clase 3, o sea, 42 ε = 34.02, pero excede el de la Clase 2, o sea, 38 ε = 30.78. Así, el alma debe considerarse perteneciente a la Clase 3.

Por tanto, la sección se considera de la Clase 3.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.3: Pandeo local

OBJETIVO/CONTENIDO

Describir las reglas para el cálculo de barras con perfil de la clase 4.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lecciones 9: Elementos

Lecciones 10: Chapas y láminas

LECCIONES

Lecciones 11: Construcción con chapa de pequeño espesor

RESUMEN

Debe tenerse en cuenta el efecto del pandeo local de la chapa sobre el comportamiento general de las barras con perfil de la clase 4. Para oponerse al pandeo se recurre a secciones transversales efectivas, en la suposición de que partes de la sección total están inactivas. Se dan reglas para determinar la sección efectiva y las operaciones de cálculo necesarias.

1. INTRODUCCIÓN

Con barras de perfil clase 4, el efecto del pandeo local sobre el comportamiento global en el estado límite extremo es tal que no se puede alcanzar la resistencia elástica, calculada sobre la hipótesis de fluencia de las fibras extremas de la sección bruta (criterios para perfiles de la clase 3).

La figura 1 muestra la curva de flecha del momento de una viga con carga concentrada (clase 4). La razón por la que se reduce la resistencia es que el pandeo local ocurre en una fase temprana de algunas partes en compresión de la barra; así se reduce la rigidez de estas partes en compresión y se reparten las tensiones a los bordes más rígidos; ver Figura 2.

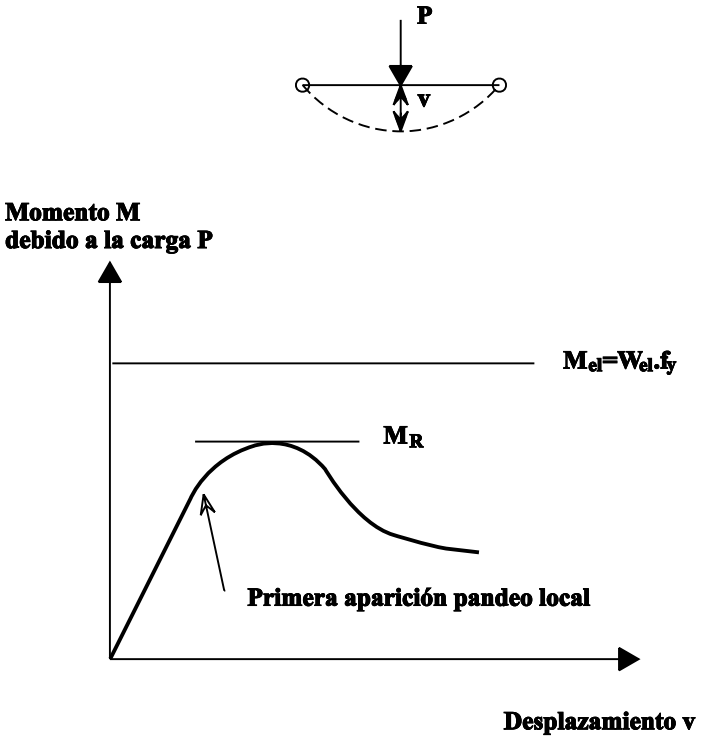


Figura 1 Curva momento deformación de una viga con una carga puntual

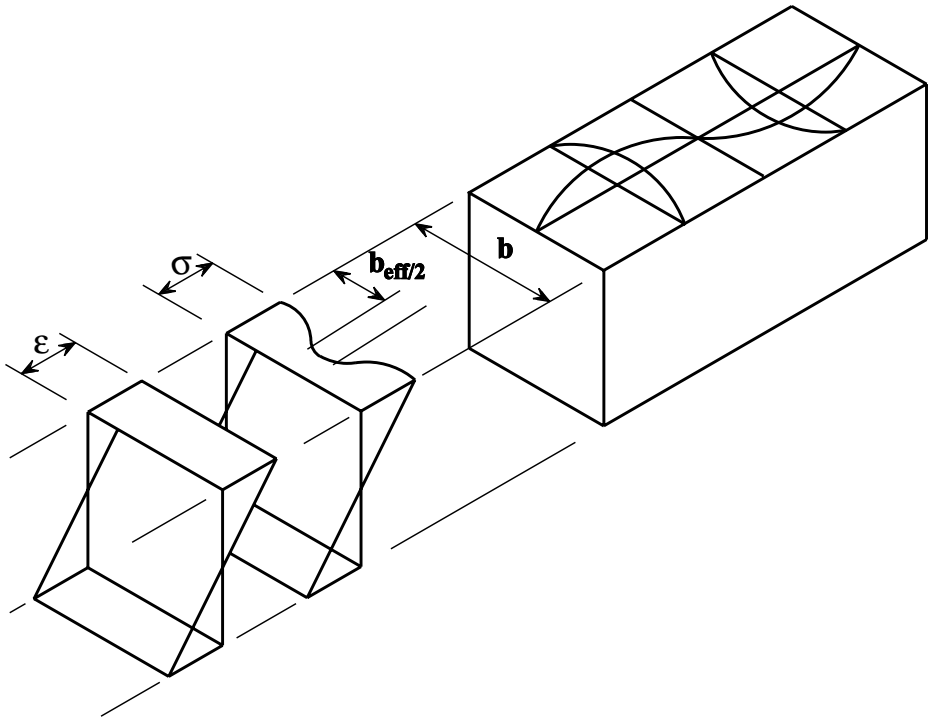


Figura 2 Distribución de tensión y deformación en un elemento con un ala comprimida y que sufre pandeo local

Para compensar la reducción de resistencia se tiene en cuenta la distribución no lineal de la tensión mediante una distribución lineal de la tensión que actúa sobre una "anchura efectiva de la chapa" reducida, dejando un "agujero efectivo" donde se produce el pandeo. Figura 2.

Aplicando este modelo se define una "sección transversal efectiva" cuya resistencia se calcula entonces como los perfiles clase 3 (limitando la tensión en las fibras extremas a la resistencia a la fluencia).

2. DEFINICIÓN DE “ANCHURAS EFECTIVAS”

Las anchuras efectivas, b_{eff}, se calculan por la fórmula de Winter:

$$b_{eff} = \rho . b$$

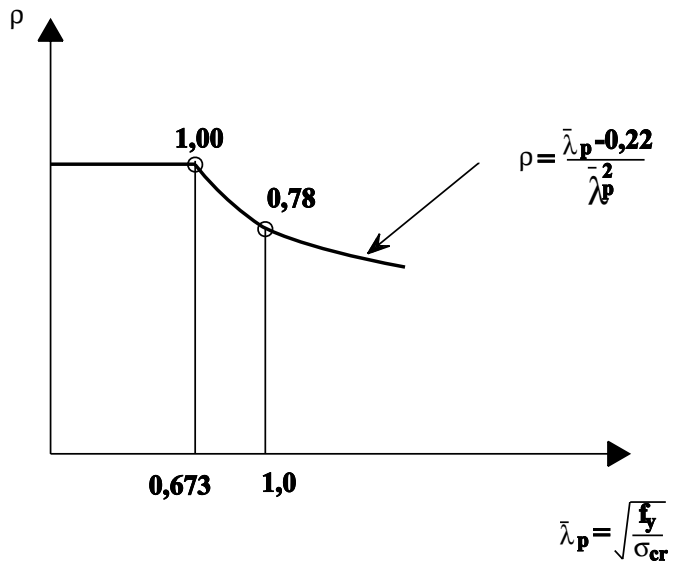


Figura 3 Reducción del coeficiente p en función de la anchura efectiva

donde el coeficiente de reducción ρ depende de la esbeltez de la chapa $\bar{\lambda}_p$, definida por la teoría de pandeo lineal de chapas, que se ve en la Figura 3.

La Figura 4 pone varios ejemplos de la sección efectiva de barras en compresión.

Los resultados de ensayos de flexión de barras indican que la anchura efectiva se puede hallar partiendo de los repartos de cargas calculados mediante el módulo W_{el} de la sección bruta, aunque la formación de “agujeros efectivos” en las partes en compresión desplace el eje neutro de la sección efectiva; por lo tanto, no es necesario un proceso recíproco.

La figura 5 muestra varios ejemplos de la sección efectiva de barras en flexión.

3. CÁLCULO DE LAS BARRAS

3.1 Pilares en compresión

Como se ve en las secciones efectivas 1 y 2 de la Figura 4, los ejes neutros de doble simetría de las secciones no varían al formarse agujeros efectivos. De ahí que la carga de compresión N_{sd}, que es central respecto a las secciones transversales brutas, también lo sea respecto a las secciones efectivas.

El cálculo del pandeo del pilar se basa por tanto en la esbeltez adimensional $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}}$, donde N_{cr} se calcula según la sección bruta y N_{pl}

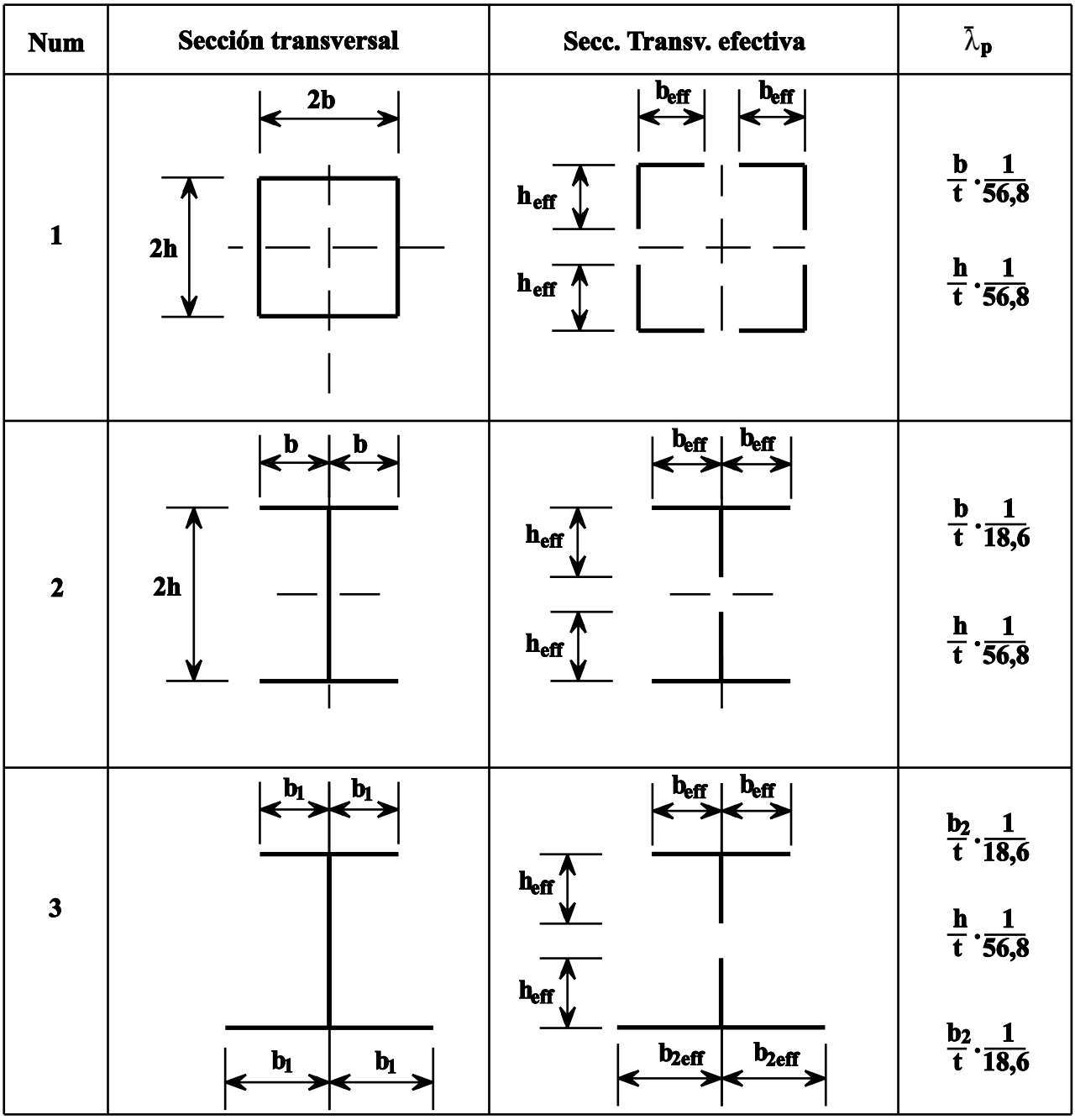


Figura 4 Sección transversal efectiva para elementos en compresión

se calcula mediante el área de la sección efectiva A_{eff} ($N_{pl} = A_{eff} \cdot f_y$).

La resistencia al pandeo del cálculo viene dada por:

$$N_{bRd} = \chi \cdot N_{pl} / \gamma_M$$

siendo χ el factor de reducción de la curva de pandeo en cuestión.

- En las secciones monosimétricas - tipo 3 en la Figura 4 -o en las asimétricas, la formación de agujeros efectivos puede dar lugar a un desplazamiento, e_N, de la posición de los ejes neutros. Por tanto, la carga de compresión N_{Sd}, que es central respecto a la sección bruta, será excéntrica respecto a la efectiva y causará un momento de flexión adicional $M = N_{Sd} \cdot e_N$. La barra es entonces un pilar con carga excéntrica y debe verificarse con arreglo al apartado 3.3.

3.2 Vigas en flexión

Las vigas se calculan mediante el módulo de sección hallado para las secciones transversales efectivas, como en la Figura 5. En general, la consecución de la resistencia a la fluencia en la cara de compresión limita la resistencia a la flexión de cálculo de las secciones efectivas:

$$M_{o,Rd} = W_{eff} \cdot f_y / \gamma_{M1}$$

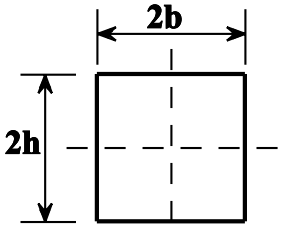
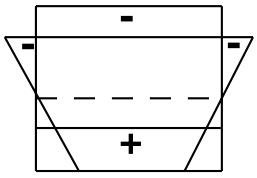
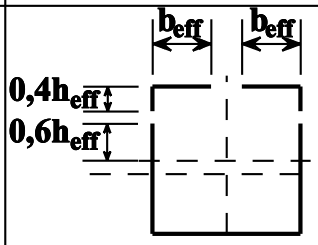
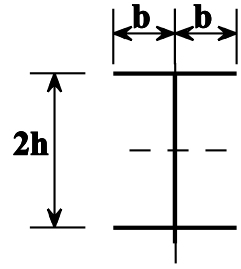
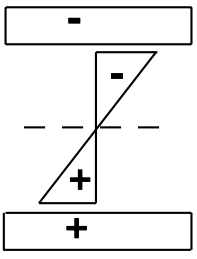
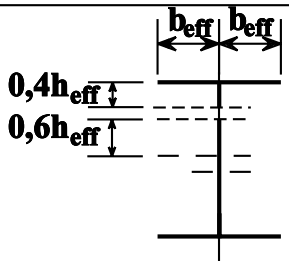
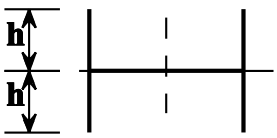
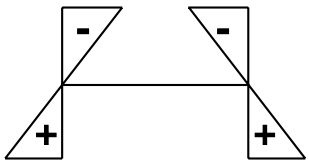
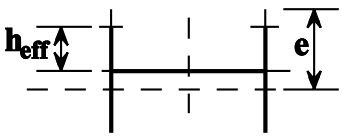
Num	Sección Transversal	Distribución aprox. tensiones	Secc. Transv. efectiva	$\bar{\lambda}_p$
1				$\frac{b}{t} \cdot \frac{1}{56,8}$ $\frac{h}{t} \cdot \frac{1}{138,8}$
2				$\frac{b}{t} \cdot \frac{1}{18,6}$ $\frac{h}{t} \cdot \frac{1}{138,8}$
3				$\frac{h}{t} \cdot \frac{1}{21,4}$

Figura 5 Sección transversal efectiva para elementos flexionados

En secciones similares al tipo 3 de la Figura 5, la Weff se halla por el borde real (e):

$$W_{eff} = \frac{I_{eff}}{e}$$

y no por el borde del agujero efectivo.

La comprobación del pandeo lateral-torsional de las vigas es análoga a la de los pilares.

La esbeltez adimensional $\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_u}{M_{cr}}}$, se calcula con $M_u = W_{eff} \cdot f_y$ para la sección efectiva, y con el M_{cr} calculado para los valores de las secciones brutas. La resistencia de cálculo al pandeo lateral-torsional viene dada por:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot M_u / \gamma_{M1}$$

siendo χ_{LT} el factor de reducción de la curva de pandeo en cuestión.

3.3 Pilares excéntricos (Viga - Pilar)

En el caso de elementos sometidos a compresión en flexión mono o biaxial (p. ej,: pilares con sección monosimétrica o asimétrica), el cálculo se realiza mediante una fórmula de acción recíproca en la que se combina un pilar a compresión central, con una viga con flexión sólo en el eje y, y con una viga con flexión sólo en el eje z.

Si se impide el pandeo lateral torsional, la fórmula recíproca es como sigue:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{bRd}} + \frac{k_y (M_{ySd} + N_{Sd}\, e_{Ny})}{M_{oyRd}} + \frac{k_z (M_{ySd} + N_{Sd}\, e_{Ny})}{M_{ozRd}} \leq 1$$

Si pudiera producirse el pandeo lateral-torsional:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{bzRd}} + \frac{k_{LT} (M_{ySd} + N_{Sd}\, e_{Ny})}{M_{byRd}} + \frac{k_z (M_{ySd} + N_{Sd}\, e_{Nz})}{M_{ozRd}} \leq 1$$

siendo e_{Ny} o e_{Nz} las excentricidades debidas al desplazamiento del eje neutro sólo para la compresión. Las resistencias N_{bRd} y N_{bzRd} se refieren al caso de compresión central; $M_{oy\,Rd}$ y $M_{by\,Rd}$ se refieren a la flexión sólo en el eje y; y $M_{oz,Rd}$ se refieren sólo a la flexión en el eje z (eje débil).

4. RESUMEN FINAL

1. El cálculo de elementos con sección clase 4 se efectúa como los de la sección clase 3 (análisis elástico, resistencia elástica de la sección transversal limitado por la fluencia de las fibras extremas), salvo que se aplica una sección transversal bruta (derivada de las secciones brutas con “agujeros efectivos”, donde puede producirse el pandeo).
2. La comprobación del pandeo de pilares y el pandeo lateral-torsional de vigas requiere calcular los valores críticos N_{cr} y M_{cr}, aplicando los datos de secciones brutas sin considerar los “agujeros efectivos”.
3. En el caso de pilares sin sección de doble simetría, la formación de “agujeros efectivos” podría causar un desplazamiento del eje neutro que produciría compresión excéntrica y de ahí, un problema de pilar excéntrico.
4. Los pilares excéntricos (compresión y flexión biaxial) se verifican mediante una fórmula de acción recíproca donde los cálculos del pilar sólo en compresión se combinan con los de la viga con flexión sólo en el eje y, y con los de la viga con flexión sólo en el eje z.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. “Eurocode 3: Part 1: Design of steel structures - General and buildings”

Commission of the European Communities, November 1990.

2. “Eurocode 3: Part 1: Annex A: Design of cold formed thin gauged elements and sheeting”.

CEN-TC250 Working Paper

3. “Eurocode 3: Background Document 5.5. (Justification of the design resistances, for buckling verifications)”

ESDEP PROBLEMA RESUELTO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.2: Padeo local

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA RESUELTO 9.2 PANDEO LOCAL

1. PROBLEMA

Se han unido por soldadura tres chapas de acero que constituyen una sección compuesta en I simétrica sólo por el eje de la chapa del alma. La sección que representa la Figura 1 se puede someter a esfuerzo axial o a flexión.

El acero de todas las chapas que componen la sección es de calidad S355. Se toma una resistencia a la fluencia de cálculo igual a la tensión mínima de fluencia, es decir, f_y = 355 N/mm.^{2}.

Factor $\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0,813$

El problema consiste en hallar las propiedades de la sección efectiva que se vaya a escoger para comprobar el esfuerzo axial y la flexión respectivamente.

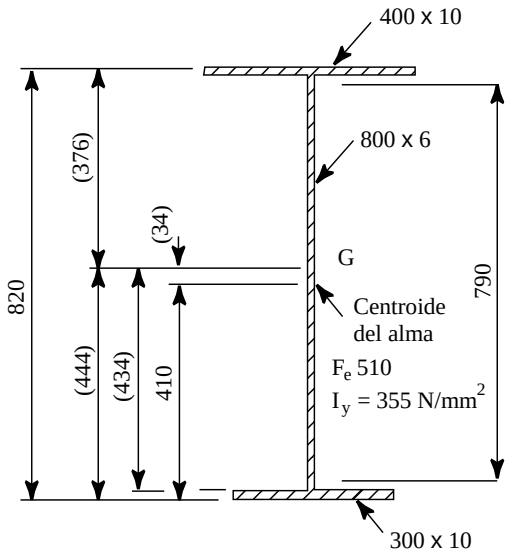


Figura 1 Sección tranversal bruta

Nota: Las cifras entre paréntesis proceden de los cálculos presentados en el apartado 3.

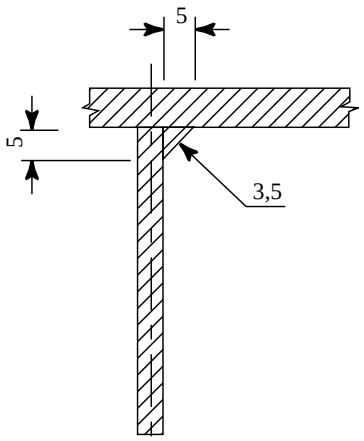


Figura 2 Soldadura en ángulo

Referencia en Eurocódigo 3

2. HIPÓTESIS

Se hacen las siguientes hipótesis:

a. Las soldaduras de cordón que unen el alma a ambas alas se desprecian para calcular las propiedades de la sección: área de la sección, segundo momento de inercia, etc.

b. Las soldaduras de cordón de la unión alma-alas se han representado con triángulos isósceles como se ve en la Figura 2; por tanto, el canto neto del alma medido entre la soldadura superior e inferior es de 790 mm.

c. Los límites de las relaciones b/t que se mencionan son los del Eurocódigo 3 [1], de donde se han tomado las tablas del Apéndice 1 de la Lección 9.2.1.

d. El criterio de cálculo es la aparición de la tensión de fluencia de cálculo en el centroide del ala más alargada, pero no en la fibra extrema más tensada; los módulos de la sección se calcularán consecuentemente.

[1] Eurocódigo 3: “Cálculo de Estructuras de Acero”: ENV 1993-1-1: Parte 1.1: Reglas Generales y Reglas para Edificios, CEN, 1992.

Referencia en Eurocódigo 3

3. PROPIEDADES DE LA SECCIÓN BRUTA

La sección bruta se compone de las planchas que la forman a sus dimensiones nominales. Se hacen los cálculos apropiados sobre la sección que muestra la Figura 1 que arrojan las siguientes propiedades.

3.1 Área de la sección A_g

$A_g = (400\ \ 10) + (300 \times 10) + (800 \times 6) = 11800\ mm.^2$

3.2 Posición z_g del centroide

La posición del centroide se define respecto a la fibra extrema inferior:

$z_g = [(4000 \times 815) + (4800 \times 410) + (3000 \times 5)]/11800 = 444\ mm$

3.3 Segundo momento de incercia respecto al eje yy

$$I_{yy} = \{[(400 \times 10^3) + (6 \times 800^3) + (300 \times 10^3)]/12$$
$$+ [4000 \times (376 - 5)^2] + [4800 \times (444 - 410)^2]$$
$$+ [3000 \times (444 - 5)^2]\}\ 10^{-4}$$
$$= 139033\ cm^4$$

3.4 Módulos de la sección

Relativo al centroide del ala superior:

$W_u = 139033/37{,}1 = 3747\ cm^3$

Relativo al centroide del ala inferior:

$W_l = 139033/43{,}9 = 3167\ cm^3$

Referencia en Eurocódigo 3

4. SECCIÓN EFECTIVA PARA LA COMPRESIÓN AXIAL

4.1 Determinación de la Clase de la Sección

Las relaciones b/t de las chapas de la sección se basan en la mitad de la anchura c de las alas y en el canto neto del alma d entre el reborde de las soldaduras superior e inferior, a saber:

Tabla 5.3.1(3)

- del ala superior: $c = 0,5 \times 400 = 200$ mm
  $c/t = 200/10 = 20$
- del ala inferior: $c = 0,5 \times 300 = 150$ mm
  $c/t = 150/10 = 15$
- del alma: $d = 800 - 5 - 5 = 790$ mm
  $d/t = 790/6 = 131,7$

Los valores límite de las relaciones b/t de las secciones Clase 3 son:

Tabla 5.3.1(1)

- de las alas: $(c/t)_{lim} = 15\ \varepsilon = 12,2$
- del alma: $(d/t)_{lim} = 42\ \varepsilon = 34,2$

Todas las chapas rebasan el límite indicado. Por tanto, la sección pertenece a la Clase 4 y hay que reducir la sección de cada chapa.

4.2 Determinación de las Anchuras Efectivas

La eficacia ρ de la zona de compresión de cada chapa se halla por medio de:

5.3.5(3)

$$\rho = (\bar{\lambda}_p - 0,22)/\bar{\lambda}_p^2 \leq 1$$

donde la esbeltez normalizada de la chapa $\bar{\lambda}_p$ viene dada por:

5.3.5(3)

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{(c/t)}{28,4\ \varepsilon \sqrt{k_\sigma}}$$

Referencia en Eurocódigo 3

para el ala superior: c/t = 20; $k_\sigma = 0,43 \rightarrow \overline{\lambda}_p = 1,32$
$\rho = 0,631$
$b_{eff} = 0,631 \times 400 = 253$ mm.

Tabla 5.3.3

para el ala inferior: c/t = 15; $k_\sigma = 0,43 \rightarrow \overline{\lambda} = 0,99$
$\rho = 0,786$
$b_{eff} = 0,786 \times 300 = 236$ mm.

para el alma: d/t = 131,7; $k_\sigma = 4 \rightarrow \overline{\lambda} = 2,84$
$\rho = 0,325$
$h_{eff} = (0,325 \times 790) + 5 + 5 = 268$ mm.

(Asignada a partes iguales de 134 mm. a ambos extremos)

Tabla 5.3.2

4.3 Propiedades de la Sección

La sección efectiva se representa en la Figura 3, con arreglo a los resultados obtenidos en el apartado 4.2.

4.3.1 Area de la sección $A_{eff,N}$

$A_{eff,N} = (253 \times 10) + (268 \times 6) + (236 \times 10) = 6498$ mm^2

4.3.2 Posición de centroide

$z_{g,N} = [(2530 \times 815) + (1608 \times 410) + (2360 \times 5)]/6498 = 421$ mm.

4.3.3 Desplazamiento del centroide

$e_N = z_g - z_{g,N} = 444 - 421 = 23$ mm.

Este desplazamiento genera un momento de flexión secundario

$\Delta M = N_{Sd}\, e_N$

que se superpone a M_{Sd}.

5. SECCIÓN EFECTIVA PARA LA FLEXIÓN

5.1 Determinación de la Clase de la Sección

Las relaciones b/t de las chapas de la sección se han calculado en el apartado 4.1.

El valor límite del ala en compresión de las secciones de Clase 3 es:

Referencia en Eurocódigo 3

Tabla 5.3.3

EC3 Tabla 5.3.1(3)

$(c/t)_{lim} = 15\ \varepsilon = 12{,}2$

y resulta superado. Por tanto, la sección pertenece a la Clase 4. Como las alas hacen mucho mayor aportación a la rigidez a la flexión, se recomienda reducir el ala en compresión antes de calcular el reparto de tensiones en el canto de la sección, en especial la relación de tensiones en el alma de la que depende su valor límite $(d/t)_{lim}$.

La anchura efectiva del ala en compresión se ha claculado en el apartado 4.2:

$b_{eff} = 253$ mm.

La sección que se va a estudiar en cuanto a la relación de tensiones en el ala es la de la Figura 4. El área de su sección es 10330 mm^2 y el centroide está situado a 392 mm de la fibra extrema inferior. La magnitud de las tensiones σ_l y σ_u, que muestra la Figura 4, es proporcional a la distancia centroide. Así, la relación de tensiones Ψ en el alma es como sigue:

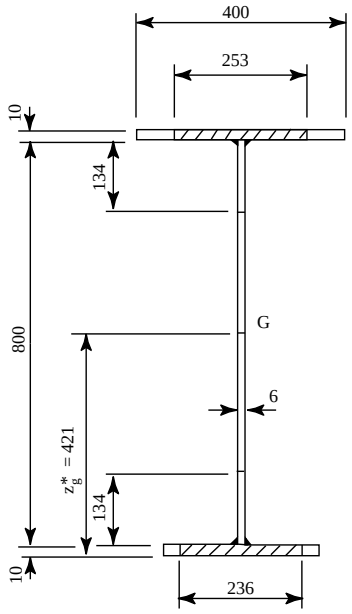


Figura 3 Sección transversal efectiva por compresión axial

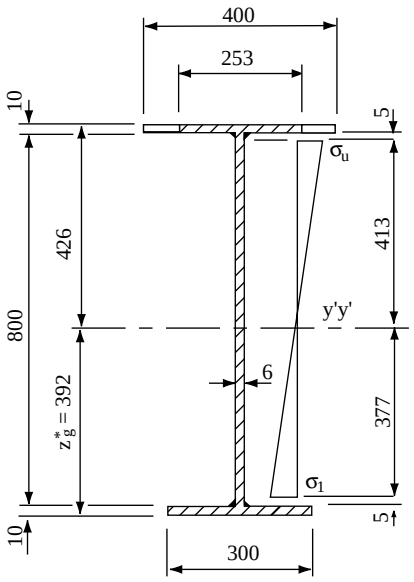


Figura 4 Sección transversal bruta utilizada para valorar el radio de tensión del alma (sección sujeta a flexión)

$$\psi = \frac{\sigma_l}{\sigma_u} = -\frac{377}{413} = -0,913$$

Referencia en Eurocódigo 3

El valor límite del alma $(d/t)_{lim}$ de la Clase 3 para el valor pertinente es: *Tabla 5.3.1(1)*

$$\frac{42\,\varepsilon}{0,67 + 0,33\,\psi} = 93$$

y se supera por mucho, pues (d/t) = 131,7. La sección, por tanto, pertenece a la Clase 4 y también hay que reducir el alma.

5.2 Determinación de las Anchuras Efectivas

La anchura efectiva del ala en compresión ya se ha calculado en el apartado 5.1. El ala en tracción es totalemnte efectiva (el cizallamiento es despreciable). Ahora estudiemos el alma sometida a compresión y flexión, caracterizada por la relación de tensiones que es Ψ = - 0,913 como primera aproximación.

El coeficiente de pandeo de la chapa del alma es: *Tabla 5.3.2*

k_σ = 7,81 - 6,29 Ψ + 9,78 Ψ2 = 21,7

de donde la esbeltez normalizada del alma: *5.3.5(3)*

$\overline{\lambda}$ = 1,22

y la eficacia del alma:

ρ = (1,22 - 0,22)/1,22^2 = 0,672 *5.3.5(3)*

Esta eficacia corresponde a la parte d_c del canto d que experimenta tensiones de compresión. Por consiguiente, la zona de compresión es efectiva en un canto de:

$(d_c)_{eff}$ = 0,672 $\times$ 413 = 278 mm. (pérdida = 413 - 278 = 135 mm.)

que hay que asignar a las fibras más y menos comprimidas de acuerdo con: *Tabla 5.3.2*

$(d_c)_{eff,u}$ = 0,4 $\times$ 278 = 111 mm.

$(d_c)_{eff,l}$ = 0,6 $\times$ 278 = 167 mm.

La distancia $(d_c)_{eff,u}$ se mide desde el reborde del cordón de la soldadura superior.

5.3 Propiedades de la sección

La Figura 5 presenta la sección efectiva, con arreglo a los resultados obtenidos en el apartado 5.2.

5.3.1 Área de la sección $A_{eff,M}$

$$A_{eff,M} = (253 \times 10) + [(116 + 549) \times 6] + (300 \times 10) = 9520 \text{ mm.}^2$$

5.3.2 Posición del centroide

$$z_{g,M} = [(2530 \times 815) + (696 \times 752) + (3294 \times 284{,}5) + (3000 \times 5)]/9520 = 372 \text{ mm.}$$

5.3.3 Segundo momento de inercia en el eje yy

$$I_{y"y"} = \{[(253 \times 10^3) + (6 \times 116^3) + (6 \times 549^3) + (300 \times 10^3)]/12 + [2530 \times 443^2] + [696 \times (438 - 58)^2] + [3294 \times (362 - 274{,}5\}^2] + (3000 \times 367^2)]\} 10^{-4} = 110986 \text{ cm}^4$$

5.3.4 Módulos de sección

Respecto al centroide del ala superior:

$W_u = 110986/44{,}3 = 2505 \text{ cm}^3$

Respecto al centroide del ala inferior:

$W_l = 110986/36{,}7 = 3024 \text{ cm}^3$

Referencia en Eurocódigo 3

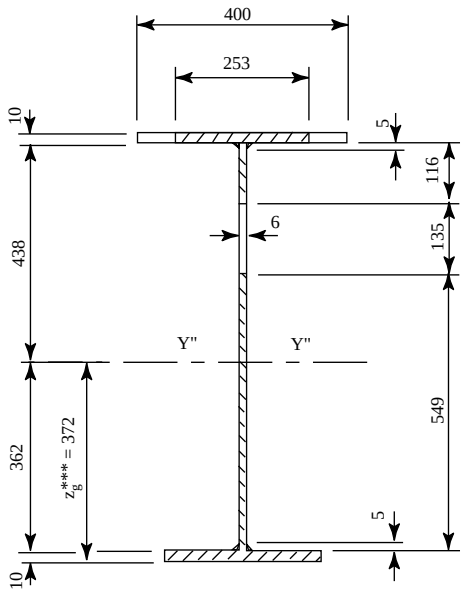


Figura 5 Sección transversal efectiva para flexión

5.4 Posibilidad de seguir mejorando

El reparto de tensiones que interesa para la sección efectiva hallada en el apartado 5.3 ofrece una segunda aproximación a la relación de tensiones Ψ:

$$\psi = \frac{362 - 5}{438 - 5} = 0,82$$

Este valor mejorado de la relación de tensiones resulta en:

k_σ = 19,7 — *Tabla 5.3.2*

$\bar{\lambda}$ = 1,28

ρ = 0,647 — *5.3.5(3)*

$(d_c)_{eff}$ = $0,647 \times 433 = 280$ mm.

La diferencia con el valor (278 mm.) no vale tenerla en cuenta en los cálculos siguientes.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.4.1: Elementos sometidos a tracción I

OBJETIVO

Describir las aplicaciones típicas de los elementos a tracción y explicar la derivación de la reglas del Eurocódigo 3.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Resistencia de materiales básica.

Compresión general del comportamiento de los materiales y del cálculo del estado límite.

LECCIONES AFINES

Lección 9.12.1: Celosías

Lección 13.1: Introducción al cálculo de uniones

Lección 16.6: Cálculo de celosías y soportes

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.3: Elementos sometidos a tracción I

RESUMEN

Esta lección introduce la aplicación en la construcción de los elementos de acero a tracción. Trata las formas de fallo de estos elementos especialmente en los orificios y las zonas de unión, y presentar las fórmulas de cálculo propuestas por el Eurocódigo 3.

1. INTRODUCCIÓN

La estabilidad estructural depende del equilibrio entre los elementos sometidos a esfuerzos de tracción y compresión. Por ser los materiales naturales más aptos para resistir la compresión, el objetivo tradicional del calculista ha sido evitar los esfuerzos de tracción mediante sistemas ingeniosos, como el arco, la bóveda y la cúpula. Pero con un tratamiento especial de los materiales naturales se pueden idear estructuras, usualmente temporales, en las que los elementos a tracción representan papeles fundamentales (Figura 1). Incluso en construcciones fundamentalmente masivas se encuentran elementos a tracción que contribuyen a estabilizarlas (Figura 2). La revolución industrial, en cuya época se introdujeron los materiales ferrosos, produjo grandes avances en el empleo de elementos a tracción, pues ya se podía transmitir la tracción pura con seguridad y sin los problemas de duración que tenían los materiales naturales anteriores.

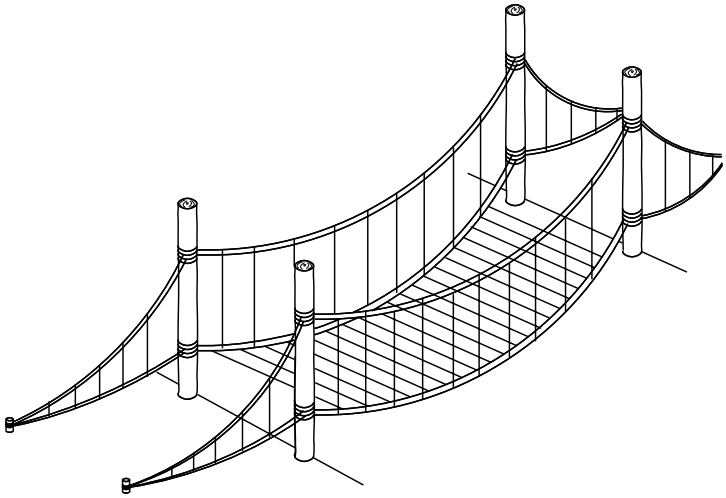


Figura 1 Puente temporal primitivo

En la Figura 3 se exponen algunas formas estructurales sencillas con elementos sometidos a tracción: una cubierta inclinada con una viga en tracción y una celosía cuyo cordón inferior y

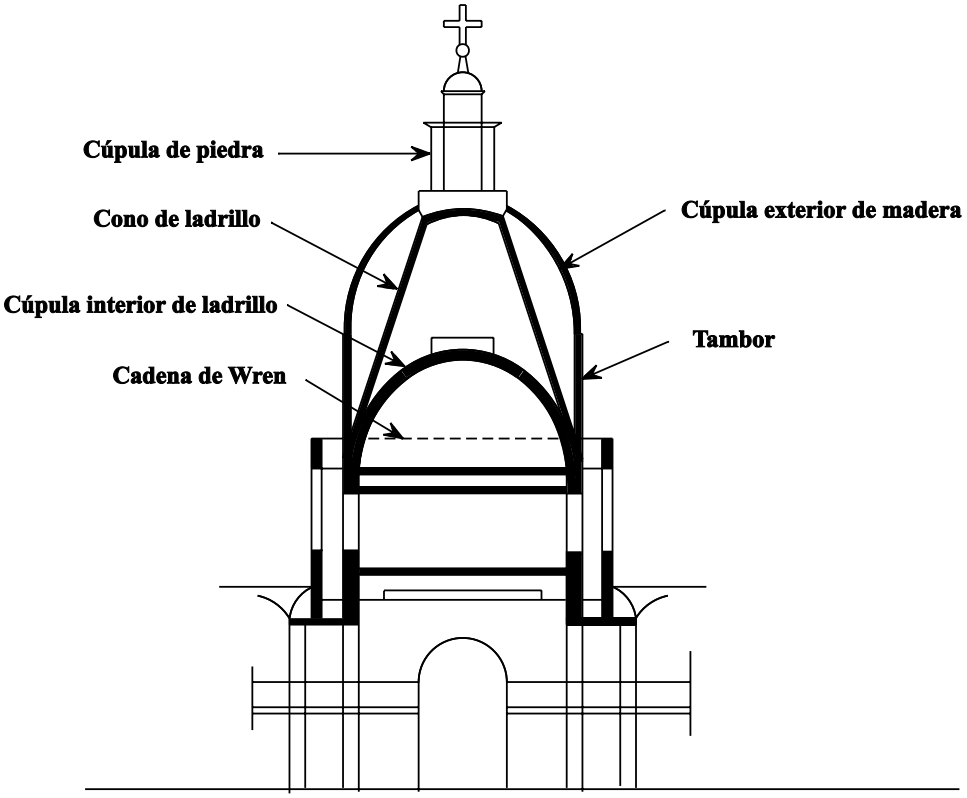


Figura 2 Elementos de una vieja estructura (Catedral de S. Pablo, Londres)

varios tirantes están en tracción. Más recientemente se recurre al cable como elemento de tracción en estructuras de cubiertas, puentes, mástiles y grúas. La presente lección se ocupa de los elementos de tracción convencionales; los cables se tratan en la Lección 9.4.2.

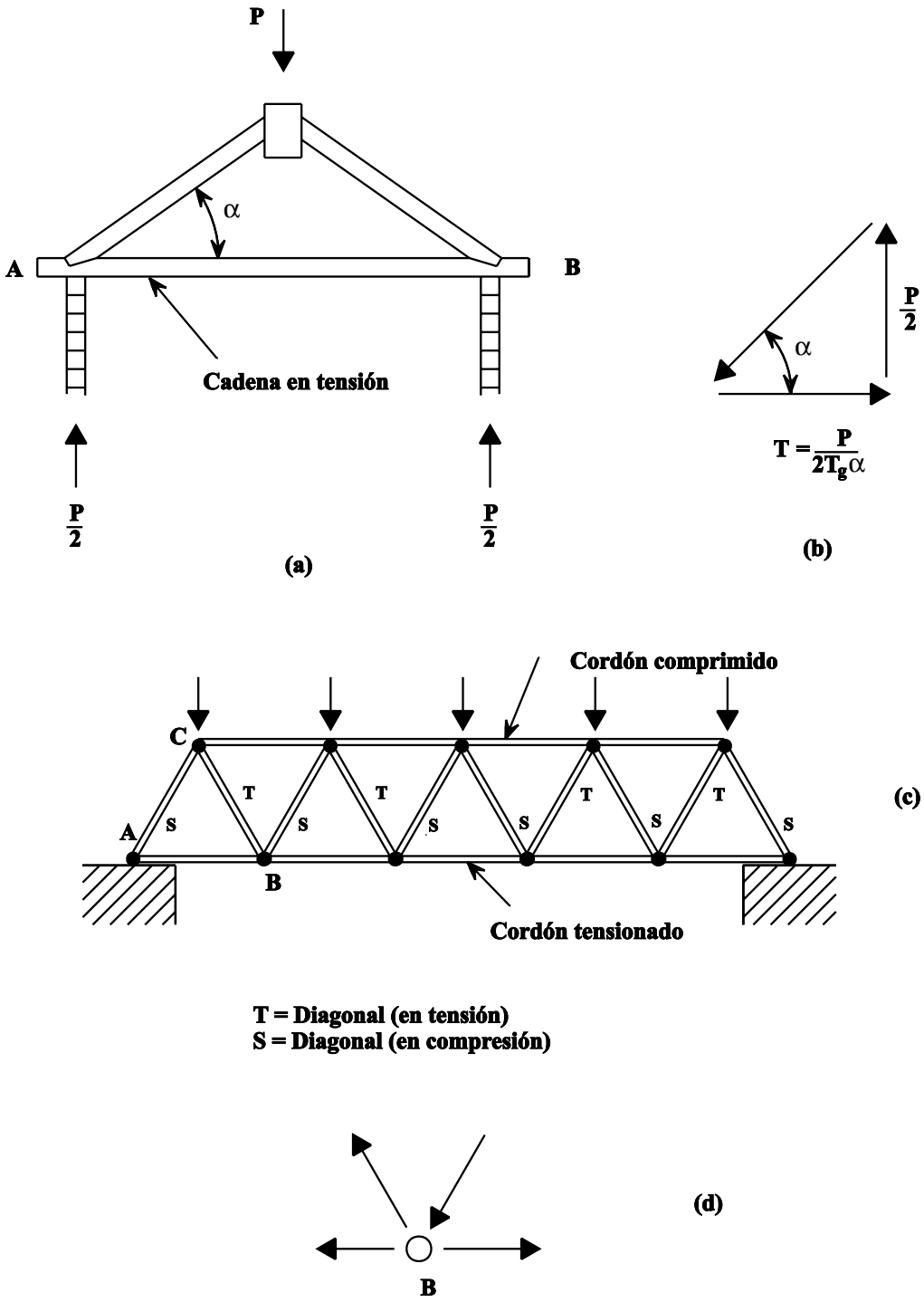


Figura 3 Elementos de una estructura

2. COMPORTAMIENTO DE LAS SECCIONES DE LOS ELEMENTOS EN TRACCIÓN

2.1 En general

Generalmente, los elementos a tracción se proyectan a partir de perfiles, barras o pletinas. Cuando se necesita más superficie o lo exige el proyecto de las uniones, se combinan perfiles o se arma un perfil especial con chapas (Figura 4). No suelen hacerse con pletinas por ser muy flexibles; en buena práctica, la esbeltez se limita a 300 en los elementos principales y 400 en los secundarios (obviamente, esta regla no se aplica a las barras redondas). En general se prefieren los perfiles laminados y los compuestos se reservan para las cargas mayores, o para resistir momentos de flexión además de los de tensión.

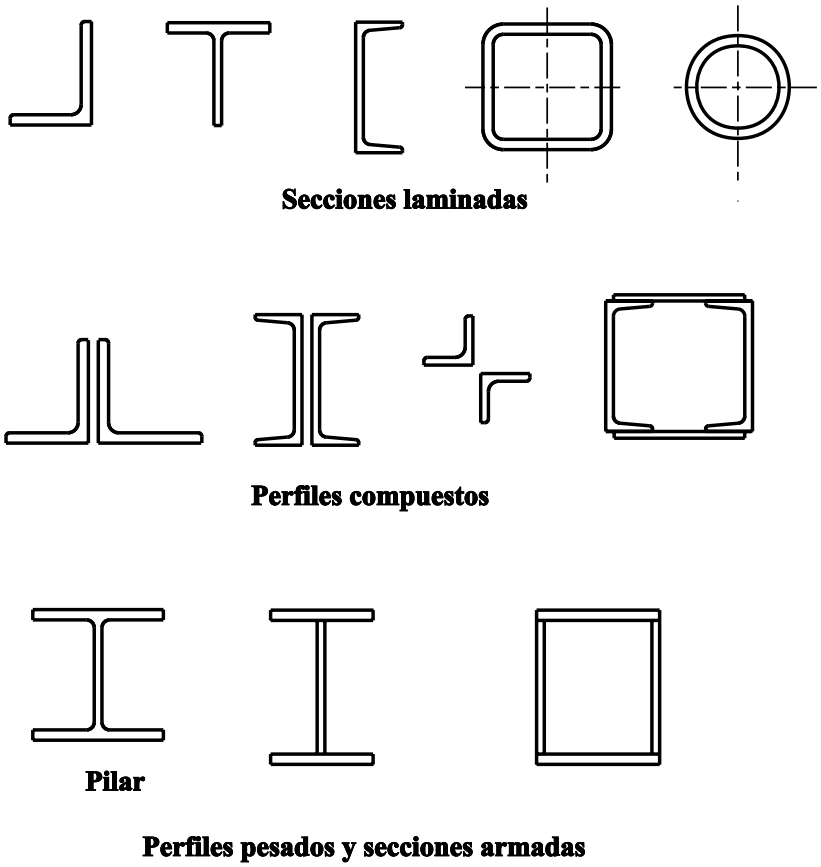


Figura 4 Secciones transversales

En general, se supone que los esfuerzos se reparten uniformemente en la sección de los elementos sometidos a tracciones axiales. Pero hay parámetros que producen un reparto desigual de los esfuerzos, a saber:

- tensiones residuales
- uniones.

La influencia de estos parámetros en el comportamiento de la sección se comenta en los apartados 2.2 y 2.3

2.2 Tensiones residuales

Las tensiones residuales se crean al fabricarse los elementos y se deben al proceso de producción. Su origen puede ser térmico, ya sea por la solidificación del acero o al soldar partes de la pieza; o pueden provocarse mecánicamente al intentar corregir una deformación o enderezar la pieza. Las tensiones inducidas se equilibran por sí solas, y aunque no afectan a la resistencia final, provocan desalineamientos en el comportamiento tensión-deformación, así como mayor posibilidad de deformación.

Considérese, por ejemplo, un perfil rectangular con tensiones residuales, sometida a un esfuerzo axial (Figura 5); aunque el reparto de tensiones que causa este esfuerzo es uniforme, el correspondiente reparto de la tensión total no lo es. Cuando las tensiones combinadas (Figura 5c) llegan a la resistencia a la fluencia f_y, comienza la fluencia de las fibras afectadas y la parte elástica de la sección se reduce paulatinamente al aumentar la fuerza externa (Figura 5d); el estado límite máximo se alcanza cuando toda la sección está en fluencia. Pese a que el comportamiento de la

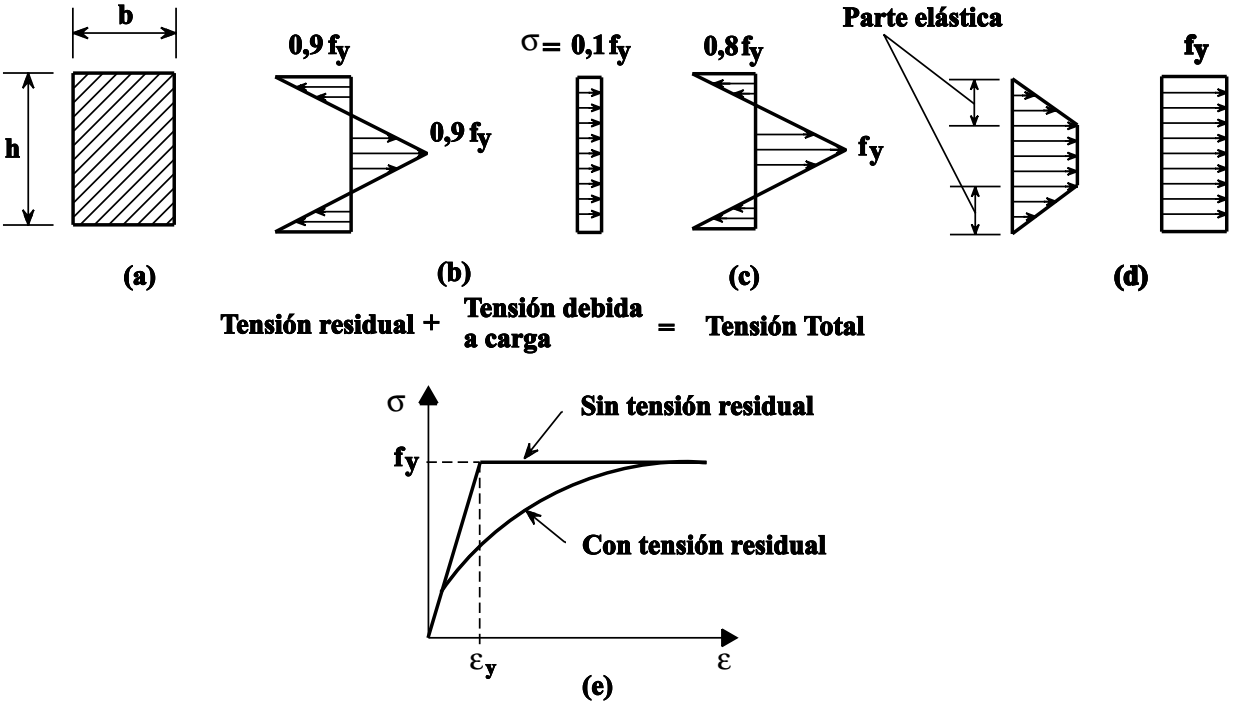


Figura 5 Influencia de tensión residual en el comportamiento de una sección transversal

sección no es lineal (Figura 5e), el estado límite máximo es idéntico en ambos casos y sin tensiones residuales.

2.3 Uniones

Las uniones se hacen generalmente con pernos o con soldadura.

Para unir varias piezas hay que poner cartelas adicionales que introducen efectos secundarios por los momentos que se forman. A veces se pueden reducir estas excentricidades locales variando la longitud de las soldaduras o la posición de los pernos.

Además, los orificios que se abren para poner los pernos modifican significativamente la conducta de la sección.

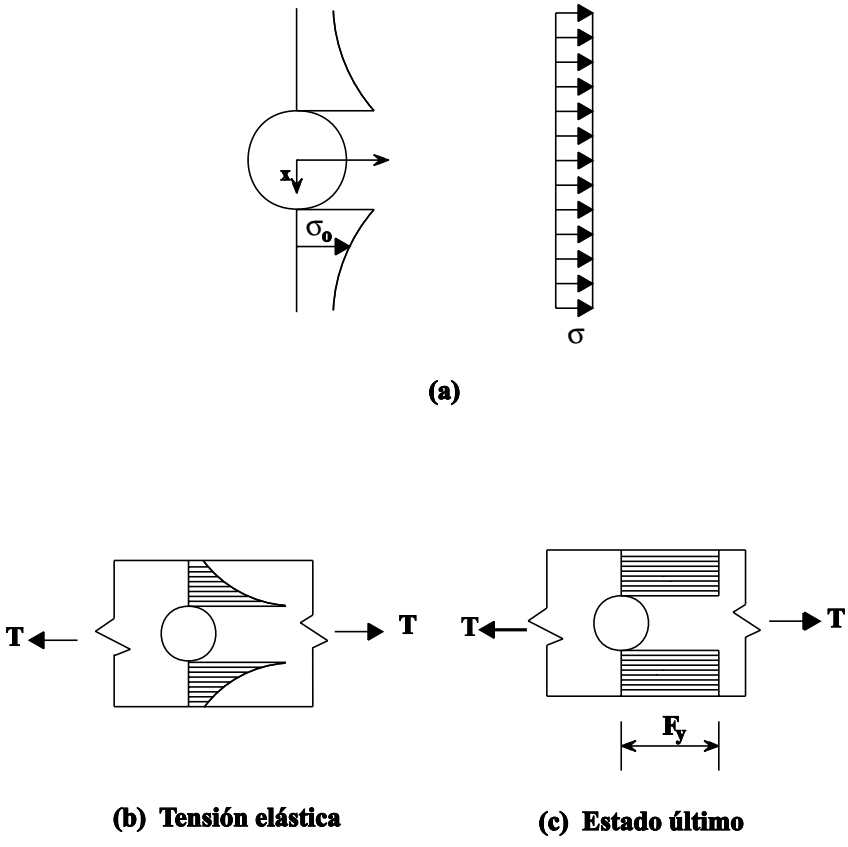


Figura 6 Distribución de tensiones en una sección con agujeros

En primer lugar, se produce una reducción de área que debe tenerse en cuenta, así como una distorsión en el reparto de tensiones que induce deformación de tracción no uniforme; el efecto de los orificios es aumentar las tensiones localmente a su alrededor (Figura 6). En una placa de anchura infinita, el reparto viene dado por:

$$\sigma_0 = \sigma\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^4\right] \qquad (1)$$

para $x \geq R$

siendo R el radio del orificio

x la distancia al punto en cuestión

cuando $x = R$

$\sigma_0 = \max \sigma_0 = 3\sigma$

Lo anterior sugiere que las secciones donde haya orificios deben ser netas para compensar el efecto de debilitamiento.

Debe decirse que, aunque los códigos no lo prevén, el área neta podría tener que aceptar varios efectos que influyen en la eficacia de la unión; estos son la ductilidad del metal, el cuidado con que se hagan los orificios (las grietas reducen la ductilidad) y la relación entre el diámetro de los orificios y la distancia entre ellos (que induce un efecto de empotramiento).

3. ANÁLISIS

Los cálculos de los elementos en tensión se refieren generalmente a valorar su resistencia; pero debido a la gran esbeltez que permite el aprovechamiento óptimo del material, también es muy importante comprobar la rigidez.

3.1 Condiciones de rigidez

Los elementos a tracción suelen estar sometidos a una flexión bien causada por su propio peso, efectos dinámicos del viento o de cargas móviles o incluso excentricidades inevitables. Las reglas de buena práctica suelen preverlas y generalmente no es preciso calcularlas con rigor; en el apartado 2.1 se dijo que el límite es de 300 ó 400 para los elementos primarios y secundarios respectivamente; sin embargo, algunos códigos estadounidenses son más estrictos, ver tabla 1.

Esta lección se limita al caso a); sobre los elementos en tensión en condiciones de fatiga se remite a las Lecciones 14.

Si el elemento no tiene taladros, la resistencia de cálculo al esfuerzo axial viene dada por:

$$N_{p1Rd} = \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}} \qquad (2)$$

siendo:

- A el área bruta de la sección.
- f_{yk} el valor característico de la resistencia a la fluencia.
- γ_{M1} el factor parcial de seguridad de la sección bruta ($\gamma_{M1} \approx 1{,}1$).

Cuando el elemento está unido con pernos, la sección se debilita al sufrir una reducción del 10 al 20% del área bruta. Esto origina dos problemas; primero, reducción del área neta, y

	AISC	AASHTO
Estructura principal	240	200
Estructura secundaria	300	240
Cargas móviles	–	140

Límite de esbeltez λ para elementos en tensión

$\lambda = L/i$ $\qquad$ $i^2 = I/A$

siendo:

L la longitud del elemento.

i el radio de giro mínimo.

I el momento de inercia mínimo de la sección.

A el área de la sección.

TABLA 1

3.2 Resistencia de la sección

Los cálculos de resistencia deben comprobar:

a) El comportamiento con cargas estáticas, y

b) El comportamiento con cargas móviles

segundo, que los orificios ocasionen una concentración de tensiones que, según la ecuación (1) y la Figura 6, pueden alcanzar valores tres veces mayores que la distribución uniforme. Sin embargo, se supone que en el estado límite máximo, debido a la ductilidad del acero, el reparto de tensiones es uniforme en toda la sección neta.

El diámetro de los orificios debe incrementarse para tener en cuenta el daño que sufre el material si se punzona sin precauciones especiales; si los orificios son avellanados, debe reducirse el diámetro total.

3.2.1 Área neta

El Eurocódigo 3 dice: "el área neta de una sección o elemento con perfil ha de tomarse como área bruta, menos las deducciones correspondientes a los taladros y otras aberturas. Si los taladros para sujeciones no están a tresbolillo, el área total que se deduzca será la suma máxima de las áreas de los taladros de toda sección perpendicular el eje de la sección".

Si los taladros están al tresbolillo, se necesita una fórmula especial para calcular la deducción (Figura 7a). El reparto de tensiones expuesto en el apartado 2 es más complicado en este caso y se aplica la regla de Cochrane para sumar la longitud $S^2/4g$. Por este motivo el Eurocódigo indica lo siguiente; "Si los taladros para sujeciones están al tresbolillo, el área total que se deduzca por dichos taladros será la mayor de:

a) la deducción de taladros que no estén al tresbolillo.

b) la suma de las áreas de todos los taladros que estén en diagonal o zigzag extendiéndose gradualmente por el elemento o parte del mismo, menos $S^2t/4g$ por cada espacio de calibre de la serie de taladros (Figura 7a).

S es el paso de tresbolillo, o la distancia de los centros de dos taladros consecutivos de la cadena medida paralelamente al eje del elemento.

g es el calibre, o el espacio de los centros de los mismos dos taladros, medido perpendicularmente al eje del elemento.

t es el espesor.

En un perfil angular u otro elemento con taladros en más de un plano, el espacio se ha de medir en el centro del espesor del material (Figura 7b).

3.2.2 Resistencia de las secciones netas

En principio, el cálculo del área neta debe hacerse como sigue:

$$N_R = \frac{A_{net} \cdot f_{yk}}{\gamma M_2} \qquad (3)$$

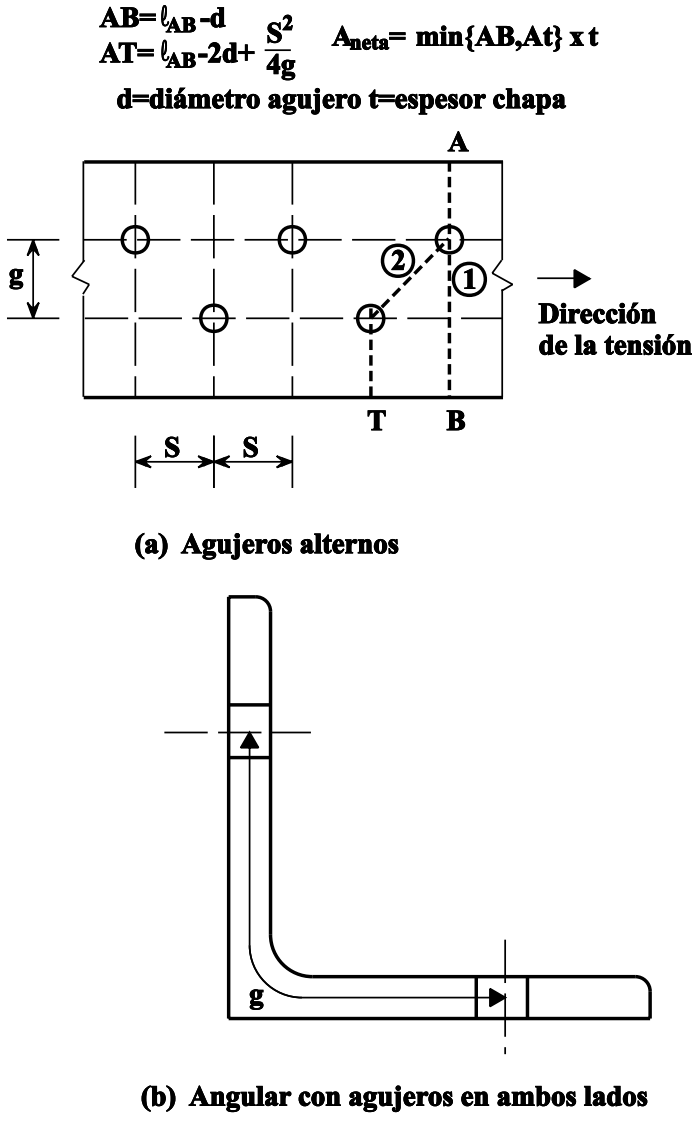


Figura 7 Cálculo del área neta

siendo:

A_{net} el área neta

γ_{M2} el factor parcial de seguridad de área neta ($\gamma_{M2} \approx 1{,}25$)

No obstante, se ha de tener en cuenta el comportamiento global del elemento en tracción. Imaginemos, por ejemplo, que la longitud afectada por la unión es alrededor de 5% de la total del elemento; supongamos luego que la deformación a la carga de rotura de la unión es 10 veces el límite elástico (Figura 8). Cuando el elemento llega al estado de fluencia y la unión al de rotura, los aumentos de longitud serían:

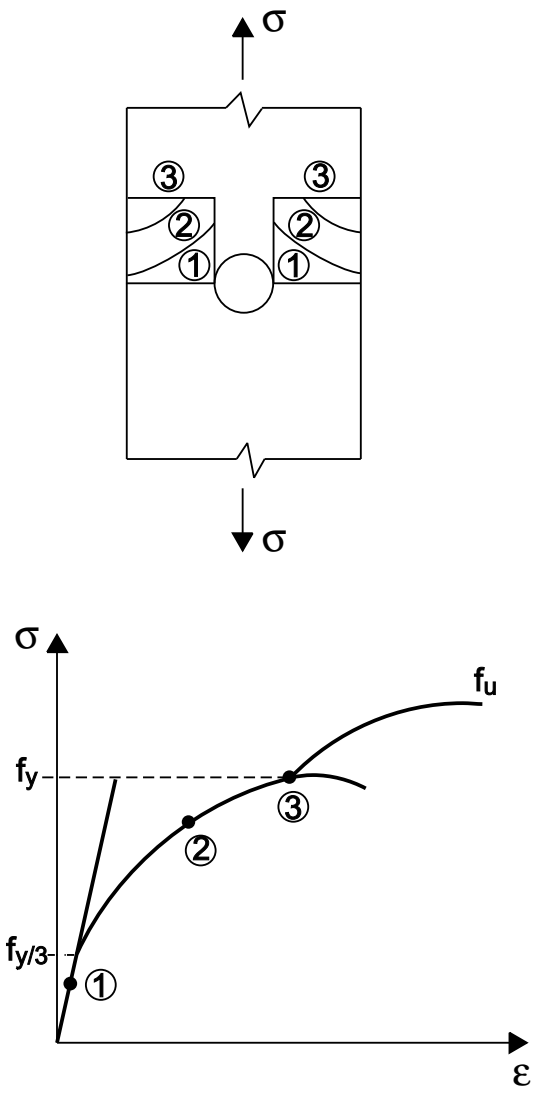


Figura 8 σ-ε diagrama en la sección neta

Zona de la unión:

$$\Delta l_c = \frac{5}{100} 10 \in_y L_{TOT} = 0{,}5 \in_y L_{TOT}$$

Zona del elemento:

$$\Delta l_m = \frac{95}{100} \in_y L_{TOT} = 0{,}95 \in_y L_{TOT}$$

Es decir $\Delta l_c / \Delta l_m \approx 0{,}5$ (4)

Lo que significa que el alargamiento en la zona de la unión es mucho menor que en toda la barra.

Es por esto que el Eurocódigo 3 permite exceder la resistencia elástica de la zona de unión hasta la resistencia a la tracción hasta la rotura, f_{uk}, o sea, se supone implícitamente que el fallo de un elemento se puede describir por esta deformación.

Otros códigos aplican la misma filosofía que, como el Eurocódigo 3, incluyen un coeficiente de reducción para incorporar las excentricidades inevitables, las concentraciones de esfuerzos, etc. La reducción del Eurocódigo 3 es del 10%, por lo que la fórmula recomendada es:

$$N_{netRd} = \frac{0{,}9\, A_{net}\, f_{uk}}{\gamma M_2} \quad (5)$$

siendo γ_{M2} el factor parcial de seguridad para la resistencia, con un valor propuesto de 1,25.

3.2.3 Verificación

La fórmula de verificación es:

$$N_{Sd} \leq N_{Rd} \quad (6)$$

siendo N_{Sd} el esfuerzo de tensión de cálculo, y

N_{Rd} la fuerza de resistencia de cálculo, que es el menor de los valores dados por las ecuaciones 2 y 5.

Si se desea un comportamiento dúctil, en la Figura 8 puede verse que el elemento tiene que ceder antes de que la unión falle, o sea:

$$N_{p1Rd} \leq N_{netRd} \qquad (7)$$

o bien,

$$0,9 \frac{A_{net}}{A} \geq \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M1}} \frac{f_{yk}}{f_{uk}} \qquad (8)$$

Por último, el Eurocódigo 3 considera la verificación de la uniones clase C, que son antideslizantes con pernos de gran resistencia presolicitados y no pueden deslizarse en el estado límite máximo.

En este caso, el criterio de rotura de la sección neta es uno de fluencia, al contrario que la ecuación 5, y así la resistencia de cálculo viene dada por:

$$N_{netRd} = A_{net} \frac{f_{yk}}{\gamma_{M_1}} \qquad (9)$$

4. RESUMEN FINAL

1. La existencia de elementos de tracción aumenta grandemente el número de formas estructurales posible.
2. Los elementos de tracción pueden tener secciones variadas; para aprovechar su plena capacidad es necesario considerar los efectos de las tensiones residuales y de la forma de la unión.
3. La resistencia de un elemento en tracción se calcula en la suposición de que todo el elemento ha entrado en fluencia.
4. Los modos de fallo de un elemento de tracción se definen, bien por la fluencia de la sección bruta o por la rotura de la sección neta. Las resistencias de cálculo se hallan aplicando factores de seguridad parciales a las resistencias correspondientes.
5. Si se contempla un comportamiento dúctil, p.ej.: para cargas cíclicas, la fluencia de la sección bruta debe preceder a la rotura de la sección neta.
6. La esbeltez de los elementos de tracción debe ser reducida para evitar las deflexiones excesivas durante el transporte, el montaje, las tareas de conservación, etc.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Dowling, P. J., Knowles, P., Owens, G. W., “Structural Steel Design”, The Steel Construction Institute & Butterworths, 1988.

2. Worgan, W., “The Elements of Structure”, Pitman 1964.

3. Moutklanov, K., “Constructions Métalliques”, MIR 1978.

4. Salmon, C. G. y Johnson, J. E., “Steel Structures, 2nd Edition”, Harper & Row 1980.

5. Torroja, E., “Razón y Ser de los Tipos Estructurales”, IETCC, 1960.

6.Zignoli, V., “Construzioni Metalliche”, UTET, 1978.

7. Chr. Petersen, Stahlbauten, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1988.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.3 (i), (ii) y (iii): Elementos sometidos a Tracción I

CONTENIDO

Problema resuelto 9.3(i): Elementos de chapa con taladros alineados y uniones anticizalla pertenecientes respectivamente a la categoría A, B y C.

Problema resuelto 9.3(ii): Elementos de chapa con taladros a tresbolillo.

Problema resuelto 9.3(iii): Angulares unidos por un extremo.

NOTAS PREVIAS

Siempre que procede se han hecho los cálculos con arreglo al Eurocódigo 3 [1]. Estos problemas resueltos complementan el texto de la Lección 9.4.1.

Los elementos en tracción se suelen unir al resto de la estructura con medios anticizallamiento (Lección 13.4), cuyo agotamiento puede relacionarse con:

- la resistencia al cizallamiento de los pernos;
- la resistencia al deslizamiento al nivel de los pernos;
- la capacidad portante de los elementos unidos.

Como estos ejemplos resueltos se ocupan de los elementos sometidos a tracción, se han pensado de modo que se evite el colapso. Por consiguiente, sólo se comprueba la resistencia de los elementos en tracción (sección bruta y neta).

La posición de los taladros para pernos cumple con la claúsula 6.5.1 del Eurocódigo 3 [1].

[1] Eurocódigo 3: “Cálculo de Estructuras de Acero”: ENV 1993-1-1: Parte 1.1: Reglas Generales y Reglas para Edificios, CEN, 1992.

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.3(i)

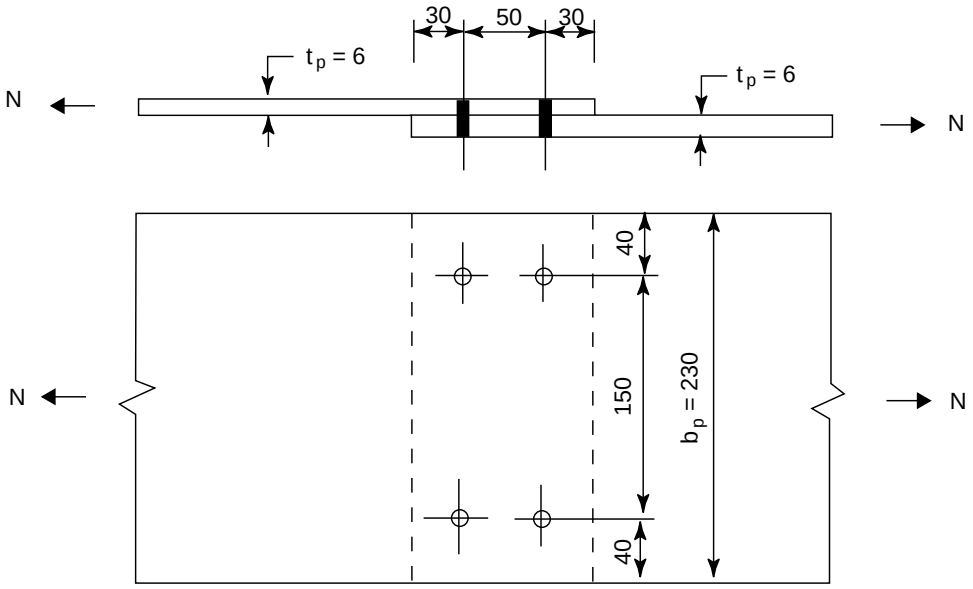
Problema

Evaluar la resistencia de cálculo a la tracción de los siguientes elementos unidos por medio de:

a. Pernos 10.9 sin precarga (unión anticizalla perteneciente a la categoría A - Lección 13.3.1); *6.5.3.1*

b. Pernos 10.9 de precarga con apriete regulado (unión anticizalla perteneciente a la categoría B - Lección 13.3.2);

c. Pernos 10.9 precargados con apriete regulado (unión anticizalla perteneciente a la categoría C - Lección 13.3.2);



Datos

- Acero Fe 360.
- Diámetro nominal, d_b, de los pernos: 16 mm.
- Diámetro nominal, d_o, de los agujeros para pernos: 18 mm.

Referencia en Eurocódigo 3

El valor de cálculo del esfuerzo de tracción N_{Sd} de cada sección no debe ser mayor que la resistencia a la tracción de cálculo de la sección bruta $N_{t.Rd}$:

a. En el caso de una unión anticizalla de la categoría A, $N_{t.Rd}$ se toma como el menor de $N_{pl.Rd}$ y $N_{u.Rd}$. *5.4.3(1)*

La resistencia plástica de cálculo de la sección $N_{pl.Rd}$, es igual a: *5.4.3(1)*

$$N_{pl.Rd} = A\, f_y / \gamma_{M0}$$

siendo: $A = b_p\, t_p$, el área de la sección bruta *5.4.2.1*

$$= 230 \times 6 = 1380 \text{ mm}^2$$

$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_{M0} = 1{,}1$

$$N_{pl.Rd} = 1380 \times 235/1{,}1 = 294{,}8 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 294{,}8 \text{ kN}$$

La resistencia de cálculo a la rotura de la sección neta, $N_{u.Rd}$, es igual a: *5.4.3(1)*

$$N_{u.Rd} = 0{,}9\, A_{net}\, f_u / \gamma_{M2}$$

con: A_{net} = el área de la sección neta *5.4.2.2*

$$= [b_p - 2\, d_o]\, t_p$$

$$= [230 - 2 \times 18] \times 6 = 1164 \text{ mm}^2$$

$f_u = 360 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_{M2} = 1{,}25$

$$N_{u.Rd} = 0{,}9 \times 1164 \times 360/1{,}25 = 301{,}7 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 301{,}7 \text{ kN}$$

Así, la resistencia de cálculo a la tracción de la sección $N_{t.Rd}$, es igual a:

$$N_{t.Rd} = N_{pl.Rd}$$

$$= 294{,}8 \text{ kN}$$

Referencia en Eurocódigo 3

Si tiene que agotarse por ductilidad, la resistencia plástica de cálculo $N_{pl.Rd}$ debe ser menor que la resistencia de cálculo a la rotura de la sección neta $N_{u.Rd}$: *5.4.3(4)*

$N_{pl.Rd} < N_{u.Rd}$

Esta condición se cumple en este caso.

b. En el caso de que la unión anticizalla pertenezca a la categoría B, el resto de la resistencia a la fricción en el estado límite último, después del deslizamiento, es pequeño y en la práctica se puede despreciar. El procedimiento para calcular la resistencia nominal a la tracción del elemento es entonces el mismo que en el caso de la unión anticizalla de la categoría A.

Así, $N_{t.Rd}$ es igual a:

$N_{t.Rd} = 294{,}8$ kN

Las condiciones del agotamiento por ductilidad son las mismas que en la unión anticizalla de la categoría A. Esta condición se cumple también en este caso.

c. En el caso de una unión anticizalla perteneciente a la categoría C, calculada para resistir el deslizamiento en el estado límite último, la sección neta en los taladros para las uniones debe tomarse como: *5.4.2(2)*

$$N_{net \cdot Rd} = \frac{A_{net}\, f_y}{\gamma_{M0}}$$

siendo $A_{net} = 1164$ mm^2 (ver caso A)

$f_y = 235$ N/mm^2

$\gamma_{M0} = 1{,}1$

$N_{net.Rd} = 1164 \times 235/1{,}1 = 248{,}7 \times 10^3$ N

$= 248{,}7$ kN

La resistencia a la rotura del elemento debe tomarse como:

$N_{t.Rd} = N_{net.Rd}$

$= 248{,}7$ kN

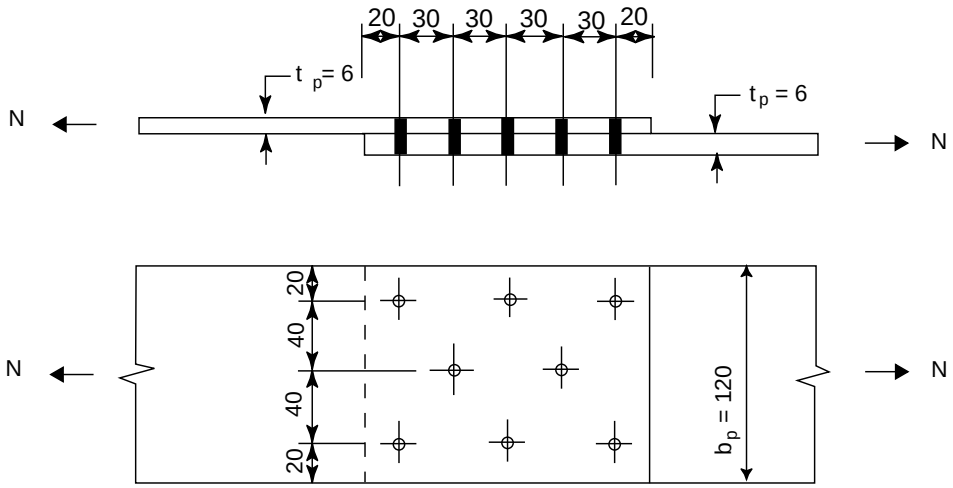
El agotamiento es dúctil en cualquier modo de colapso.

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.3(ii)

Problema

Evaluar la resistencia de cálculo a la tracción de los siguientes elementos unidos entre sí por pernos 8.8 sin pretensar.



Datos

- Acero S355
- Diámetro nominal, d_b, de los pernos: 12 mm.
- Diámetro nominal, d_o, de los taladros para pernos: 13 mm.

La resistencia de cálculo a la tracción de la sección $N_{t.Rd}$ se toma al valor menor de $N_{pl.Rd}$ y $N_{u.Rd}$.

- La resistencia plástica de cálculo de la sección bruta $N_{pl.Rd}$ es igual a: *5.4.3(1)*

$$N_{pl.Rd} = A\, f_y / \gamma_{M0}$$

siendo: $A = b_p\, t_p$, area de la sección bruta *5.4.2.1*

$= 120 \times 6 = 720\ mm^2$

$f_y = 355\ N/mm^2$

$\gamma_{M0} = 1{,}1$

Referencia en Eurocódigo 3

$$N_{pl.Rd} = 720 \times 355/1{,}1 = 2323{,}6 \times 103 \text{ N}$$

$$= 2324 \text{ kN}$$

La resistencia de cálculo a la rotura de la sección neta $N_{u.Rd}$, es igual a: *5.4.3(1)*

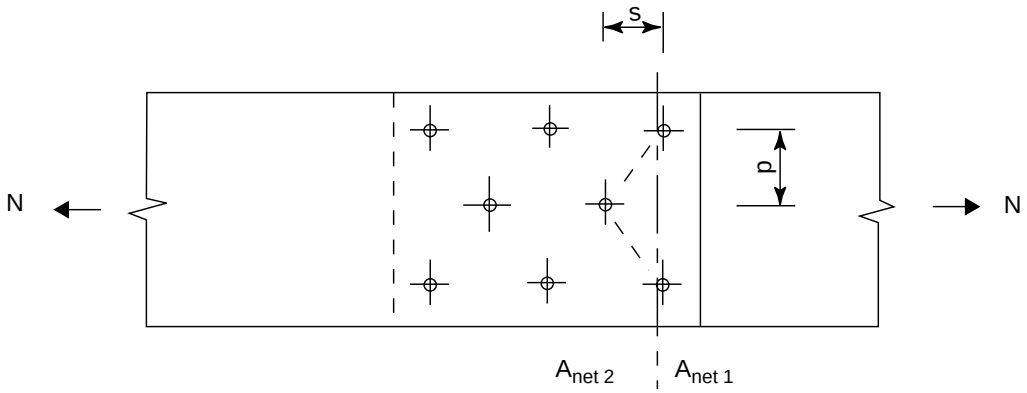
$$N_{u.Rd} = 0{,}9\, A_{net}\, f_u / \gamma_{M2}$$

siendo: A_{net} el área de la sección neta *5.4.2.2*

$f_u = 510 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_{M2} = 1{,}25$

En este caso, hay que distinguir dos secciones netas críticas (ver la figura abajo); ambas deben soportar todo el esfuerzo de tracción N.



$$A_{net.1} = [b_p - 2\, d_o\,]\, t_p$$

$$= [120 - 2 \times 13] \times 6 = 564 \text{ mm}^2$$

$$A_{net.2} = [b_p - 3\, d_o + 2\, s^2\, t_p / 4p]\, t_p \quad \textit{5.4.2.2(4)}$$

$$= [120 - 3 \times 13 + 2 \times 30^2 \times 6/(4 \times 40)] \times 6$$

$$= 891 \text{ mm}^2$$

$$A_{net} = \min (A_{net.1} ; A_{net.2})$$

$$= A_{net.1}$$

$$= 564 \text{ mm}^2$$

Referencia en Eurocódigo 3

$N_{u.Rd} = 0,9 \times 564 \times 510/1,25 = 207,1 \times 10^3$ N

$= 207,1$ kN

Así, la resistencia de cálculo a la tracción de la sección $N_{t.Rd}$ es igual a:

$N_{t.Rd} = N_{u.Rd}$

$= 207,1$ kN

Se obtiene el agotamiento dúctil cuando: *5.4.3(4)*

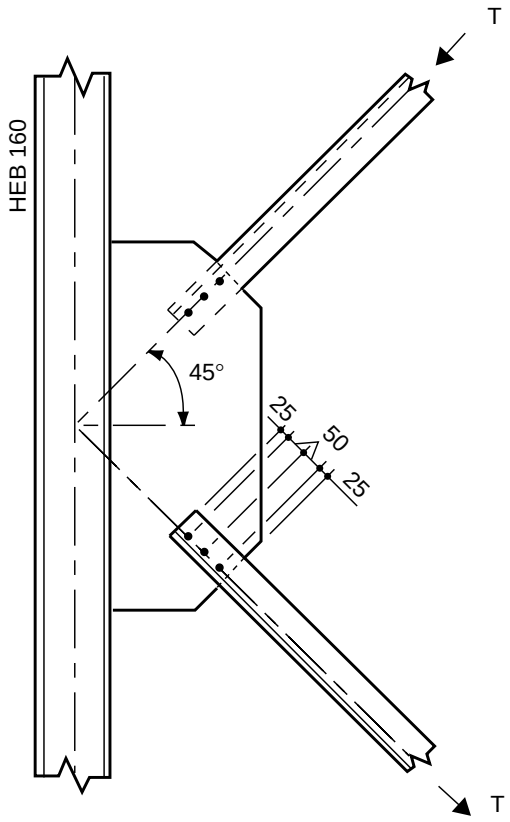
$N_{pl.Rd} < N_{u.Rd}$

Esta condición no se cumple en este caso.

PROBLEMA 9.3(iii)

Problema

Evaluar la resistencia de cálculo a la tracción del siguiente angular sometido a un esfuerzo de tracción.



Datos

- Acero Fe 360
- Angular de $50 \times 50 \times 6$
- Diámetro nominal, d_b, de los pernos: 12 mm.
- Diámetro nominal, d_o, de los taladros para pernos: 13 mm.
- Pernos 8.8 sin pretensar

Referencia en Eurocódigo 3

Solución

La resistencia de cálculo a la tracción de la sección $N_{t.Rd}$ se toma al valor menor de $N_{pl.Rd}$ y $N_{u.Rd}$. *5.4.3(1)*

La resistencia plástica de cálculo de la sección bruta, $N_{pl.Rd}$., es igual a:

$N_{pl.Rd} = A f_y / \gamma_{M0}$ *5.4.3(1)*

siendo: A el área de la sección bruta *5.4.2.1*

$= 569 \text{ mm}^2$ *6.6.10*

$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_{M0} = 1,1$

$N_{pl.Rd} = 569 \times 235/1,1 = 121,6 \times 10^3 \text{ N}$

$= 121,6 \text{ kN}$

- La resistencia de cálculo a la rotura de la sección neta, $N_{u.Rd}$, es igual a: *5.4.3(1) 6.5.2.3 6.6.10*

$N_{u.Rd} = \beta_3 A_{net} f_u / \gamma_{M2}$ *Tabla 6.5.1*

siendo: $\beta_3 = 0,5 + \frac{0,7 - 0,5}{5,0 - 2,5}(p_1 / d - 2,5)$

$= 0,5 + \frac{0,7 - 0,5}{5,0 - 2,5}(50 / 13 - 2,5)$

$= 0,608$

A_{net} es el área de la sección neta efectiva

$= A - d_o \times t_a$ [t_a es el espesor del angular]

$= 569 - 13 \times 6 = 491 \text{ mm}^2$

$f_u = 360 \text{ MPa}$

$\gamma_{M2} = 1,25$

$N_{u.Rd} = 0,608 \times 491 \times 360/1,25 = 86,0 \times 10^3 \text{ N}$

$= 86 \text{ kN}$

Referencia en Eurocódigo 3

- Así, la resistencia de cálculo a la tracción de la sección, $N_{t.Rd}$, es igual a:

$$N_{t.Rd} = N_{u.Rd}$$

$$= 86 \text{ kN}$$

- El agotamiento dúctil se obtiene cuando: *5.4.3(4)*

$$N_{pl.Rd} < N_{u.Rd}$$

Esta condición no se cumple en este caso.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.4.2: Elementos sometidos a tracción II

OBJETIVO/CONTENIDO

Explicar la aplicación y comportamiento de los cables.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 9.4.1: Elementos sometidos a tracción I

LECCIONES AFINES

Lección 16.4: Vigas para grúas

Lección 16.7: Estructuras especiales de una planta

Lección 18.10: Equipamiento del puente

Lección 20.2: Transformación y reparación

PROBLEMAS RELACIONADOS RESUELTOS

Problema resuelto 9.4: Elementos sometidos a tracción II

RESUMEN

Las estructuras de cables (es decir, aquellas cuyo elemento principal es un cable que transmite solamente esfuerzos de tracción), tienen muchas y variadas aplicaciones. Esta lección explica cómo se construyen los cables y deriva las ecuaciones para calcularlos teniendo en cuenta su comportamiento alineal.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos decenios ha aumentado el empleo de cables con función tensora. Estos cables se componen de alambres de acero de gran resistencia unidos para lograr la fuerza de tracción necesaria. Las estructuras de cables ofrecen soluciones sumamente interesantes y espectaculares de los problemas de la arquitectura e ingeniería modernas; se utilizan en la construcción de cubiertas, hangares, grúas, mástiles, puentes colgantes, puentes atirantados, torres de transmisión y remontes de esquí (ver Diapositivas). En comparación con las estructuras convencionales, exigen considerar atentamente lo que sigue:

- están expuestas a la vibración causada por el viento por ser muy ligeras y a menudo salvar largas distancias;
- hay que cuidar especialmente la protección de los cables contra la corrosión;
- el comportamiento general de la estructura es alineal como se explicará más adelante.

2. COMPOSICIÓN DE CABLES

El cable es un elemento muy flexible capaz de transmitir fundamentalmente esfuerzos axiales. Se compone de alambres de alta resistencia reunidos; los componentes, por orden jerárquico, son los siguientes:

ALAMBRE: Se produce a partir de barras de acero de alta resistencia, ya sea por laminación o por estirado en frío (Figura 1), reduciéndose así la sección inicial. El proceso en frío aumenta la tensión de tracción y la de fluencia y reduce la ductilidad del acero (Figura 2); también afecta a las tensiones residuales en el grosor del alambre (Figura 1), ya que el acero pasa por la máquina reductora a velocidad diferente; en el alambre estirado en frío la velocidad del centro es mayor que la de la superficie; en el alambre laminado es lo contrario.

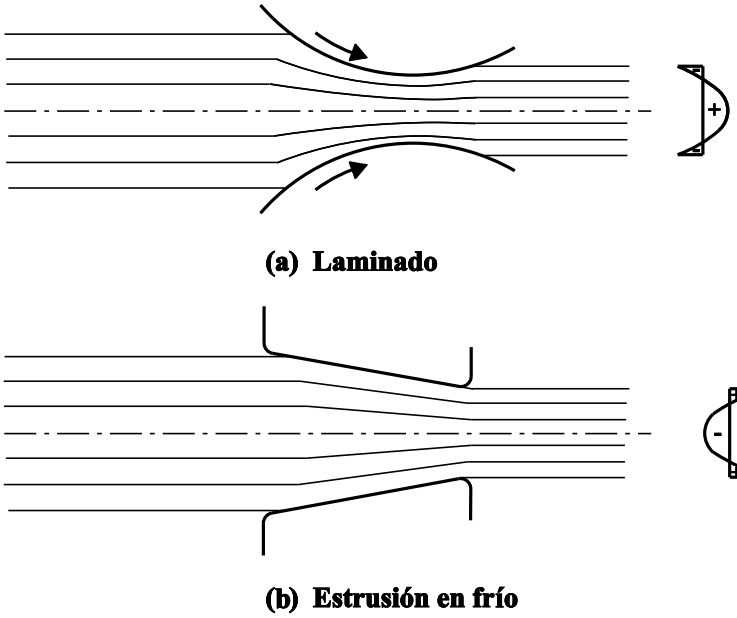


Figura 1 Producción de cables y tensiones residuales

TORÓN: Se produce mediante la unión de una serie de alambres que normalmente se entregiran juntos en forma helicoidal (Figura 3).

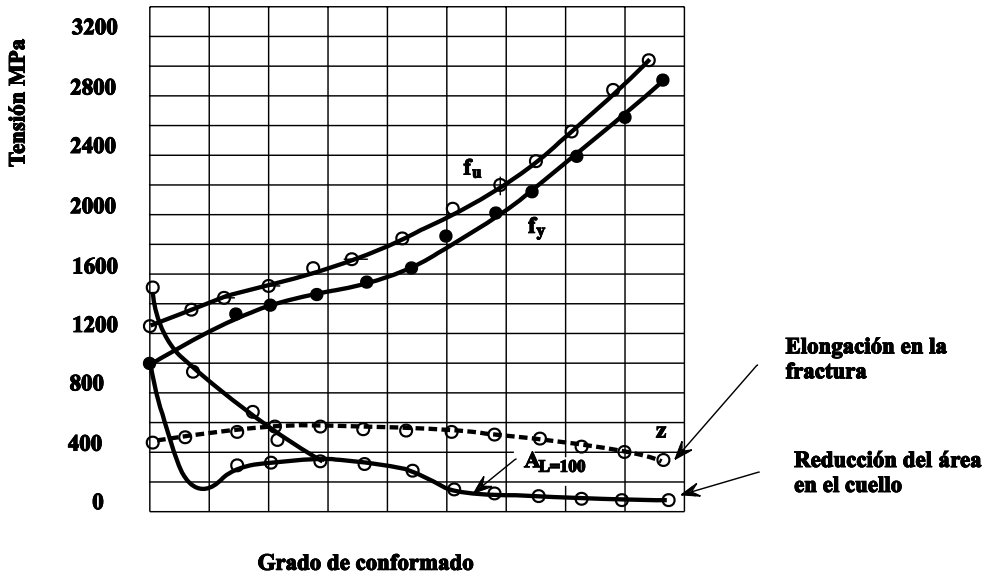


Figura 2 Propiedades del acero debidas al conformado en frío

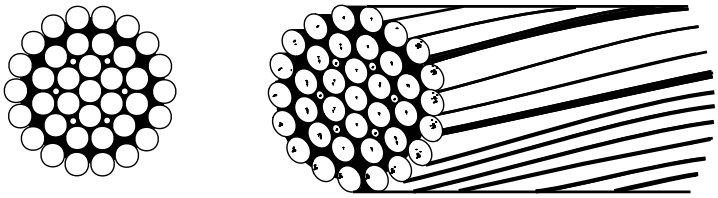


Figura 3 Composición de un cable

COMPOSICIÓN de TORONES: Se produce con una serie de torones que también se entregiran en forma helicoidal. Si los torones se entregiran, por ejemplo, hacia la izquierda, los torones que componen el conjunto deben entregirarse hacia la derecha para que no se torsione al ser sometido a esfuerzos axiales (Figura 4).

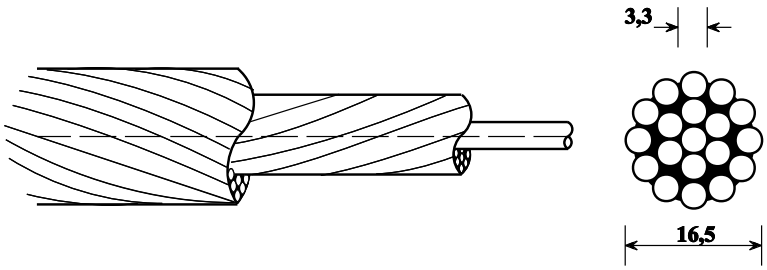
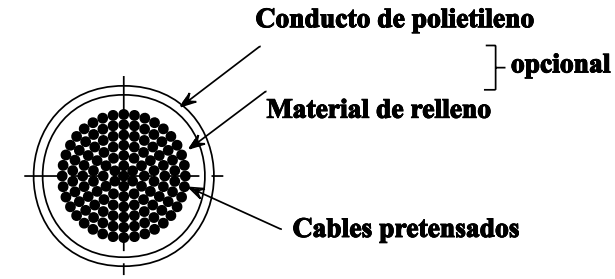


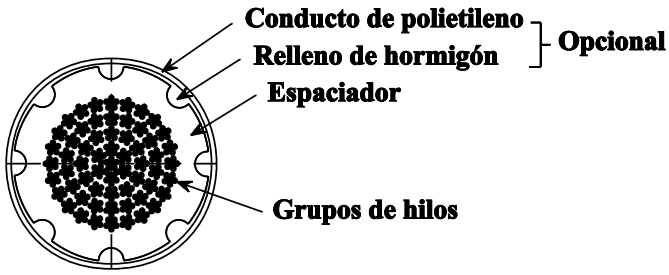
Figura 4 Composición de un cable

CABLE: Los cables se construyen con los elementos arriba mencionados; los tipos de cable más comunes son:

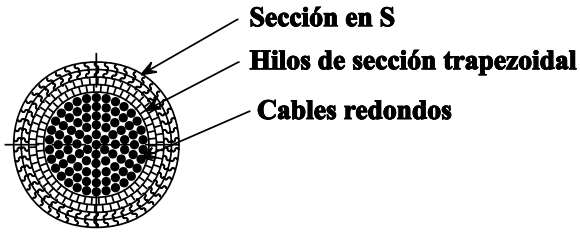
- Cables con alambres paralelos (Figura 5a), compuestos por una serie de alambres paralelos;
- Cables de torones (Figura 5b), compuestos por torones combinados en paralelo o entregirados helicoidalmente;
- Cables de espiral cerrada (Figura 5c), que se inventaron para protegerlos mejor contra la corrosión. Las capas exteriores de estos cables, formadas por hilos en forma de S, envuelven los hilos del centro. Estos cables son menos flexibles que los de tipo abierto).



(a) Cables de hilos paralelos



(b) Cable de grupo de hilos



(c) Cables embobinados

Figura 5 Tipos de cables

3. PROPIEDADES MECÁNICAS

La resistencia a la tracción de los alambres de acero es alta debido a su composición química y al proceso en frío; también es normalmente inversamente proporcional al diámetro. La resistencia a la tracción suele ser de alrededor de 1600-1800 N/mm^2.

El diagrama σ-ε de este acero no tiene parte horizontal en el diagrama de fluencia, y por tanto, la resistencia a la fluencia se define convencionalmente como una tensión en la que la deformación plástica es de 0,2%. El valor de esta resistencia suele variar entre el 80 y el 90% de la resistencia a la tracción.

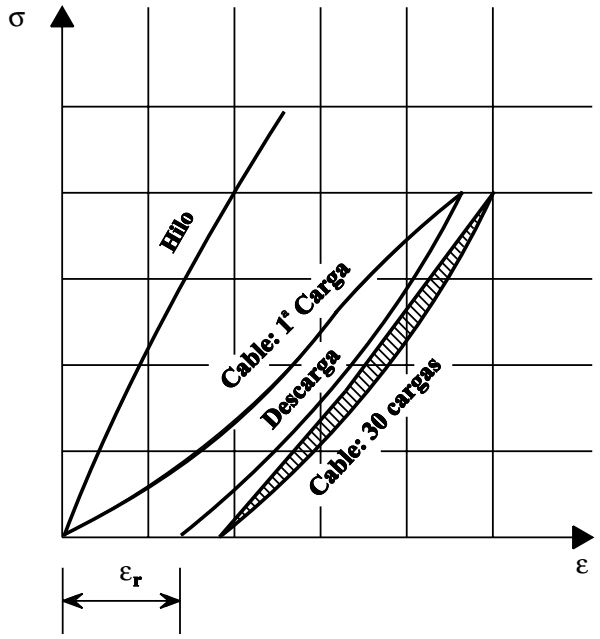


Figura 6 σ-ε Diagrama tensión deformación de un cable

El módulo de elasticidad de los torones y cables es menor que el del acero que los compone (Figura 6). Al quitarles la carga queda una deformación residual que no se debe a plasticidad, sino al bobinado y el transporte, y que se estabiliza después de varios ciclos de carga; por esta razón, en estructuras reales, los cables se postensan al cabo de cierto tiempo; una vez hecho esto, el valor del módulo de elasticidad es mayor que antes.

Los valores medios de este módulo son normalmente como sigue:

Para cables de alambres paralelos,

$E = 200$ N/mm^2

Para cables de espiral cerrada

$E = 160$ N/mm^2

Para cables de torones

$E = 150$ N/mm^2

El coeficiente de dilatación térmica lineal tiene un valor de $\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}$ por grado centígrado.

4. VALORES DE CALCULO

El área metálica del cable es igual a:

$$A_m = f \frac{\pi d^2}{4} \qquad (1)$$

siendo d el diámetro del cable y f un coeficiente igual a:

f = 0,55 para cables de varios torones

f = 0,75 - 0,77 para cables de espiral abierta

f = 0,81 - 0,86 para cables de espiral cerrada

La resistencia a la tracción de un cable es igual a:

$$F = k_s A_m . f_u \qquad (2)$$

siendo A_m el área metálica

f_u la resistencia a la tracción de los alambres

k_s un coeficiente igual a:

k_s = 0,76 - 0,85 para cables de varios torones

k_s = 0,82 - 0,90 para cables de espiral abierta

k_s = 0,87 - 0,92 para cables de espiral cerrada

k_s = 0,93 - 1,0 para cables de alambres paralelos

La resistencia a la tracción de un cable completo, incluyendo el dispositivo de anclaje es igual a:

$$F_u = k_a . k_s . A_m . f_u \qquad (3)$$

donde el coeficiente k_a tiene valores entre 0,80 y 1,0 según el sistema de anclaje.

La resistencia a la tracción de cálculo viene dada por esta expresión:

$$F_{Rd} = F_u / \gamma_M \qquad (4)$$

siendo γ_M el factor parcial de seguridad.

El valor de cálculo del módulo de elasticidad depende del estado de tensión que se considere. El diagrama σ-ε de un cable como el que presenta la Figura 7 es alineal en la primera carga; el cable se sigue sometiendo a ciclos de carga repetidos, σ_q (debidos al tráfico), por encima de una tensión inicial, σ_g, debida al propio peso y al pretensado. En esta Figura se observan tres valores del módulo de elasticidad:

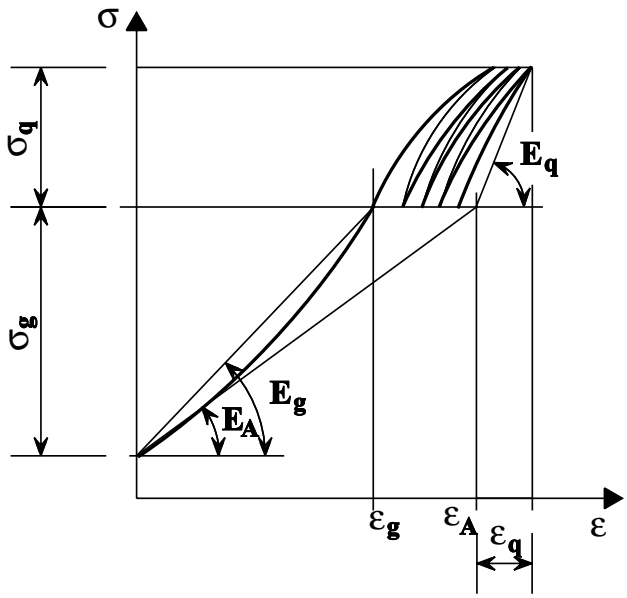


Figura 7 Diagrama σ-ε de un cable para varias situaciones de diseño

Por la primera carga $E_g = \frac{\sigma_g}{\epsilon_g}$

Por la carga del tráfico $E_q = \frac{\sigma_q}{\epsilon_q}$

Por el comportamiento total $E_A = \frac{\sigma_g}{\epsilon_A}$

Está claro que en tanto el valor de E_q permanece casi constante, el valor de E_g disminuye al aumentar σ_g hacia la tensión total $\sigma_g + \sigma_q$, mientras que a E_A le sucede lo contrario.

5. UNIONES

Los tres tipos más importantes de uniones que se hacen en estas estructuras son el acoplamiento, el ensillado y el anclaje (Figura 8); sus condicionamientos son los siguientes:

- deben ser capaces de transmitir sin riesgo las cargas que actúan sobre ellas;
- no deben permitir que el cable se deslice;
- deben soportar cargas de intensidad variable;

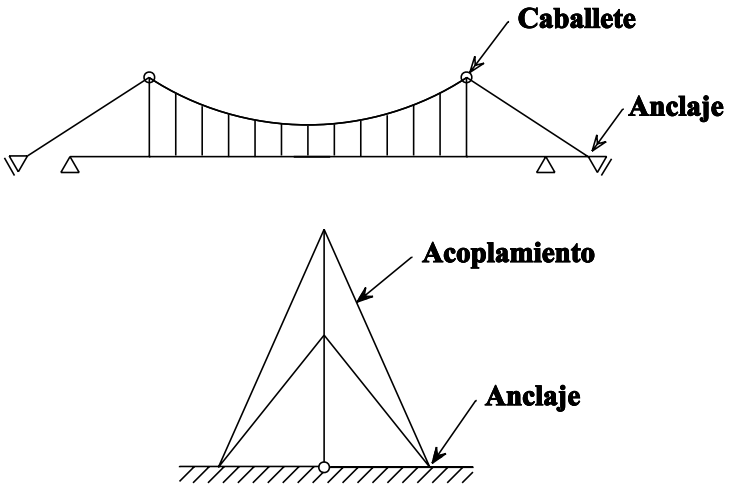


Figura 8 Conexiones de cables

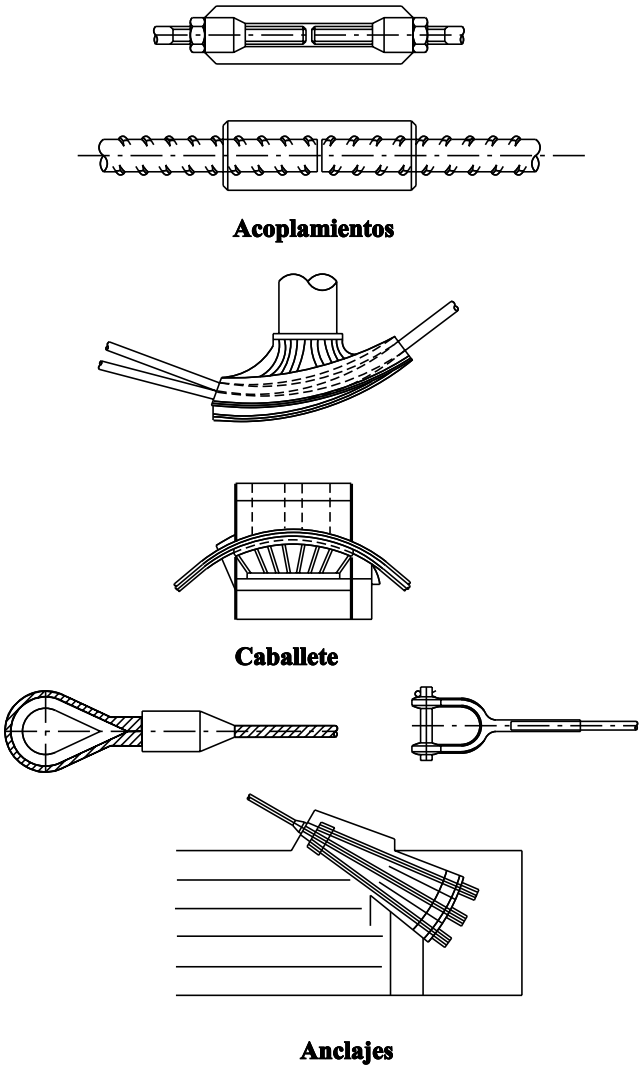


Figura 9 Algunas conexiones de cables

- deben ser de acceso fácil para permitir la conservación.

La Figura 9 pone ejemplos de uniones.

6. COMPORTAMIENTO DEL CABLE

La Figura 10 muestra un cable suspendido de dos puntos, A y B, a distinta altura. Para derivar las ecuaciones de este cable, se corta un tramo corto, CC', y se sustituyen las fuerzas de sus extremos, junto con la carga que actúa en el mismo, para restaurar el equilibrio; las dos condiciones de carga que se consideran aquí son:

g = una carga uniforme resultado de la longitud inclinada,

q = una carga uniforme resultado de la proyección horizontal.

Se supone también que el cable no tiene rigidez a la flexión y que por lo tanto sólo puede transmitir cargas axiales.

Los equilibrios de estos dos casos de carga son:

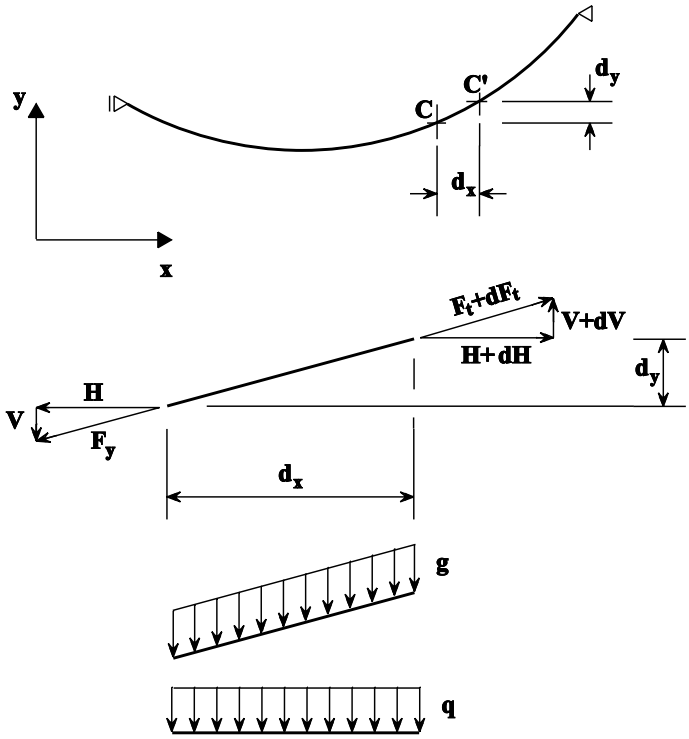


Figura 10 Cable suspendido

Condición	g	q	
$\Sigma H = 0$	$H - (H + dH) = 0 \rightarrow$	$H = const$	(5)
$\Sigma M = 0$	$Vd_x - Hd_y = 0 \rightarrow$	$V = H_y' \rightarrow V' = H_y''$	(6)
$\Sigma V = 0$	$V - (V + dV) + g\, d_s = 0$	$V - (V + dV) + q\, d_x = 0$	
	$\rightarrow V' = g\frac{d_s}{d_x}$	$V' = q$	(7)
(5), (6), (7) $\rightarrow$	$H_y'' = g\sqrt{1+y'^2}$ (8a)	$H_y'' = q$	(8b)

Solución:

$$y = \frac{H}{2g}\left[e^{\left(\frac{g}{H}x+C_1\right)} - e^{-\left(\frac{g}{H}x+C_1\right)}\right] + C_2 \qquad y = \frac{q}{2H}x^2 + C_1x + C_2 \quad (9)$$

Catenaria Parábola

Los coeficientes C_1 y C_2 se pueden determinar a partir de las condiciones extremas. Para el caso especial de un cable suspendido de dos puntos a igual altura (Figura 11), se pueden obtener las siguientes expresiones:

	g	q	
	$y = \frac{H}{g}\cosh\frac{x}{H/g} \approx \frac{H}{g}\frac{g}{2H}x^2$	$y = \frac{q}{2H}x^2$	(10)
Esfuerzo de tracción	$F_t = H\cosh\frac{x}{H/g} = g\cdot y$	$H = \frac{qL^2}{8f}$	(11)
Longitud del cable	$L_o = 2\frac{H}{g}\operatorname{senh}\frac{L/2}{H/g} = L + \frac{g^2L^3}{2uH^2} + \ldots$	$L_o = \frac{L}{2}\sqrt{L + \left(\frac{qL}{2H}\right)^2} + \frac{H}{q}\operatorname{arco\,senh}\left(\frac{qL}{2H}\right) = L + L\frac{8}{3}\left(\frac{f}{L}\right)^2 + \ldots$	(12)
Flecha	$f = \frac{H}{g}\left(\cosh\frac{L/2}{H/g} - 1\right) = \frac{gL^2}{8H} + \frac{g^3L^4}{384H^3} + \ldots$	$f = \frac{qL^2}{8H}$	(13)

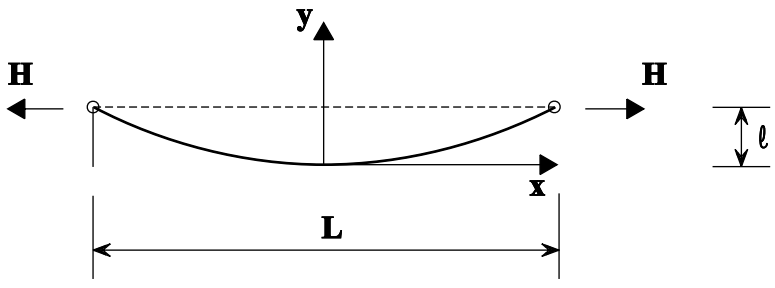


Figura 11 Cables suspendidos de 2 puntos de igual altura

La Figura 12 ofrece la comparación de los valores de la flecha y longitud del cable; puede verse que la catenaria se puede sustituir razonablemente por una parábola cuando la flecha es pequeña respecto al vano; este es el caso normalmente de mástiles con vientos, puentes atirantados, grúas. etc. En otros casos (p. ej.: torres de transmisión) debe utilizarse la catenaria. La Figura 12 muestra que la aproximación por la longitud del cable no es tan exacta como por la flecha.

En las torres de transmisión deben verificarse normalmente dos situaciones de cálculo (Figura 13):

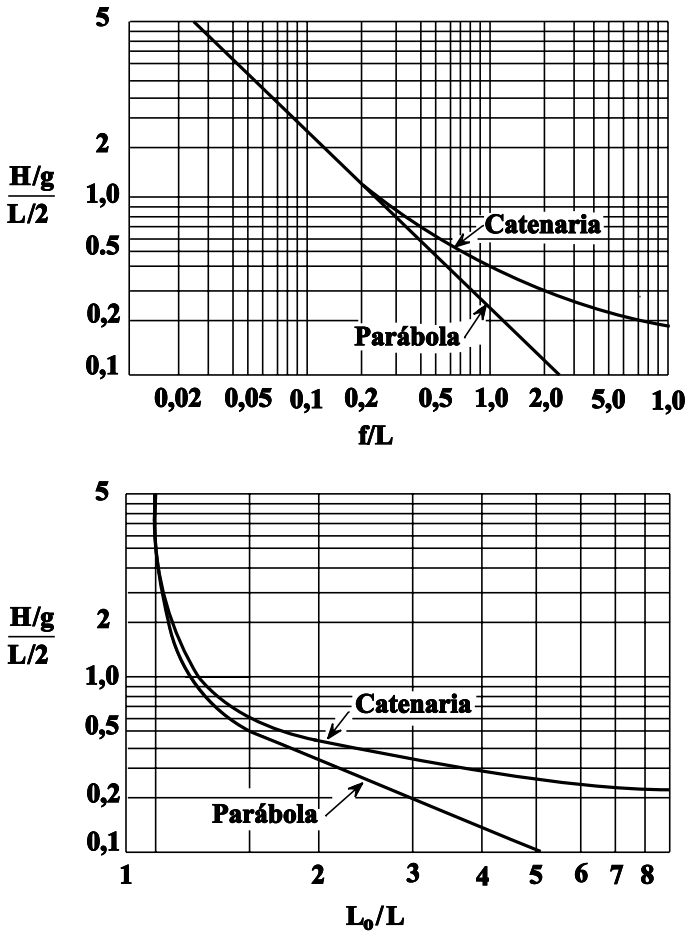


Figura 12 Comparación entre una parábola y una catenaria

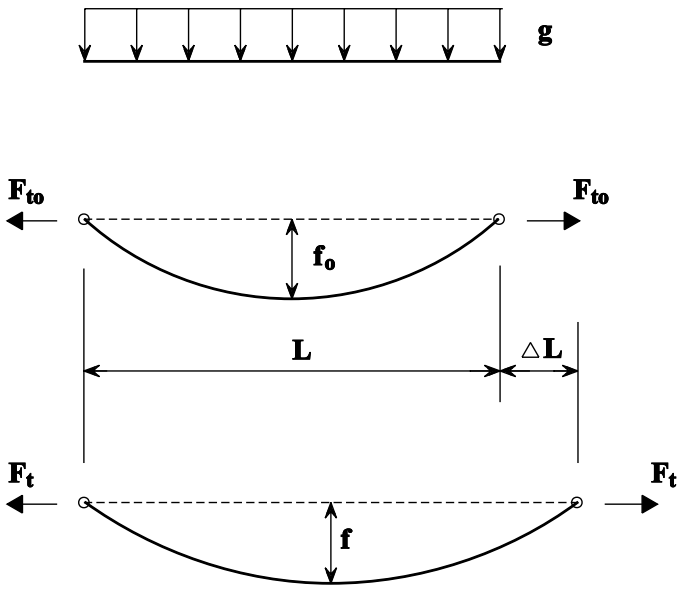


Figura 13 Cable frente a dos situaciones

Situación invernal: La carga del cable es el peso propio y el del hielo circundante y la temperatura es baja (t = -5°C)

Situación de verano: La carga del cable es el peso propio y la temperatura es alta (t = 40°C).

La primera situación impone al cable la mayor solicitación, mientras que la segunda puede ser decisiva para la flecha. La ecuación que rige la verificación es:

$$\frac{\sigma}{E_\alpha} + t + \frac{L^2 \gamma^2}{24 \sigma^2} = \text{const} \qquad (14)$$

siendo:

- σ la tensión en el cable.
- L el vano.
- γ el peso específico del cable, incluyendo posiblemente el hielo.
- t la temperatura.
- E y α el módulo de elasticidad y el coeficiente de dilatación térmica del cable.

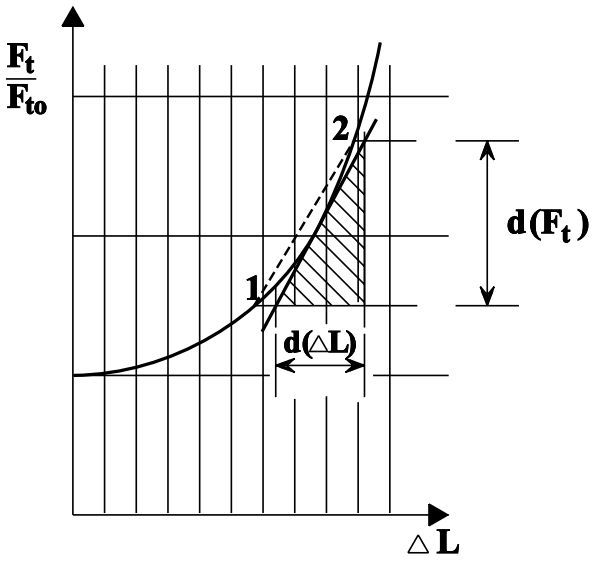


Figura 14 Definición del módulo de elasticidad tangencial

El primer término de la ecuación (14) expresa la deformación del cable debida al esfuerzo de tracción, la segunda la deformación debida a la temperatura y la tercera la deformación debida a la flecha.

7. MODULO DE ELASTICIDAD DEBIDO A LA FLECHA

Cuando se estudia un cable cuyo extremo B pasa de la posición inicial B a la B′, son válidas las siguientes expresiones:

$$F_{to} = \frac{gL^2}{8f_o}\ , \quad F_t = \frac{gL^2}{8f} \qquad (13b)$$

La longitud del cable, con arreglo a la ecuación (12), es igual a:

$$L\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f_o}{L}\right)^2\right] = (L+\Delta L)\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{L+\Delta L}\right)^2\right] \qquad (14)$$

que arroja que el desplazamiento del punto B es igual a:

$$\Delta L = \frac{g^3 L^3}{24}\left(\frac{1}{F_{to}^2}-\frac{1}{F_t^2}\right) \qquad (15)$$

El módulo de elasticidad longitudinal, debido a la flecha, es entonces igual a (Figura 14):

$$E_s = \frac{d_\sigma}{d_\epsilon} = \frac{\Delta F_t / A}{\Delta L / L} = \frac{12\,\sigma^3}{\gamma^2 L^2} \qquad (16)$$

Entonces se deriva el módulo de elasticidad equivalente respecto a las deformaciones elástica y de flecha:

$$E_e = \frac{\sigma}{\epsilon_e + \epsilon_s} = \frac{\sigma}{\frac{\sigma}{E}+\frac{\sigma}{E_s}} = \frac{E}{1+\frac{(\gamma L)^2}{12\sigma^3}E} \qquad (17)$$

El valor de E_e depende de los grados de tensión que presenta la Figura 15. La figura muestra que los cables cortos, sometidos a fuertes tensiones, se comportan como el acero de base, mientras que los cables largos, sometidos a tensiones pequeñas, son mucho menos rígidos; esta es una de las razones por las que las estructuras de cables se deben pretensar, ya que de otro modo estarían expuestos a deformaciones muy grandes.

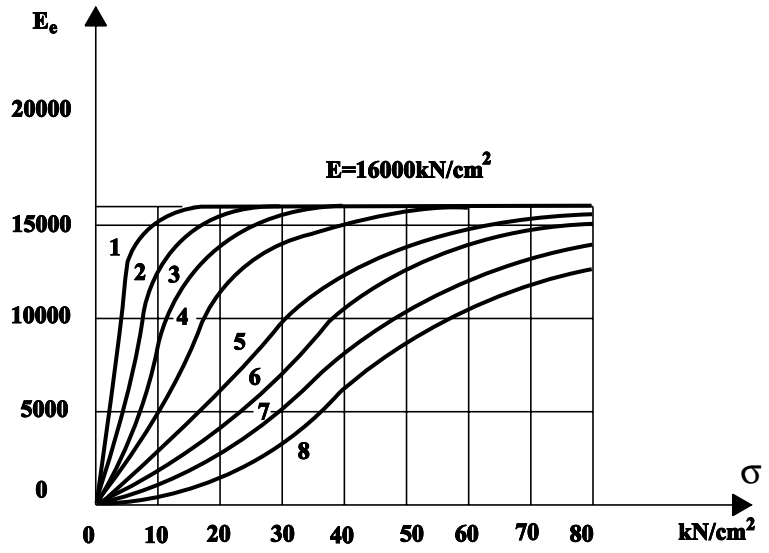


Figura 15 Módulo de elasticidad equivalente

8. RESUMEN FINAL

1. Los cables como elementos de tracción tienen mucha aplicación en varios tipos de estructura, como cubiertas, puentes, mástiles, etc.
2. Los cables se componen de alambres de acero de gran resistencia entregirados de varios modos.
3. Los valores para calcular la resistencia de los cables dependen del tipo de cable y de anclaje.
4. La conducta del cable es sumamente alineal debido a los efectos de flecha.
5. La flexibilidad del cable depende de su longitud y de las condiciones de tensión.
6. Es necesario pretensar los cables cuando se necesita rigidez.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Merkblatt. 496, “Ebene Seiltrogwerke, Benatungsstelle für stahlverwendung”, 1980.

2. Petersen, Chr., “Stahlbau”, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1988.

3. Belenya, E; “Prestressed Load-bearing Metal Structures”, MIP, 1977.

4. Podolny, W., Scolzi, J. B.; “Construction and Design of Cable-stayed Bridges”, Wiley, 1986.

5. Walther, R., Houriet, B., Isler, W., “Moia, P., “Ponts Houbanés”, Presses Polytecniques Romandes, Lausanne, 1985.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.4 (i) y (ii): Elementos sometidos a tracción II

CONTENIDO

Problema resuelto 9.4 (i): Cable conductor para transmisión de energía eléctrica

Problema resuelto 9.4 (ii): Vientos para un mástil

NOTAS PREVIAS

Estos problemas resueltos corresponden al texto de la Lección 9.4.2.

El cálculo de la resistencia de cables se realiza, conforme a la práctica de cálculo, limitando la fuerza de tracción del cable con carga de servicio al valor de la resistencia (esfuerzo de rotura) dividido por un factor de seguridad cuyo valor se expone en los problemas resueltos.

PROBLEMA 9.4. (i)

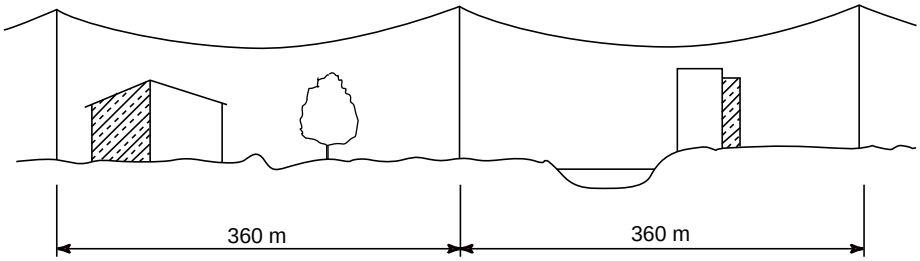
Problema

La conducción eléctrica consiste en un cable de hilos en espiral abierta cuyo diámetro es de 12 mm y la distancia entre torres es 360 m. Debido a la presencia de casas debajo de la línea, la flecha del cable no puede pasar de 17 m.

Al tender la línea (t = 15°C), el valor de la flecha se fijó en 15 m. Comprobar la flecha y la resistencia del cable en las dos situaciones siguientes:

En invierno: El cable está cargado con el peso propio y el del hielo que lo cubre (t = -5°C)

En verano: El calbe está cargado con el peso propio y la temperatura es alta (t = 40°C).



Datos

Cable
- diámetro nominal: 12 mm.
- área de la sección metálica: $A_m = 84{,}1$ mm.^{2}
- módulo de elasticidad: $E = 150$ kN/mm.^{2}
- masa por unidad de longitud: $q_w = 0{,}698$ kg./m.
- esfuerzo de rotura siendo el grado de tracción de 1570 N/mm^2: $F_u = 119$ kN
- coeficiente α de dilatación térmica: $1{,}2 \times 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$

Hielo
- masa por unidad de longitud: $q_{hielo} = 1{,}206$ kg./m. (2 cm. de hielo a -5°C; viento de 180 Pascales; densidad del hielo = 0,6 kg/dm^3)

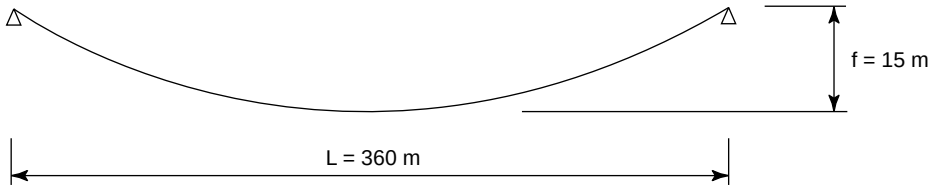
Referencia

Factores de seguridad para calcular la resistencia

s = 3 en verano

s = 2 en invierno (situación considerada relativamente rara).

Solución



En la línea eléctrica de este problema, la torre de transmisión sólo está sometida a las cargas verticales producidas por los dos cables idénticos unidos a ella (no experimenta cargas horizontales).

Por consiguiente, los extremos de los cables pueden considerarse fijos en sentido horizontal.

La flecha y el esfuerzo de tracción se calculan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha\, t - \frac{L^2\, \gamma^2}{24\, \sigma^2} = \text{constante}$$

siendo:

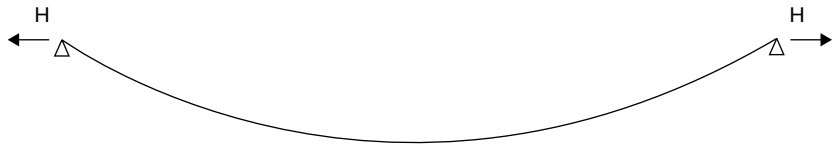
t la temperatura

E y α el módulo de elasticidad y el coeficiente de dilatación térmica del cable

γ el peso específico del cable - que puede incluir hielo al aplicar las condiciones invernales (= q/A_m).

La constante de la ecuación anterior se valora después de estudiar la situación de referencia a 15°C.

a. Estudio de la situación de referencia a 15°C



Cálculo del esfuerzo de tracción H en los extremos del cable

f/L = 1/24 < 1/20 → aplicar la ecuación de parábola (en vez de la de catenaria)

H = $q\,L^2/8f$ (con $q = q_w$)

$= 0{,}698 \times 10^{-3} \times 9{,}81 \times (360 \times 10^3)^2/(8 \times 15 \times 10^3)$

$= 7{,}4 \times 10^{-3}$ N

= 7,4 kN

Cálculo de la tensión σ del cable

$\sigma = H/A_m$

$= 7{,}4 \times 10^3/84{,}1 = 87{,}9$ N/mm^2

Comprobación de la resistencia del cable

La resistencia es suficiente si:

$H < F_u/s$

En ese caso:

H = 7,4 kN

F_u/s = 119/3 = 39,7 kN → se cumple la condición

Valoración de la constante

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha\, t - \frac{L^2\,\gamma^2}{24\,\sigma^2}$$

$$= \frac{87,9}{150 \times 10^3} + 1,2 \times 10^{-5} \times 15 -$$

$$- \frac{[360 \times 10^3 \times 0,698 \times 10^3 \times 9,81/84,1]^2}{24\,(87,9)^2} = -3,864 \times 10^{-3}$$

Referencia

b. Estudio en condiciones veraniegas a 40°C

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha\, t - \frac{L^2\,\gamma^2}{24\,\sigma^2} \qquad (\text{con } \gamma = \gamma_w)$$

$$= \frac{\sigma}{150 \times 10^3} + 1,2 \times 10^{-5} \times 40 -$$

$$- \frac{[360 \times 10^3 \times 0,698 \times 10^3 \times 9,81/\,84,1]^2}{24\,\sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma}{150 \times 10^3} + 4,8 \times 10^{-4} - \frac{35,8}{\sigma^2}$$

Tensión σ del cable en condiciones veraniegas

$$= \frac{\sigma}{150 \times 10^3} + 4,8 \times 10^{-4} - \frac{35,8}{\sigma^2} = -3,864 \times 10^{-3}$$

$\rightarrow \sigma$ = 85,4 N/mm^2, o sea, el aumento de temperatura reduce la tensión

Comprobación de la resistencia del cable

H = $\sigma\, A_m$

= $85,4 \times 84,1$

= $7,2 \times 103$ N

= 7,2 kN $< F_u$ /s

$< 119/3$

$< 39,7$ kN $\rightarrow$ Vale

Comprobación de la flecha

$$f = \frac{q\,L^2}{8\,H}$$

$$= \frac{0,698 \times 10^{-3} \times 9,81 \times (360 \times 10^3)^2}{8 \times 7,2 \times 10^3}$$

= $15,407 \times 103$ mm

= 15,41 m, o sea, el aumento de la temperatura aumenta la flecha

Referencia

$f < f_{max}$ (17 m) $\rightarrow$ Vale

$$f / L = \frac{15,41}{360} = 1/23,4 < 1/20 \rightarrow \text{parabola Vale}$$

c. Estudio en condiciones invernales a -5°C

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha t - \frac{L^2 \gamma^2}{24 \sigma^2} \quad (\text{con } \gamma = \gamma_w + \gamma_{hielo})$$

$$\frac{\sigma}{150 \times 10^3} + 1,2 \times 10^{-5} \times (-5)$$

$$- \frac{[360 \times 10^3 \times (0,698 \times 1,206) \times 10^{-3} \times 9,81/84,1]^2}{24 \sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma}{150 \times 10^3} - 6 \times 10^{-5} - \frac{266,5}{\sigma^2}$$

Tensión σ del cable en condiciones inveranles

$$\frac{\sigma}{150 \times 10^3} - 6 \times 10^{-5} - \frac{266,5}{\sigma^2} = -3,864 \times 10^{-3}$$

$\rightarrow \sigma = 223,1$ N/mm^2, o sea, la disminución de temperatura y la presencia de hielo aumenta mucho la tensión.

Comprobación de la resistencia del cable

$H = \sigma A_m$

$= 223,1 \times 84,1$

$= 18,8 \times 10^3$ N

$= 18,8$ kN $< F_u / s$

$< 119/2$

$< 59,5$ kN $\rightarrow$ Vale

Comprobación de la flecha

$f = qL^2/8H$

$$= \frac{(0,698 + 1,206) \times 10^{-3} \times 9,81 \times (360 \times 10^3)^2}{8 \times 18,8 \times 10^3}$$

$= 16,1 \times 10^3$ mm.

Referencia

= 16,1 m

f < f_{max} (17 m) → Vale

f/L = 1/22,4 < 1/20 → la parábola Vale

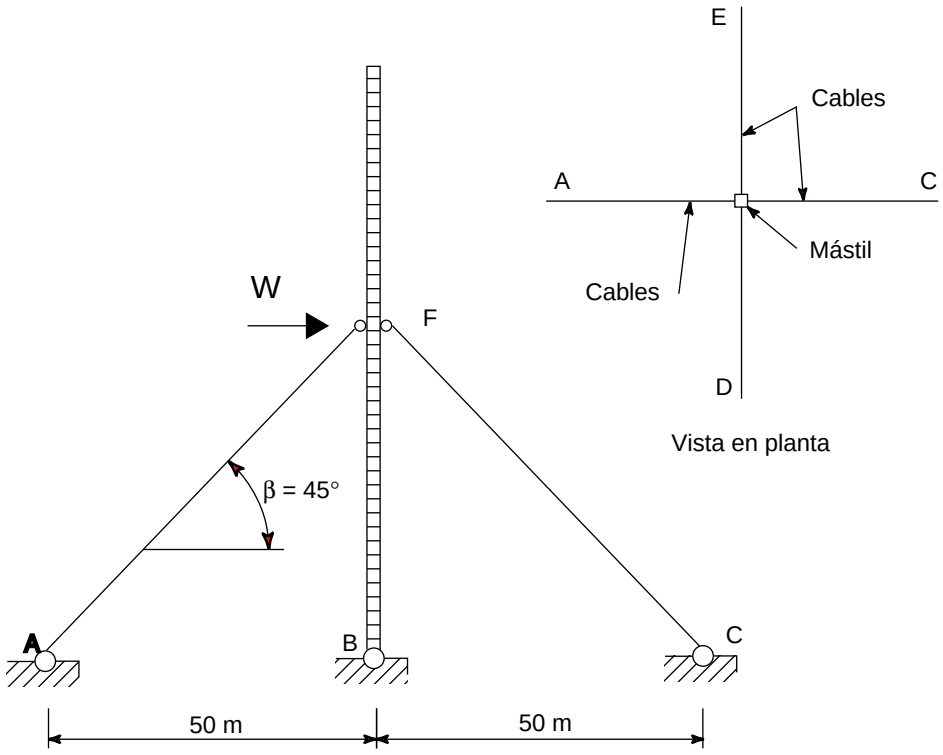
PROBLEMA 9.4.(ii)

Problema

El mástil de abajo está tensado por cuatro vientos pretensados. Evaluar el desplazamiento lateral del mástil en el extremo alto de los cables por efecto del viento.

Para simplificar: Sólo se considera una dirección del viento (ver la figura)

: La acción eólica se caracteriza simplemente por una fuerza de W = 80 kN aplicada horizontalmente al mástil por donde salen los vientos.



Datos

cable – diámetro nominal: 30 mm

– área de la sección metálica:
$A_m = 524\ mm^2$

– módulo de elasticidad:
$E = 160\ kN/mm^2$

– masa por unidad de longitud:
$q = 4{,}35\ kg/m$

– fuerza de rotura F_u siendo el grado de tensión 1770 N/mm^2:
$F_u = 817\ kN$

– pretensado inicial:
$\sigma_o = 200\ N/mm^2$

Factor de seguridad para calcular la resistencia: s = 3

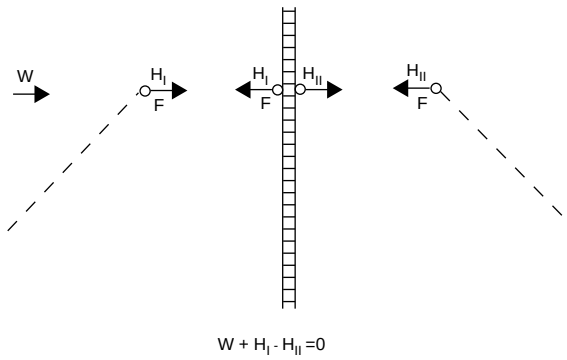
Solución

Cuando se aplica al mástil la fuerza eólica W:

- el viento AF se tensa más: $\sigma_o \rightarrow \sigma_I > \sigma_o$
- el viento CF pierde tensión: $\sigma_o \rightarrow \sigma_{II} < \sigma_o$

σ_o es la tensión inicial de los cables debida al pretensado; σ_I y σ_{II} son las tensiones en los vientos AF y CF, respectivamente, después de aplicar W.

Equilibrio horizontal



$H = F_r \cos \alpha$ (F_r es el esfuerzo del viento)

y: $\sigma = F_r / A_m$

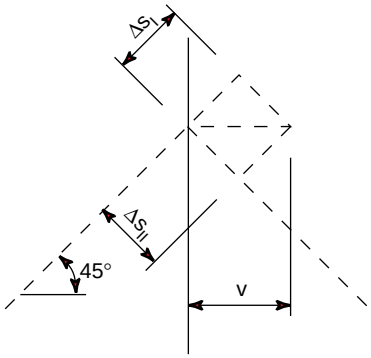
Referencia

$\rightarrow \sigma_I - \sigma_{II} = W/(A_m \cos \beta)$

$= 80.000/(524 \cos 45°)$

$= 215{,}9 \text{ N/mm}^2$ (1)

Continuidad de los desplazamientos



v es el desplazamiento transversal del mástil

$\Delta S_{I \text{ ó } II}$ es la variación de la longitud de la cuerda

$\Delta S_I > 0$ porque corresponde a un alargamiento

$\Delta S_{II} < 0$ porque corresponde a un acortamiento

$$v = \frac{\Delta S_I}{\cos 45°} = \frac{-\Delta S_{II}}{\text{sen } 45°}$$

Puesto que el sen 45° = cos 45° $\rightarrow \Delta S_I = -\Delta S_{II}$ (2)

Variación de la longitud del cable y de la cuerda

$$\frac{\Delta S_{I \text{ o } II}}{S} = \left(\frac{\sigma}{E\, A_m} + \alpha\, t - \frac{\gamma^2\, S^2 \cos^2 \beta}{24\, \sigma_1^2} \right) -$$

$$- \left(\frac{\sigma_o}{E\, A_m} + \alpha\, t_o - \frac{\gamma_o^2\, S^2 \cos^2 \beta}{24\, \sigma_o} \right)$$

siendo: $\gamma_{I \text{ o } II} = \gamma_o = q/A_m$

$= 4{,}35 \times 10^{-3} \times 9{,}81/524$

$= 8{,}144 \times 10^{-5} \text{ N/mm}^3$

$t = t_o$

S la longitud de la cuerda del cable

$= 70{,}71$ m

α el coeficiente de dilatación térmica

σ_o = 200 N/mm^2

E = 160 kN/mm^2

$\Delta S_{I \text{ ó } II}$ = - 48 850,4/$(\sigma_{I \text{ ó } II})^2$ + 0,442 $\sigma_{I \text{ ó } II}$ - 87,167 (3)

Tensiones de los vientos

Combinando las relaciones (1), (2) y (3) [ver la figura de abajo]:

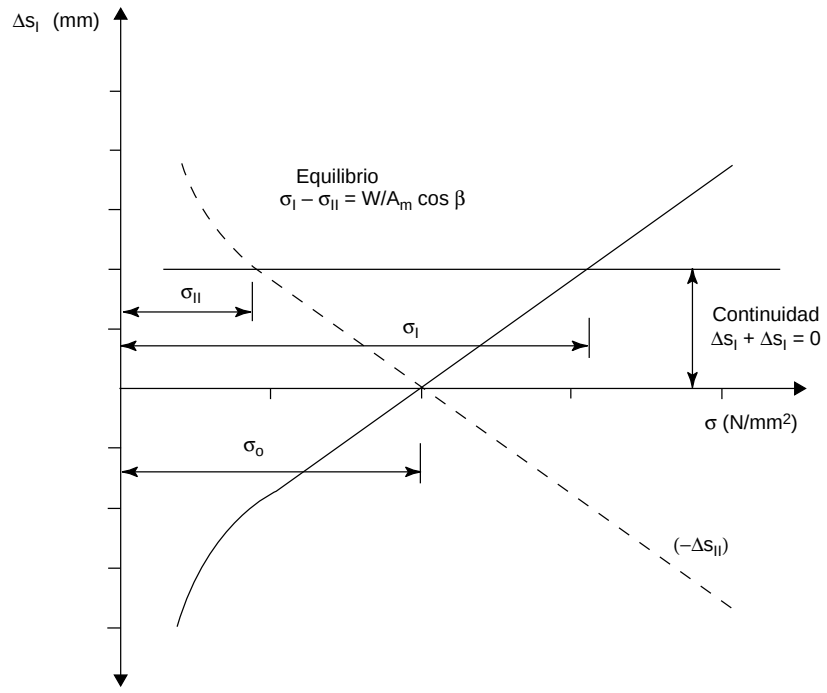
σ_I = 311,8 N/mm^2 (S_I = 163,4 kN < F_u /s)

σ_{II} = 95,8 N/mm^2 (S_{II} = 50,2 kN < F_u /s)

Y, de (3):

ΔS_I = $-\Delta S_{II}$ = 50,1 mm

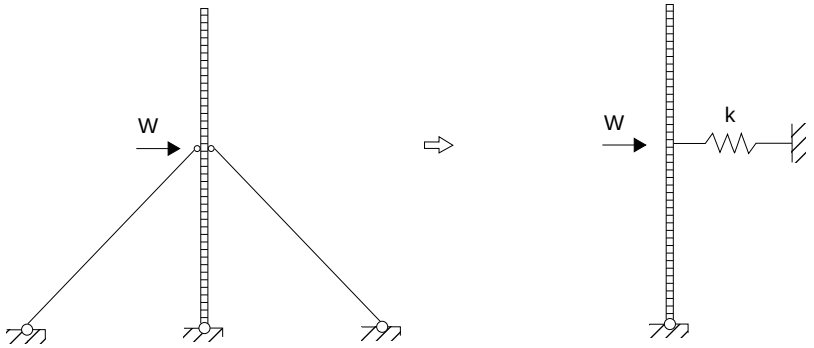
$\rightarrow$ v = ΔS_I /cos β = 70,9 mm



Evaluación simplificada de v : método lineal

La acción del cable es sustituida por la de un muelle axial, cuya rigidez elástica k se halla por referencia a la fórmula ERNST.

Referencia



Según la fórmula de ERNST:

$$E^* = \frac{E}{1+\frac{(\gamma S \cos\beta)^2}{12\,\sigma_0^3}\,E}$$

$$= \frac{160.000}{1+\frac{[8{,}144\times 10^{-5}\times 50.000]^2}{12\times(200)^3}\times 160.000}$$

$$= \quad 155\,.\,697{,}5 \text{ MPa}$$

La fórmula es aplicable a dos vientos (igualmente pretensados)

Se puede demostrar que

$$W = [2\,E^*\,A_m \cos^2 45°/S]v$$

$$\rightarrow k = 2\,E^*\,A_m \cos^2 45°/S$$

$$= 2\times 155.697{,}5\times 524\times 0{,}5/70.710$$

$$= 1153{,}8 \text{ N/mm}$$

$$\rightarrow v = W/k$$

$$= 80.000/1153{,}8$$

$$= 69{,}3 \text{ mm (en lugar de 70,9 mm)}$$

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.5.1: Pilares I

OBJETIVO

Describir las distintas clases de pilares de acero y explicar los procedimientos para calcular los elementos de compresión.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1:	Definición de equilibrio elástico estable e inestable
Lección 9.2:	Clasificación de secciones transversales

LECCIONES AFINES

Lección 9.3:	Pandeo local
Lección 9.6:	Pilares compuestos
Lecciones 9.10.1 y 9.10.2:	Vigas-Columna
Lección 9.12:	Celosías

PROBLEMAS RELACIONADOS RESUELTOS

Problema resuelto 9.5:	Cálculo de pilares

RESUMEN

Se describen distintas clases de elementos de compresión (sección uniforme y no uniforme y pilares compuestos). Se explican las diferencias entre pilares gruesos y esbeltos y se esboza la base de cálculo valiéndose de las curvas de pandeo europeas.

1. INTRODUCCIÓN

Los pilares son elementos verticales que soportan cargas de compresión. Estos elementos se encuentran, por ejemplo, soportando el forjado y la cubierta de edificios y en las grúas. Si además de la carga axial están sometidos a momentos de flexión considerables, se llaman vigas-columna o excéntricas.

El término “elemento de compresión” se suele referir a las partes de la estructura que sólo están sometidas a cargas axiales; esto designa a los pilares (en condiciones especiales de carga), pero se refiere también generalmente a los soportes comprimidos articulados que se encuentran en las celosías y elementos arriostrados.

Esta lección trata de los elementos de compresión, y por tanto, se ocupa de muy pocos pilares reales porque la excentricidad de las cargas axiales, y sobre todo, los empujes laterales, no suelen ser despreciables. Pero los elementos de compresión representan un caso elemental que ayuda a entender el término compresión en el estudio de las vigas-columna (Lecciones 9.10.1 y 9.10.2), los pórticos (Lección 9.11) y las celosías (Lección 9.12).

Debido a la esbeltez de los elementos de compresión, el pandeo es posible; el pandeo añade un momento de flexión extra a la carga axial y debe examinarse atentamente.

La lección describe brevemente las distintas clases de elementos de compresión y explica la conducta de los pilares gruesos y esbeltos; también se exponen las curvas de pandeo con que se calculan los pilares esbeltos.

2. CLASES PRINCIPALES DE ELEMENTOS DE COMPRESIÓN

2.1 Elementos simples con sección uniforme

Para que los elementos de compresión funcionen óptimamente deben tener un gran radio de giro, i, en la dirección en que pueden pandear; las secciones tubulares cilíndricas serían por tanto las idóneas a este respecto ya que en ellas este parámetro es máximo en todas direcciones. Pero las uniones de estas secciones son caras y difíciles de calcular.

También pueden utilizarse secciones tubulares cuadradas o rectangulares, cuyas propiedades son favorables (siendo mejores las cuadradas); las uniones son más fáciles de calcular que las anteriores, pero también son bastante caras.

Los perfiles laminados en caliente son sin duda los elementos de compresión más comunes. Muchos tienen alas anchas concebidas para portar las correspondientes cargas de compresión. Su forma generalmente cuadrada tiene un radio de giro transversal i_z, relativamente amplio y el espesor de las alas evita el efecto de pandeo local (ha de tenerse cuidado con los perfiles H ligeros de acero de gran resistencia). La forma abierta producida con técnicas de laminación tradicionales facilitan la unión viga-pilar y otras uniones.

Los secciones de cajón y en H soldadas son adecuadas si se cuida evitar el pandeo local. Se pueden proyectar para una carga determinada y es fácil unirlas a otros elementos; estos perfiles se pueden reforzar también con chapas de cubierta soldadas.

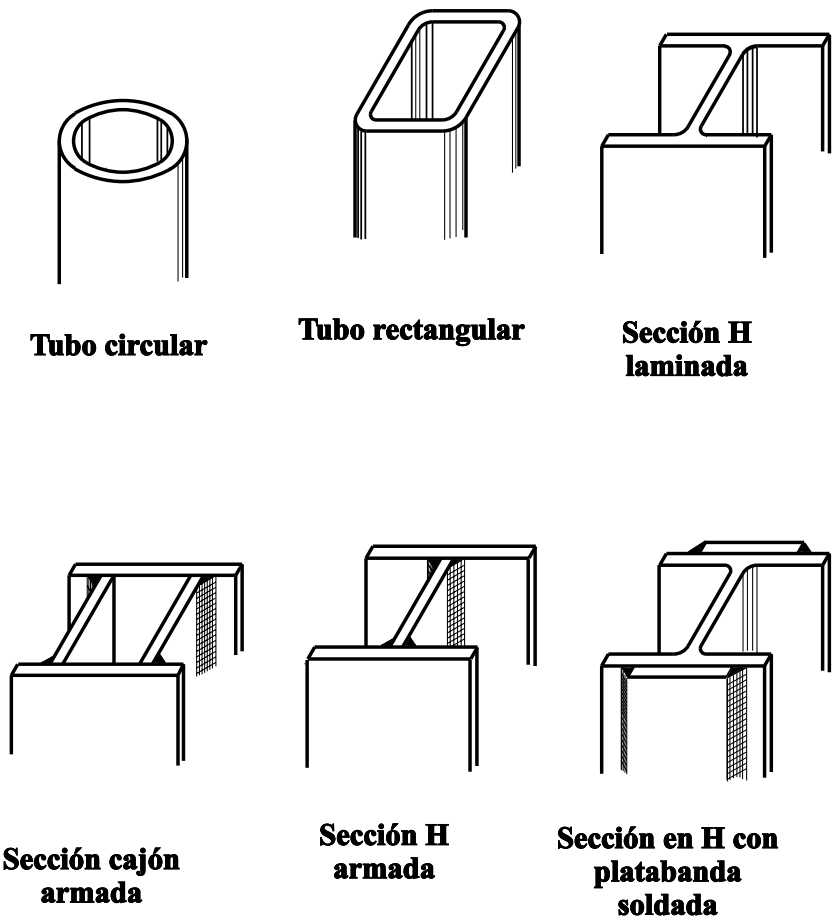


Figura 1 Elementos para compresión

La Figura 1 ilustra todas las formas antes citadas; se hace notar que:

- el tipo de unión es importante en el proyecto de elementos simples de compresión porque define la longitud efectiva que hay que tener en cuenta para valorar el pandeo. Las secciones circulares no suponen la solución óptima si la longitud efectiva no es igual en las dos direcciones principales; en este caso son preferibles las formas asimétricas.
- los elementos están frecuentemente sometidos a momentos flectores además de la carga axial; en estas condiciones, los perfiles I son preferibles a los H.

2.2 Elementos simples con sección no uniforme

Los elementos en los que cambia la sección del fuste se llaman no uniformes; los elementos escalonados o de sección variable están en esta categoría.

En los elementos de sección variable (Figura 2), la geometría de la sección cambia continuamente en toda su longitud; pueden ser formas abiertas o de cajón hechas soldando piezas, bien sea de sección variable el alma, las alas, o ambos. Un ejemplo clásico es la de un perfil I o H laminado en caliente con el alma cortada en diagonal; la forma en sección variable se obtiene soldando las dos mitades invertidas.

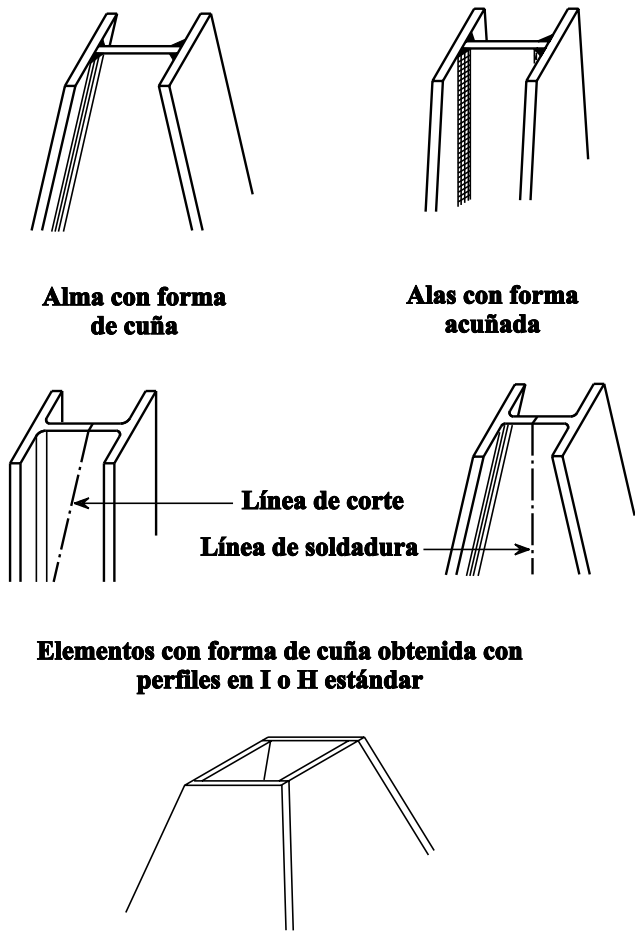


Figura 2 Elementos con forma de cuña

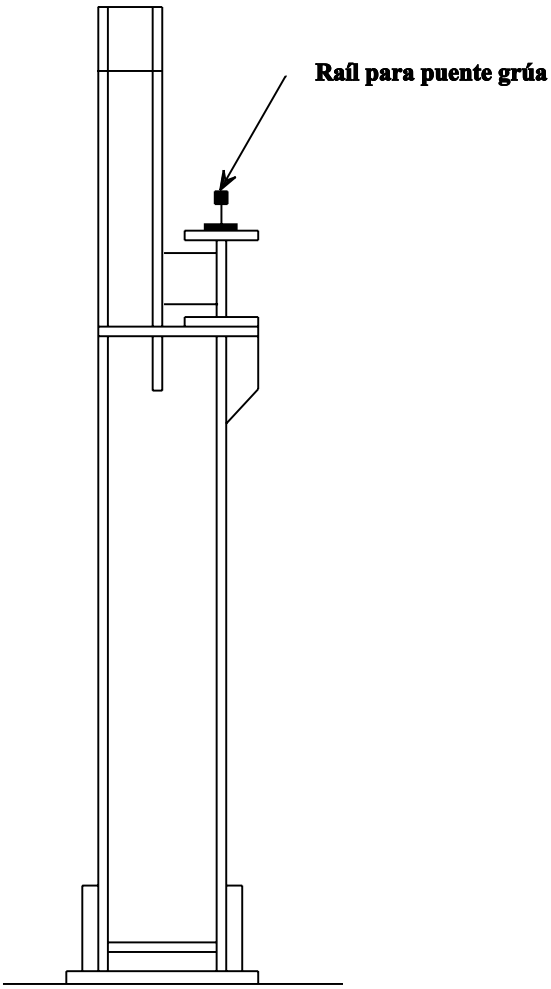


Figura 3 Pilar escalonado

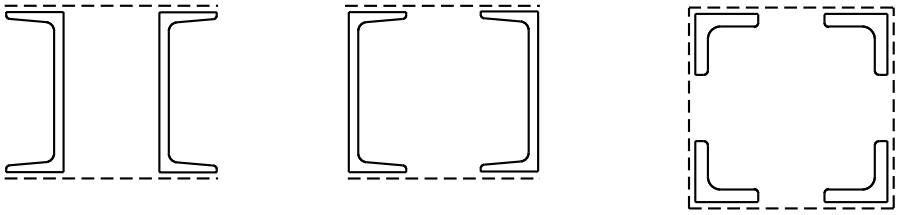
En los pilares escalonados (Figuras 3) la sección varía por escalones. Un ejemplo típico es el de las construcciones industriales con vigas carril; la sección reducida basta para soportar la cubierta, pero se ensancha a la altura de la grúa para atender las cargas adicionales. El pilar escalonado es útil también en edificios de varias plantas para resistir las cargas que caen sobre las plantas inferiores.

2.3 Pilares compuestos

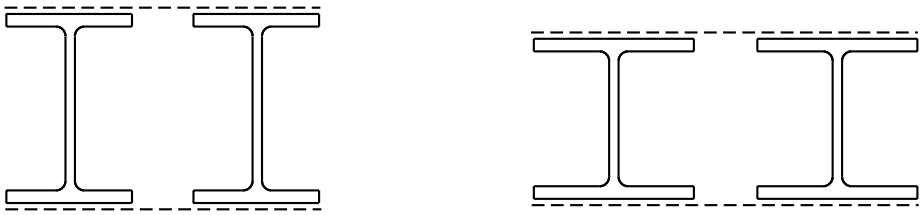
Los pilares compuestos se construyen con varios elementos diferentes; consisten en dos o más piezas unidas a intervalos formando un solo elemento compuesto (Figura 4). Los

componentes principales son a menudo perfiles en U o angulares, pero también pueden ser en I ó H; se unen a escuadra o con riostras (barras, angulares o perfiles en U de menor sección), y no son raros los pilares en que se combinan los tirantes a escuadra y en riostra (Figura 5). Los pilares de chapas perforadas se consideran también en esta categoría.

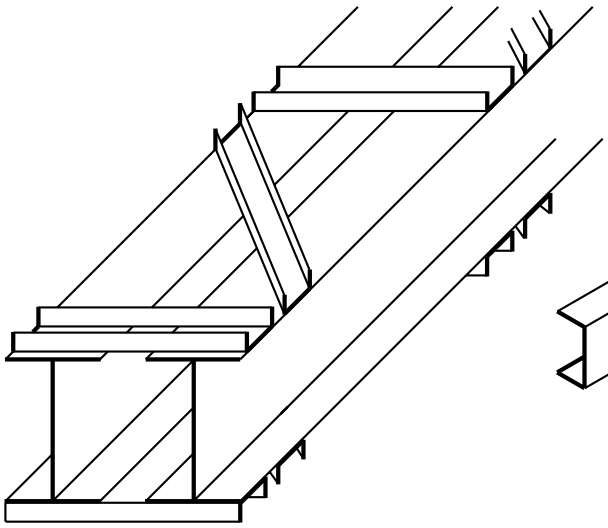
La ventaja de este sistema es que produce elementos relativamente ligeros, que, al estar casi todo el acero bastante lejos del centro de



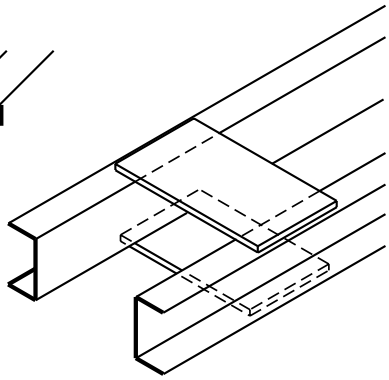
Canales o angulares usados como elementos principales



I o H empleados como elementos principales



Secciones en I enlazados con una pequeña U



Secciones en U unidos con chapas

Figura 4 Pilares compuestos

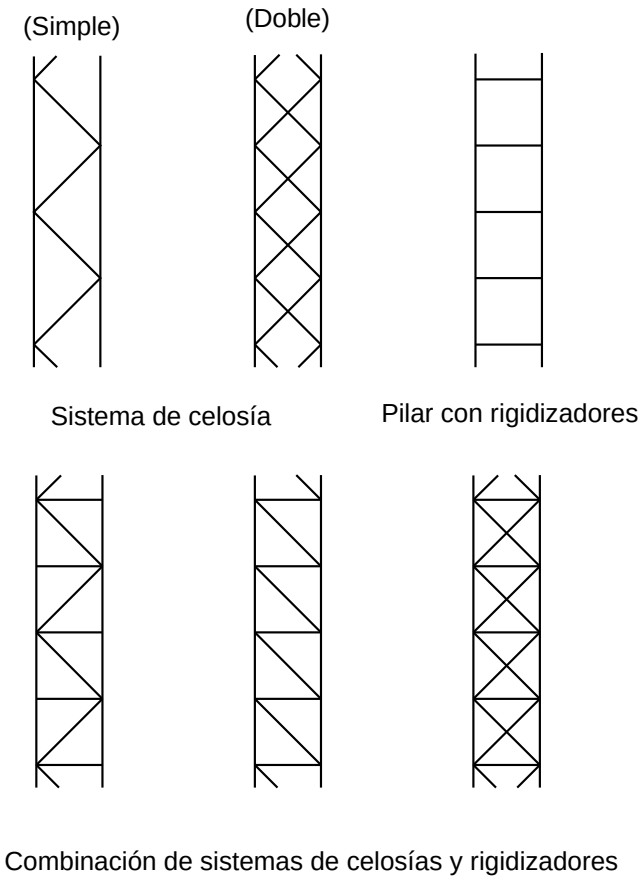


Figura 5 Pilares con celosía y ridizadores

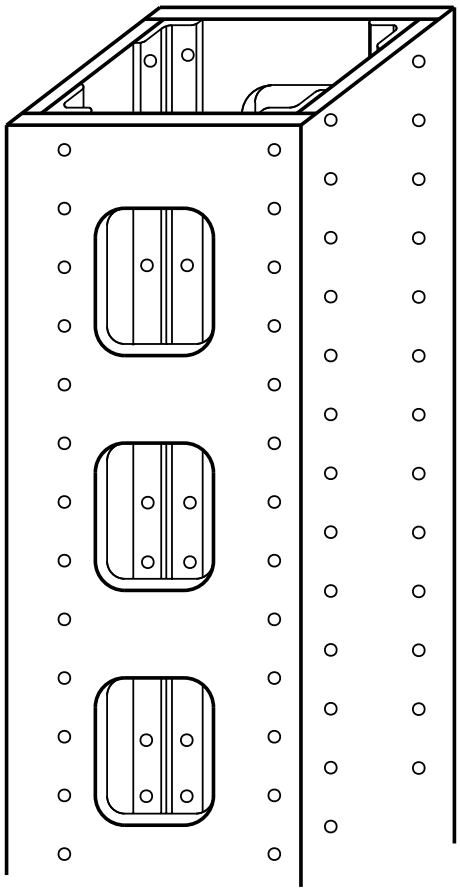
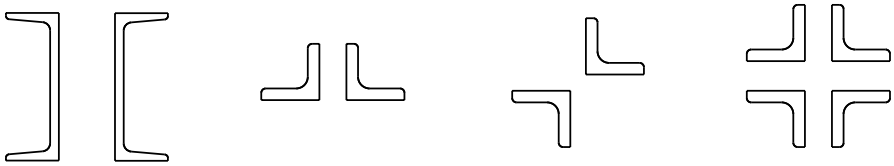
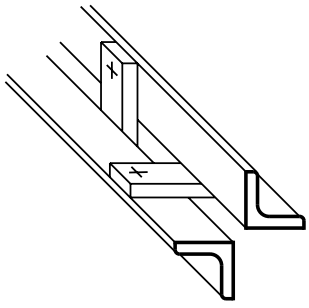


Figura 6 Pilar armado perforado



Elementos compuestos espaciados



Detalle de un elemento en estrella

Figura 7 Elementos compuestos

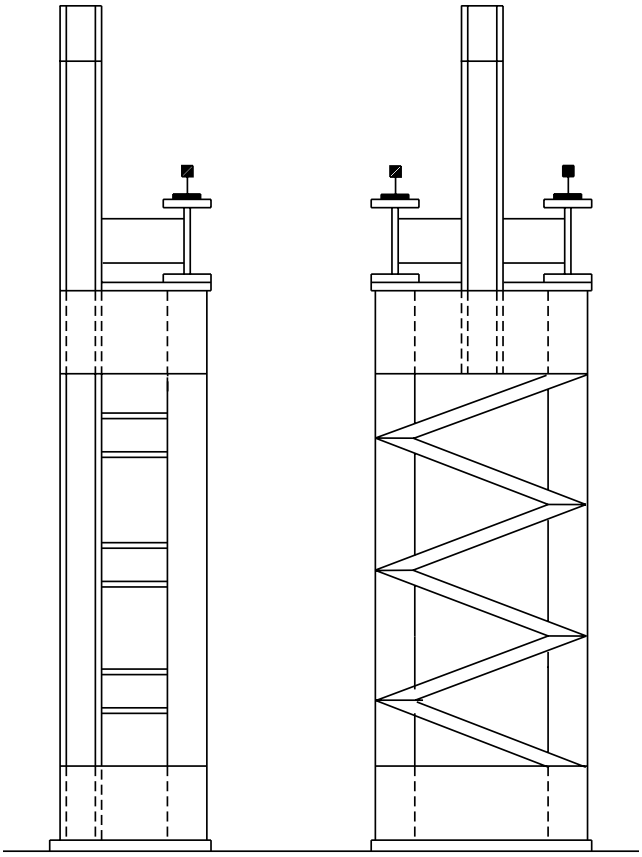


Figura 8 Pilares armados compuestos

gravedad de la sección, el radio de giro es relativamente largo. La mayor desventaja está en el alto coste de fabricación. Estos elementos se proyectan generalmente para grandes estructuras, con elementos de compresión largos y sometidos a cargas fuertes. Se hace notar que debe verificarse muy cuidadosamente el pandeo de cada elemento.

La Figura 7 muestra algunos elementos compuestos con largueros próximos y da detalles del armado en aspa a tresbolillo. Esto es menos eficiente que los anteriores por su menor radio de giro, pero es interesante por la facilidad para unir con otros elementos. Se comportan en compresión de modo similar a los antes descritos, y por eso se incluyen en este apartado.

La sección de los pilares compuestos puede ser uniforme o no; se pueden encontrar, por ejemplo, pilares compuestos escalonados o de sección variable (Figura 8).

El cálculo de los pilares compuestos se examina en la Lección 9.6.

3. COMPRESIÓN PURA SIN PANDEO

3.1 Pilares gruesos y cortos

Los pilares achaparrados se caracterizan por su poca esbeltez, porque no les afecta el pandeo y por poderse calcular a la tensión de fluencia f_y.

Si el pandeo local no afecta a la resistencia a la compresión (como puede suponerse en las secciones clase 1, 2 y 3), el modo de agotamiento de tales elementos corresponde a una conducta perfectamente plástica de toda la sección, que teóricamente ocurre cuando todas las fibras de la sección llegan a f_y. Se hace notar que las tensiones residuales y las imperfecciones geométricas no influyen prácticamente en la resistencia a la rotura de esta clase de pilar y que casi todos los pilares achaparrados se agotan antes de la tensión de fluencia debido al endurecimiento por tensión.

La máxima resistencia a la compresión, N_{max}, es por lo tanto igual a la resistencia plástica de la sección:

$$N_{max} = N_{pl} = A_{eff}\, f_y \qquad (1)$$

A_{eff} es el área efectiva de la sección, ver el apartado 3.2.

El Eurocódigo 3 considera que un pilar es achaparrado cuando la referencia de esbeltez es $\overline{\lambda}$ tal que $\overline{\lambda} \leq 0{,}2$ ($\overline{\lambda}$ se define en el apartado 5.1). Se representan por un zona horizontal en las curvas ECCS, ver apartado 5.2.

3.2 Área efectiva

El área efectiva de la sección con que se calculan los elementos a compresión con sección clase 1, 2 ó 3, se calcula a partir de la sección bruta según las dimensiones especificadas. Los taladros, si los hubiera para hacer uniones, no se deducen.

4. ESTABILIDAD DE PILARES DE ACERO ESBELTOS

Los pilares esbeltos exhiben dos tipos de comportamiento distintos, según su esbeltez; los muy esbeltos presentan una conducta de pandeo casi elástica, mientras que los de esbeltez media son muy sensibles a los efectos de las imperfecciones.

4.1 Tensión crítica de Euler

Si l_{cr} es la longitud crítica, la carga crítica de Euler N_{cr} es igual a:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_{cr}^2} \qquad (2)$$

Y es posible definir la tensión crítica de Euler σ_{cr} así:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{l_{cr}^2 A} \qquad (3)$$

Introduciendo el radio de giro, $i = \sqrt{I / A}$, y la esbeltez, $\lambda = l_{cr}/i$, para el modo de pandeo correspondiente, la ecuación (3) pasa a ser:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (4)$$

Trazando la curva σ_{cr} en función de λ en un gráfico (Figura 9), con la línea que representa la plasticidad perfecta, $\sigma = f_y$, indicada, es interesante observar las zonas idealizadas que representan la ruina por pandeo, la ruina por fluencia y la seguridad. El punto de intersección P de las dos curvas representa el máximo valor teórico de esbeltez de un pilar comprimido hasta el punto de fluencia. Esta esbeltez máxima (a veces llamada esbeltez de Euler), llamada λ_1 en el Eurocódigo 3, es igual a:

$$\lambda_1 = \Pi \, [E/f_y]^{1/2} = 93{,}9\varepsilon \qquad (5)$$

siendo:

$$\varepsilon = [235/f_y]^{1/2} \qquad (6)$$

λ_1 es igual a 93,9 en acero clase F_e 235 y a 76,4 en acero clase F_e 355.

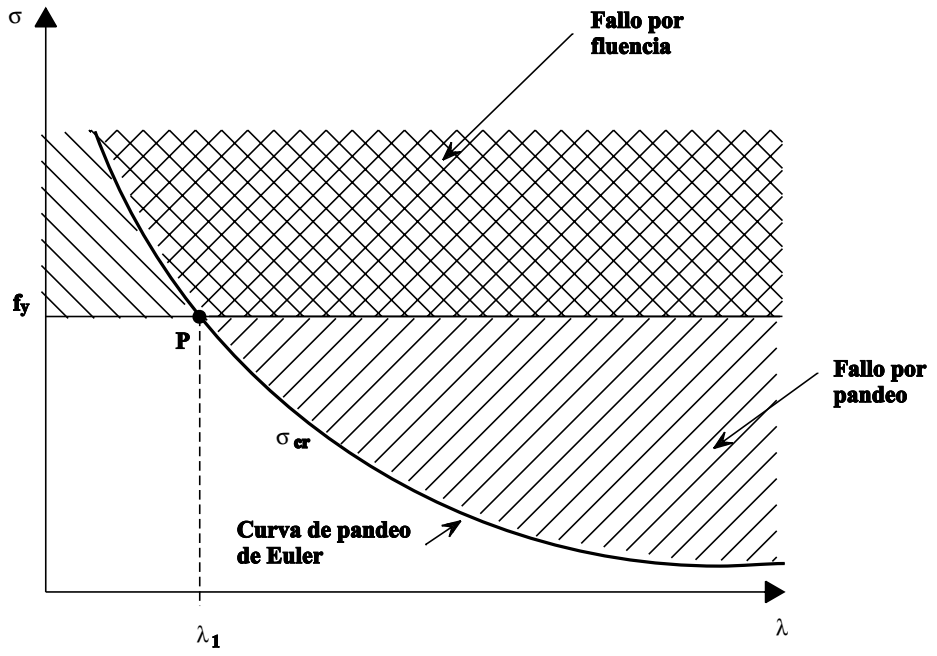


Figura 9 Curva de pandeo local y modos de fallo

La representación adimensional de este diagrama se obtiene trazando σ/f_y en función de λ/λ_1 (Figura 10); esta es la forma que ha servido para las curvas ECCS (ver apartado 5.2). Las coordenadas del punto P son, por lo tanto, (1,1).

4.2 Pandeo de pilares reales

El comportamiento real de los pilares de acero se diferencia bastante de lo descrito en el apartado anterior, pues suelen arruinarse por pandeo inelástico

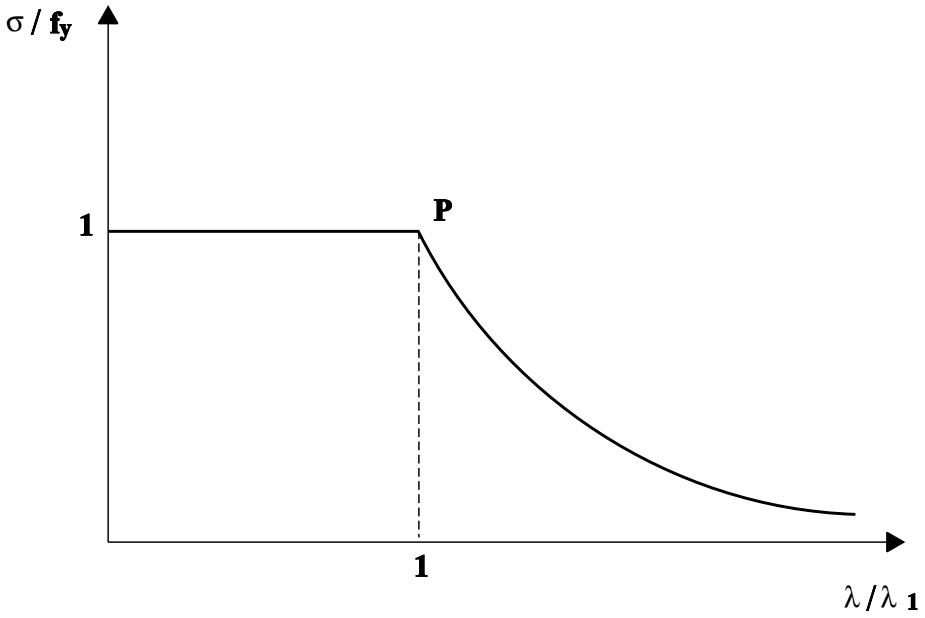


Figura 10 Curva de pandeo adimensional

antes de llegar a la carga de pandeo de Euler. La diferencia entre la conducta real y la teórica se debe a distintas imperfecciones del elemento "real": sinuosidad inicial, tensiones residuales, excentricidad de las cargas aplicadas y endurecimiento por tensión. Todas las imperfecciones afectan al pandeo, y por tanto, influyen en la resistencia a la rotura del pilar. Los estudios experimentales de columnas reales dan los resultados indicados en la Figura 11. La comparación del comportamiento real con el teórico arroja mayores diferencias en el campo de esbeltez media que en el de gran esbeltez. En la zona de valores medios de λ (que representa los pilares más prácticos), el efecto de las imperfecciones estructurales es significante y debe considerarse atentamente. La mayor reducción del valor teórico es en la región λ_1 de esbeltez de Euler. La curva más baja se obtiene a partir del análisis estadístico y representa el límite de carga sin riesgo.

a. Pilares esbeltos

Un pilar puede considerarse esbelto si la esbeltez es mayor que la correspondiente al punto de inflexión de la curva de abajo de la Figura 11.

La carga de rotura de los pilares esbeltos está cerca de la carga crítica de Euler N_{cr}. Como ésta es independiente de la tensión de fluencia, los pilares esbeltos a menudo se calculan según la razón: $\lambda^2 = (A\, l_{cr}^2)/I$, una característica geométrica independiente de la resistencia mecánica.

Los angulares aislados o armados en aspa a tresbolillo, o las planchas pequeñas, suelen tener un mal segundo momento en el área del eje menor respecto al área de la sección. Esto puede producir gran esbeltez con mucha proclividad al pandeo y explica por qué los sistemas de riostras clásicos con estos perfiles sólo se proyectan en tensión.

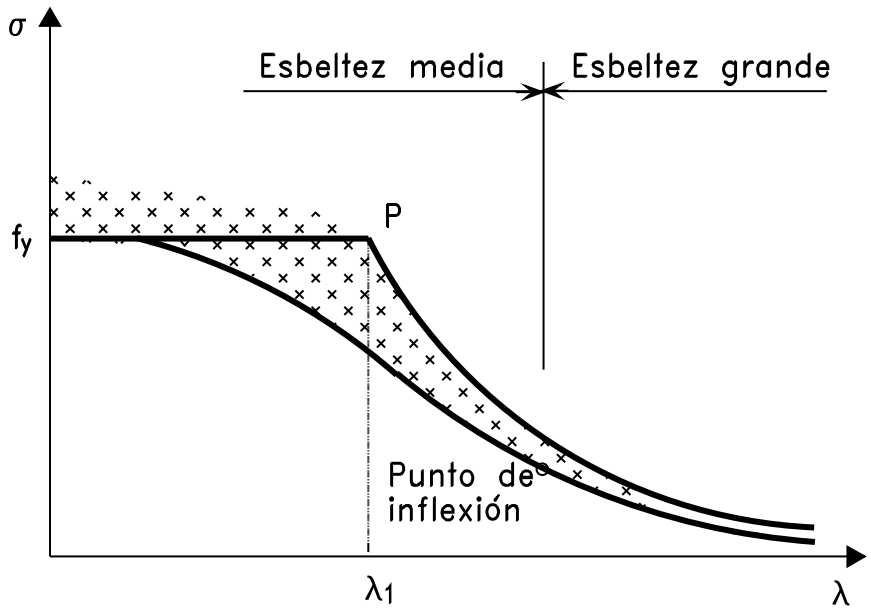


Figura 11 Resultado ensayo de pilares reales y curvas de pandeo

b. Pilares de esbeltez media

La conducta de los pilares de esbeltez media es los que más se aleja de la teoría de Euler. Al producirse el pandeo, algunas fibras ya han llegado al punto de fluencia y la carga de rotura no está sencillamente en función de la esbeltez; cuanto más imperfecciones haya, mayor la diferencia entre el comportamiento real y el teórico. La sinuosidad y las tensiones residuales son

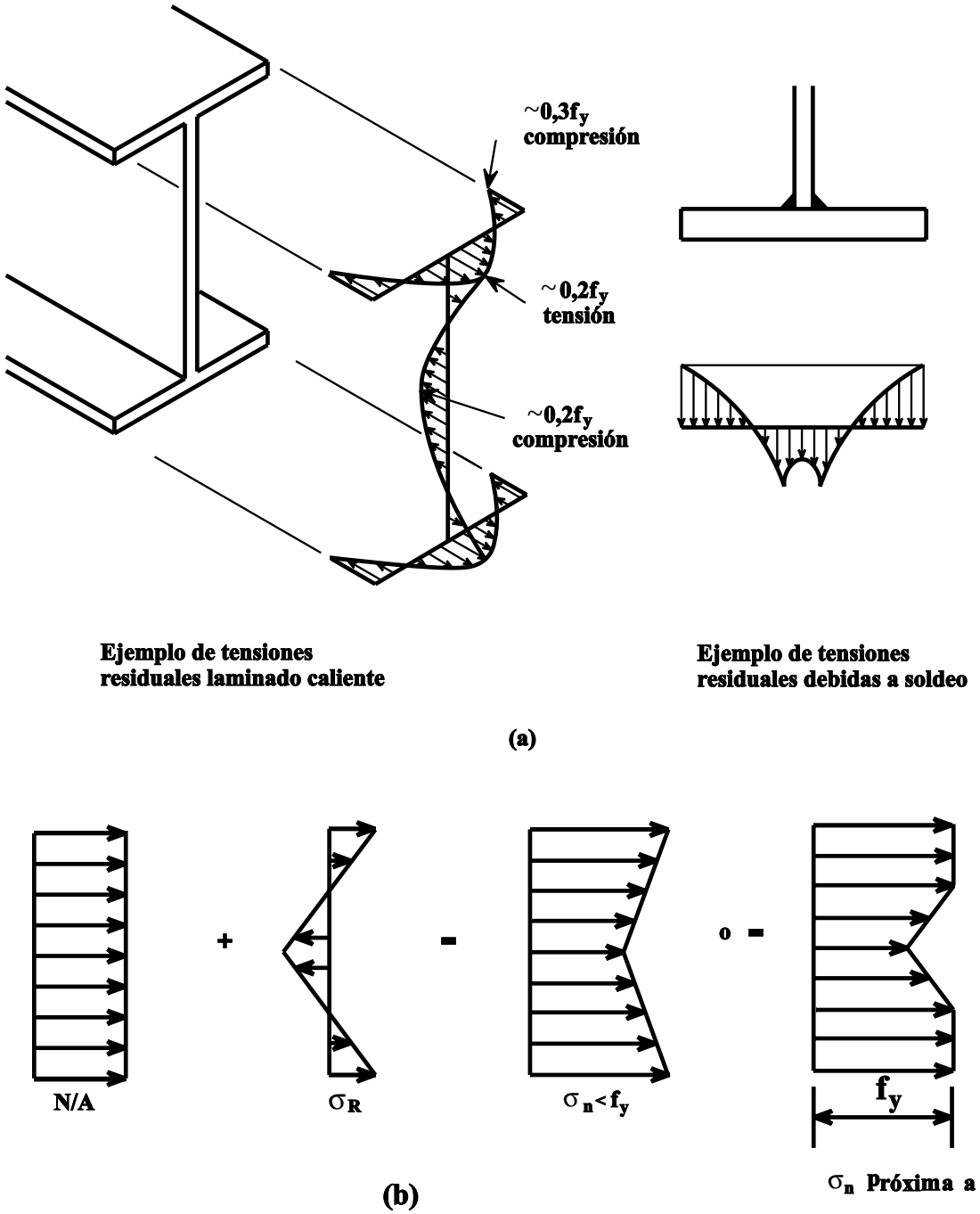


Figura 12 Ejemplos y efectos de las tensiones residuales

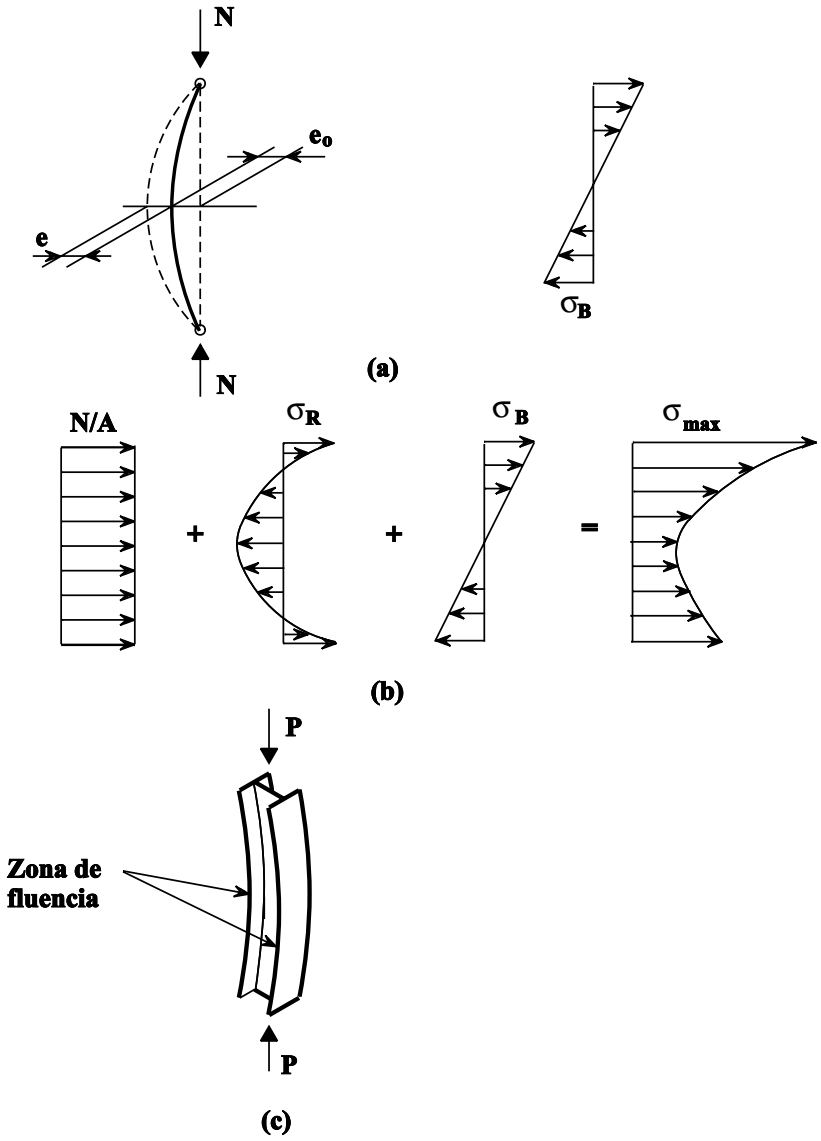


Figura 13 Estado de un elemento comprimido parcialmente fluido

las imperfecciones que tienen un efecto más marcado en la conducta de esta clase de pilar.

Las tensiones residuales se pueden repartir de varios modos en la sección. Las produce la soldadura, el laminado en caliente, el oxicorte o el conformado en frío; la Figura 12 muestra algunas de las formas de tensión que pueden ocurrir.

La Figura 12b muestra tensiones residuales combinadas con tensiones axiales. Si la tensión máxima σ_n llega a la tensión de fluencia f_y, la sección empieza a entrar en fluencia. Por tanto se reduce el área efectiva capaz de resistir la carga axial.

O bien la sinuosidad inicial produce un momento flector e_o, que da una tensión de flexión máxima σ_B (ver Figura 13a), que sumándola a la tensión residual σ_R origina el reparto de tensiones que muestra la Figura 13b. Si σ_{max} es mayor que la tensión de fluencia, el reparto final de tensiones será parcialmente plástico y una parte del elemento habría entrado en fluencia en compresión, como se ve en la Figura 13c.

5. LAS CURVAS DE PANDEO EUROPEAS

5.1 Esbeltez de referencia $\bar{\lambda}$

La esbeltez de referencia $\bar{\lambda}$ se define por el siguiente parámetro adimensional para secciones clase 1, 2 o 3:

$$\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_1 \qquad (7)$$

siendo λ y λ_1 según se define en el apartado 4.1.

$\bar{\lambda}$ también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2}\frac{f_y}{E} = \frac{f_y}{\sigma_{cr}} \qquad (8)$$

o bien

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \qquad (9)$$

5.2 Base de las curvas de pandeo de la ECCS

La ECCS viene realizando un programa internacional de experiencias desde 1960 para estudiar el comportamiento de pilares normalizados. Se estudiaron más de 1000 ensayos de pandeo con varios tipos de elementos (secciones en I, H, Y, U, y tubulares redondos y cuadrados) y distintos valores de esbeltez. Un planteamiento probabilístico valiéndose de la resistencia experimental, unido a un análisis teórico, demostró que se pueden trazar curvas que describan la resistencia en función de la esbeltez de referencia. Las imperfecciones tomadas en cuenta fueron: una imperfección geométrica de onda de medio seno con magnitud igual a 1/1000 de la longitud de la columna, y el efecto de las tensiones residuales sobre cada clase de sección.

La Figura 14 muestra las curvas de pandeo Europeas (a, b, c, ó d). Estas curvas dan el valor del factor de reducción χ de la resistencia del pilar en función de la esbeltez de referencia para distintas clases de secciones (referido a distintos valores del factor de imperfección α). La expresión matemática de χ es:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \left[\phi^2 - \bar{\lambda}^2\right]^{1/2}} \leq 1 \qquad (10)$$

siendo: $\phi = 0{,}5\,[1 + \alpha\,(\bar{\lambda} - 0{,}2) + \bar{\lambda}^2]$ (11)

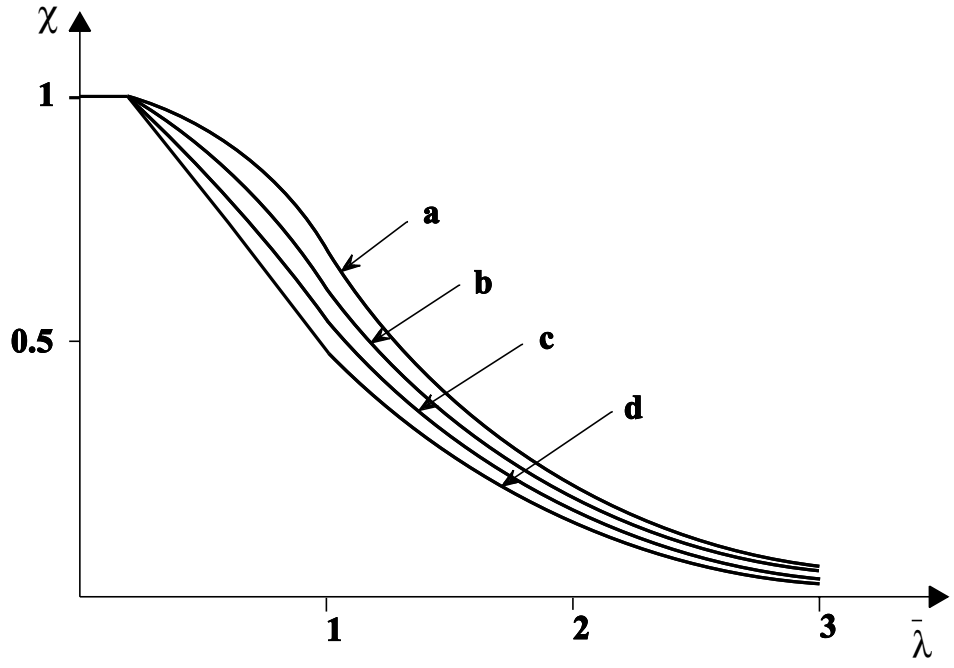


Figura 14 Curvas europeas de pandeo

La Tabla 1 da valores del factor de reducción χ en función de la esbeltez de referencia $\bar{\lambda}$.

El factor de imperfección α depende de la forma de la sección del pilar que se considere, del sentido en que puede ocurrir el pandeo (eje y ó eje x) y del proceso de fabricación del elemento de compresión (laminado en caliente, soldado o conformado en frío); los valores de α, que aumentan con las imperfecciones, vienen en la Tabla 2.

$\bar{\lambda}$	Factor de reducción χ			
	Curva a	**Curva b**	**Curva c**	**Curva d**
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

Tabla 1 Factores de reducción

Curva de pandeo	a	b	c	d
Factor de imperfección α	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 2 Factores de imperfección

La curva a representa formas casi perfectas: perfiles I laminados en caliente (h/b > 1,2) con alas delgadas ($t_f \leq 40$ mm) si el pandeo es perpendicular al eje mayor; también representa perfiles tubulares laminados en caliente.

La curva b representa formas con imperfecciones medias: define el comportamiento de la mayoría de los perfiles en cajón soldados, de perfiles I laminados en caliente que pandean por el eje menor, de perfiles I soldados con alas delgadas ($t_f \leq 40$ mm) y de perfiles I laminados con alas de espesor medio ($40 < t_f \leq 100$ mm) que se pandean por el eje mayor; afecta también a las secciones tubulares laminadas en frío tomándose la resistencia media del elemento después de laminado.

La curva c representa formas con muchas imperfecciones: Los perfiles U, L y T están en esta categoría, lo mismo que las secciones de cajón gruesas soldadas, las tubulares laminadas en frío calculadas por la resistencia a la fluencia de la chapa antes de laminar, los perfiles H laminados en caliente ($h/b \leq 1,2$ y $t_f \leq 100$ mm) que pandean por el eje menor, y algunos perfiles I soldados ($t_f \leq 40$ mm, que se pandean por el eje menor y $t_f > 40$ mm que pandean por el eje mayor).

La curva d representa formas con el máximo de imperfecciones: debe aplicarse a perfiles I laminados en caliente con alas muy gruesas ($t_f > 100$ mm) y secciones I soldadas muy gruesas ($t_f > 40$ mm), si pandean por el eje menor.

La Tabla 4 ayuda a elegir la curva de pandeo conveniente en función del tipo de sección, sus límites dimensionales y el eje donde puede ocurrir el pandeo. En las secciones tubulares conformadas en caliente, f_{yb} es la resistencia a la fluencia en tracción y f_{ya} es la resistencia media a la fluencia. Si la sección en estudio no es de las descritas, debe clasificarse análogamente.

Importa hacer notar que las curvas de pandeo se han fijado para elementos basculantes cargados en un extremo; si las condiciones límite son distintas es preciso evaluar atentamente la longitud de pandeo, ver Lección 9.7.

5.3 Imperfección inicial de curvatura equivalente

Para estudiar un pilar por la teoría de segundo orden, es necesario elegir las imperfecciones geométricas (sinuosidad inicial y excentricidad de la carga) y las mecánicas (tensiones residuales y variaciones de la tensión de fluencia). El Eurocódigo 3 propone valores de la imperfección de curvatura, e_o, cuyo efecto equivale a las dos clases de imperfecciones anteriores combinadas.

Si el pilar se calcula por análisis elástico, eo es como sigue:

$$e_o = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) W_{pl}/A \quad \text{para el cálculo plástico de secciones}$$

o,

$$e_o = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) W_{el}/A \quad \text{para el cálculo elástico de secciones} \qquad (12)$$

Si se calcula por análisis elástico y plástico (elastoplástico o plástico elásticamente perfecto), los valores de e_o están en función de la longitud de pandeo L y vienen en la Tabla 3.

Curva de pandeo	Elastoplástico	Plástico perfectamente elástico
a	L/600	L/400
b	L/380	L/250
c	L/270	L/200
d	L/180	L/150

Tabla 3 Factores de imperfección inicial de curvatura equivalente

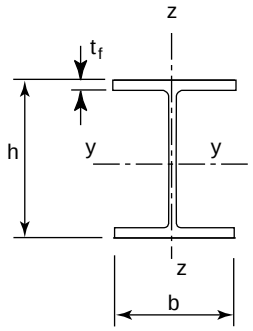
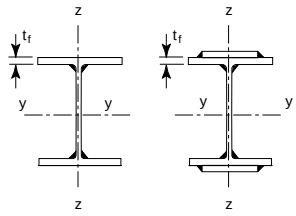
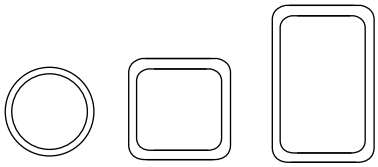
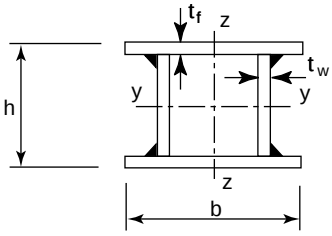
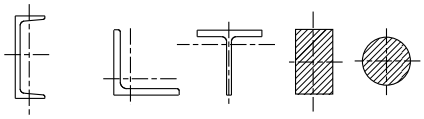
Sección	Límites	Pandeo por el eje	Curva de pandeo
Perfiles I laminados 	h/b > 1,2: $t_f \leq 40$ mm	y - y z - z	a b
	40 mm < $t_f \leq 100$ mm	y - y z - z	b c
	h/b ≤ 1,2: $t_f \leq 100$ mm	y - y z - z	b c
	$t_f > 100$ mm	y - y z - z	d d
Secciones I soldadas 	$t_f \leq 40$ mm	y -y z - z	b c
	$t_f > 40$ mm	y - y z - z	c d
Secciones huecas 	laminado en caliente	cualquiera	a
	conformado en frío - usando f_{yb}	cualquiera	b
	conformado en frío - usando f_{ya}	cualquiera	c
Secciones en cajón soldadas 	en general (excepto lo de abajo)	cualquiera	b
	espesores grandes de soldadura $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	y - y z - z	c c
U-, L-, T- y perfiles macizos 		cualquiera	c

Tabla 4 Elección de la curva de pandeo de una sección

5.4 Pasos del cálculo de elementos en compresión

Para calcular un elemento simple en compresión, primero hay que evaluar sus dos longitudes efectivas con relación a los dos ejes principales, sin olvidar las uniones previstas en los extremos. Segundo, deben calcularse el momento de inercia necesario para resistir las cargas críticas de Euler y tener una idea de la sección mínima requerida. La verificación prosigue entonces de este modo:

- las características geométricas de la forma y su resistencia a la fluencia dan la esbeltez de referencia $\overline{\lambda}$ (Ecuación 9).

- se calcula χ teniendo en cuenta el proceso de fabricación y el espesor del perfil, mediante una de las curvas de pandeo y $\overline{\lambda}$ (Ecuaciones 10 y 11).

Entonces tomamos la resistencia al pandeo de un elemento en compresión como:

$$N_{b.Rd} = \chi A f_y/\gamma_{M1} \quad (13)$$

la resistencia plástica como:

$$N_{pl.Rd} = A f_y/\gamma_{M0} \quad (14)$$

y la resistencia al pandeo local como:

$$N_{o.Rd} = A_{eff} f_y/\gamma_{M1} \quad (15)$$

Si resultan mayores que la carga axial de cálculo, el pilar es aceptable; si no, hay que tomar una sección mayor y comprobarla.

Además debe evitarse el pandeo torsional o flexo-torsional del pilar.

6. RESUMEN FINAL

1. Los elementos de compresión tienen muchas clases de secciones, que pueden ser pilares de una simples o compuestos, escalonados y de sección variable.

2. La sección del pilar achaparrado (con $\overline{\lambda} \leq 0,2$) puede llegar a la resistencia plástica total sin que ocurra el pandeo y no hay que comprobarla.

3. Si $\overline{\lambda} > 0,2$, debe considerarse que el pandeo reduzca la resistencia de la carga. Los pilares de esbeltez media se arruinan por pandeo inelástico y los esbeltos por pandeo elástico.

4. Las curvas de pandeo europeas dan el factor de reducción del modo de pandeo respectivo según la forma de la sección, el proceso de fabricación, la esbeltez de referencia y el eje por el que se puede producir el pandeo. Tienen en cuenta los estudios experimentales y teóricos y los resultados son de confianza.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Dowling P.J., Knowles, P. y Owens G.W., “Structural Steel Design”, The Steel Construction Institute, Butterworths, 1988.

2. European Convention for Constructional Steelwork, “Manual on Stability of Steel Structures”, June 1976.

3. Structural Stability Research Council, “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”, Editado por B.G. Johnson, John Wiley & Sons, 1976.

4. Trahair, N.S. y Bradford, M.A., “The Behaviour and Design of Steel Structures”, 2nd Edition, Chapman & Hall, 1988.

5. Mac Ginley T.J. y Ang T.C., “Structural Steelwork: Design to Limit State Theory”, Butterworths, 1987.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.5.2: Pilares II

OBJETIVO

Explicar la aplicación de las curvas de pandeo europeas e introducir el concepto de pandeo por torsión y flexo-torsión

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1: Definición de equilibrio estático estable e inestable

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales I

Lección 9.5.1: Pilares I

LECCIONES AFINES

Lección 9.2: Clasificación de secciones transversales

Lección 9.10.1: Vigas-Columna

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.5: Cálculo de pilares

RESUMEN

Se explica y justifica el análisis de las imperfecciones que conduce a la fórmula de Ayrton-Perry y a las curvas de pandeo europeas. Se presentan los conceptos de pandeo por torsión y flexo-torsión en el caso de elementos de compresión simples.

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento real de las estructuras de acero es siempre diferente de la predicción teórica; las principales razones de esta discrepancia son:

- imperfecciones geométricas por defectos de falta de rectitud, alas no paralelas, asimetría de la sección, etc.;
- imperfecciones del material debidas a la tensión remanente (causada por el proceso de laminación o fabricación) o falta de elasticidad del material;
- desviación de la carga aplicada fuera de la posición ideal, debida a uniones imperfectas, tolerancias de montaje o falta de verticalidad del elemento.

Algunas razones citadas son importantes en el pandeo de pilares esbeltos (imperfecciones geométricas), otras en la compresión de pilares achaparrados (gran sección y poca longitud) (material inelástico), y otras en el pandeo de pilares de esbeltez media (imperfecciones geométricas y tensiones remanentes). En la Lección 9.5.1 se describe el comportamiento de estos tres tipos de pilares.

En realidad todas las imperfecciones actúan simultáneamente y su efecto depende de la intensidad de cada una y de la esbeltez del pilar. Un estudio experimental de muchos pilares y columnas de diversas características dio los resultados que muestra la Figura 1. Los resultados de estos ensayos deben estar debajo de la curva de pandeo de Euler porque la sinuosidad inicial, la excentricidad de las cargas aplicadas y las tensiones residuales hacen descender la carga de pandeo permisible; pero se pueden encontrar algunos resultados sobre la línea de tensión de fluencia para pilares poco esbeltos (achaparrados) debido a un posible endurecimiento por tensión. La curva de seguridad obtenida por análisis estadístico siempre está situada debajo de los valores experimentales mínimos y adopta la forma que se ve en la Figura 1; la parte horizontal de la curva es necesaria para limitar la tensión permisible al valor de fluencia. Esta es la forma general de las curvas de pandeo europeas.

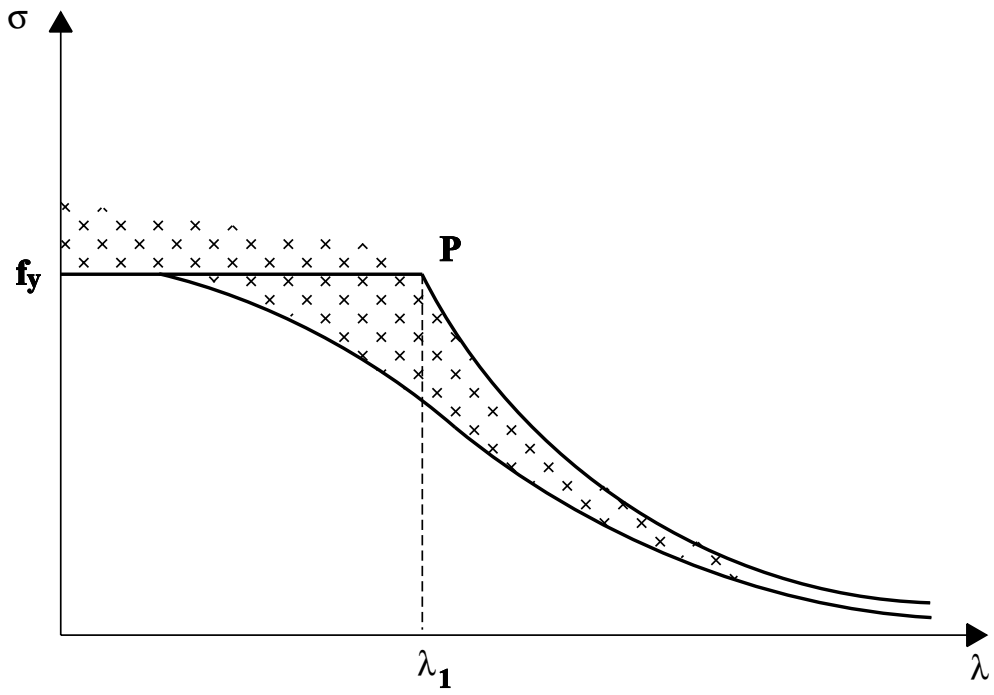


Figura 1 Resultados de ensayos reales en pilares, curvas de pandeo teóricas y experimentales

2. FORMULACIÓN ANALÍTICA DE LAS CURVAS DE PANDEO EUROPEAS

2.1 Deflexión inicial

En la hipótesis de que la flecha inicial de un pilar basculante de longitud l tenga una curva de medio seno de magnitud e_o (Figura 2), la deformación inicial a lo largo del pilar puede expresarse así:

$$y_o = e_o \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \qquad (1)$$

La ecuación diferencial de la deformación de dicho pilar basculante con una carga axial N es:

$$\frac{d^2y}{d^2x} + \frac{N(y + y_o)}{EI} = 0 \qquad (2)$$

Combinándolo con las expresión de y_o, y teniendo en cuenta las condiciones límite, la solución de esta ecuación es:

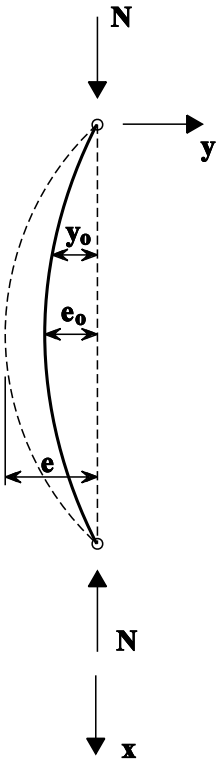


Figura 2 Pilar de extremos articulados con curvatura inicial

$$y = \frac{e_o}{(N_{cr} / N - 1)} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \qquad (3)$$

La deformación máxima total e del pilar es entonces:

$$e = e_o + \frac{e_o}{N_{cr} / N - 1} = \frac{e_o}{1 - N / N_{cr}} \qquad (4)$$

y la relación $1/(1 - N/N_{cr})$ se llama generalmente "factor de amplificación".

Teniendo en cuenta el momento flector máximo, Ne, debido al pandeo, el equilibrio del pilar exige que:

$$\frac{N}{A} + \frac{N e}{w} = f_y \qquad (5)$$

siendo f_y la tensión de fluencia.

Si N es la máxima carga axial, limitada por el pandeo, y σ_b la tensión máxima normal (σ_b = N/A), esto pasa a ser:

$$\frac{N}{A} + \frac{N}{A} \frac{e A}{W} = \sigma_b + \sigma_b \frac{e A}{W} = f_y \qquad (6)$$

o, introduciendo σ_{cr}, la tensión crítica de Euler ($\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$) e incluyendo el valor de e:

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{e_o}{1 - \sigma_b / \sigma_{cr}} \frac{A}{W} = f_y \qquad (7)$$

que puede expresarse así:

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b)(f_y - \sigma_b) = \sigma_b \sigma_{cr} e_o \frac{A}{W} \qquad (8)$$

Esta ecuación es la forma básica de la fórmula de Ayrton-Perry.

2.2 Excentricidad de la carga aplicada

Si se aplica la carga de compresión axial con una excentricidad ec en un pilar basculante inicialmente recto (Figura 3), se introduce un momento de pandeo (N e_c) que incrementa el

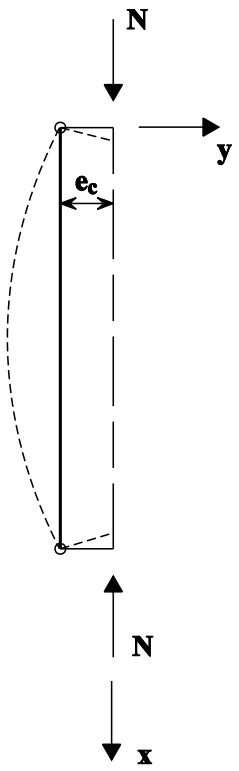


Figura 3 Pilar de extremos articulados con carga excéntrica

efecto de pandeo. Obviamente, este efecto aumenta a la vez que la carga axial.

Se puede probar que la flecha total máxima e del pilar es igual a:

$$e = e_c - \frac{e_c}{\cos\left[l / 2\,(N / EI)^{1/2}\right]} \qquad (9)$$

y el "factor de amplificación" a: $1/\cos\,[\pi/2\,(N/N_{cr})^{1/2}]$

Ahora bien, si se considera el efecto combinado de la flecha inicial y de la excentricidad de la carga, la tensión es aproximadamente igual a:

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{e_o + e_c + 0,23\, e_c\, \sigma_b / \sigma_{cr}}{1 - \sigma_b / \sigma_{cr}} \frac{A}{W} = f_y \qquad (10)$$

Esta relación es correcta, con un porcentaje pequeño de error, para todos los valores de σ_b desde 0 a σ_{cr}.

2.3 La fórmula de Ayrton-Perry

La forma clásica de la forma de Ayrton-Perry es:

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b)\,(f_y - \sigma_b) = \eta\, \sigma_{cr}\, \sigma_b \qquad (11)$$

Esta es la forma de la ecuación (8) si $\eta = (e_o\, A) / W$

El coeficiente η representa la imperfección de falta de rectitud inicial del pilar, pero puede incluir también otros defectos, como la tensión residual, en cuyo caso se denomina "factor de imperfección generalizado".

Es posible escribir la fórmula de Ayrton-Perry de otra forma:

$$(\sigma_{cr} / f_y - \bar{N})\,(1 - \bar{N}) = \eta\, \bar{N}\, \sigma_{cr} / f_y \qquad (12)$$

siendo: $\bar{N} = \sigma_b / f_y$

Si $\bar{\lambda}_2 = f_y / \sigma_{cr}$ entonces, dividiendo entre σ_{cr} / f_y, arroja:

$$(1 - \bar{N}\,\bar{\lambda}_2)\,(1 - \bar{N}) = \eta\, \bar{N} \qquad (13)$$

o: $$\bar{\lambda}^2\, \bar{N}^2 - \bar{N}\,(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1) + 1 = 0 \qquad (14)$$

Esta forma lleva a la formulación europea.

2.4 Factor de imperfección generalizado

El factor de imperfección generalizado introduce en el cálculo del pilar real todos los defectos relevantes: imperfecciones geométricas, excentricidad de la carga aplicada y tensiones remanentes; no se incluyen las propiedades inelásticas porque sólo afectan a los pilares achaparrados. El factor de imperfección generalizado se puede expresar por el coeficiente η que representa el efecto de las deflexiones:

$$\eta = \frac{l\, A}{\gamma\, W} \qquad (15)$$

si $\gamma = l / e_o$, representa la imperfección geométrica equivalente (que es la relación de la longitud respecto a la curvatura inicial equivalente del pilar).

Entonces, por ser $L = \lambda / i$, $W = I / v$, y $i^2 = I / A$, η se puede escribir así:

$$\eta = \frac{\lambda}{\gamma\,(i / v)} \qquad (16)$$

siendo (i/v) el diámetro relativo de la elipse de inercia en el eje donde se produce el pandeo.

Como $\lambda = \bar{\lambda}\ \Pi\ (E/f_y)^{1/2}$, introduciendo el plató $\bar{N} = 1$ cuando $\bar{\lambda} \le \bar{\lambda}_o$, la relación anterior se puede representar así:

$$\eta = \frac{90 \cdot 15\left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_o\right)}{\gamma\,(i / v)} \qquad (17)$$

porque todas las curvas de pandeo europeas se han establecido con $f_y = 255$ MPa (ya que influye muy poco el valor real de la tensión de fluencia).

2.5 Formulación europea

Expresando η así:

$$\eta = \alpha\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_o) \qquad (18)$$

la solución más pequeña de la ecuación (14) es:

$$\bar{N} = \frac{1 + \alpha\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_o) + \bar{\lambda}^2 - \left\{\left[1 + \alpha\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_o) + \bar{\lambda}^2\right]^2 - 4\bar{\lambda}^2\right\}^{1/2}}{2\bar{\lambda}^2} \qquad (19)$$

Multiplicando el término conjugado y tomando $\bar{\lambda}_o = 0{,}2$, esta relación da la formulación europea:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \left[\phi^2 - \bar{\lambda}^2\right]^{1/2}} \le 1 \qquad (20)$$

siendo:

$$\phi = 0{,}5\,[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2) + \bar{\lambda}^2] \qquad (21)$$

χ el factor de reducción considerado en el Eurocódigo 3.

Todas las formas de las secciones con que se calculan los pilares de acero tienen el coeficiente α, que varía de 0,21 a 0,76 y se puede representar el comportamiento real de todos los pilares clásicos mediante las cuatro curvas (a, b, c y d) de la Figura 4, aumentando α con las imperfecciones.

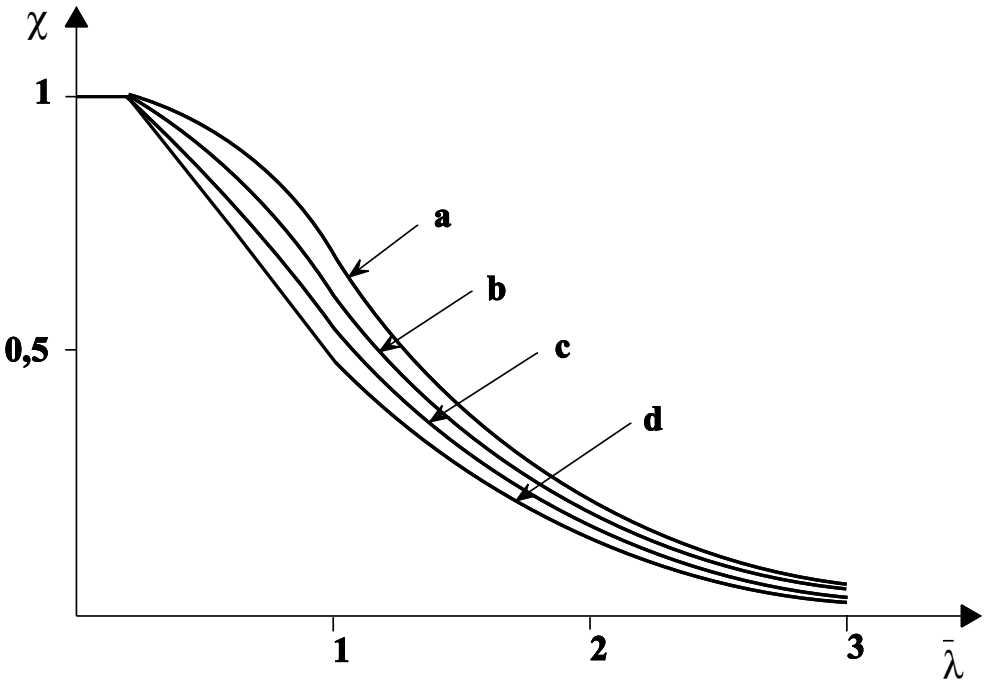


Figura 4 Curvas europeas de pandeo

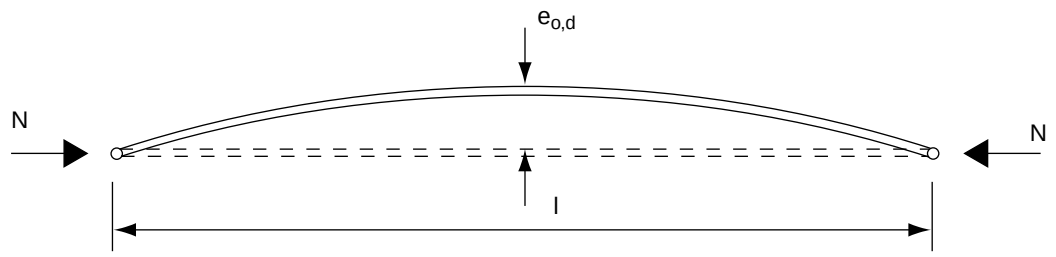
α toma en cuenta dos clases de imperfecciones (geométricas y mecánicas). se puede expresar $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, representando $\alpha 1$ las imperfecciones mecánicas y α_2 las geométricas. Considerando sólo las imperfecciones geométricas, las curvas de pandeo europeas se establecieron con una curvatura inicial igual a L/1000 (Lección 9.5.1); que da $\alpha_2 = 90.\ 15/[1000\ (i/v)]$.

Considerando ahora la deflexión inicial equivalente: $e_o = L/\gamma$, enlazada al factor de imperfección

generalizado η (Ecuación (15)) y tomando la ecuación (18), tenemos:

$$e_o = \alpha\,(\bar{\lambda} - 0{,}2)\,W / A \qquad (22)$$

que representa la imperfección curva inicial de un pilar basculante, incluyendo la falta de rectitud inicial y el efecto de las tensiones remanentes; esto habrá de tenerse en cuenta en un análisis de segundo orden. Los valores de cálculo correspondientes a cada curva de pandeo europea vienen en la Tabla 1.



Sección		Método de análisis global	
Método para verificar la resistencia	Tipo de sección y eje	Elástico o rígido -Plástico o elástico - Perfectamente plástico	Elastoplástico (método de zona plástica)
Elástico [5.4.8.2]	Cualquiera	$\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{el}/A$	
Lineal [5.4.8.1(12)]	Cualquiera	$\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{pl}/A$	
Plástico [5.4.8.1(1) a (11)]	Sección en I eje yy	$1{,}33\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{pl}/A$	$\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{pl}/A$
	Sección en I eje zz	$2{,}0\ k_\gamma\ e_{eff}/\varepsilon$	$k_\gamma\ e_{eff}/\varepsilon$
	Sección Rectangular hueca	$1{,}33\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{pl}/A$	$\alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)k_\gamma W_{pl}/A$
	Sección cilíndrica hueca	$1{,}5\ k_\gamma\ e_{eff}/\varepsilon$	$k_\gamma\ e_{eff}/\varepsilon$

$k_\gamma = (1 - k_\delta) + 2\,k_\delta\,\bar{\lambda}$ pero $\geq 1{,}0$

Curva de pandeo	α	e_{eff}	k_δ			
			$\gamma_{M1} = 1{,}05$	$\gamma_{M1} = 1{,}10$	$\gamma_{M1} = 1{,}15$	$\gamma_{M1} = 1{,}20$
a	0,21	l/600	0,12	0,23	0,33	0,42
b	0,34	l/380	0,08	0,15	0,22	0,28
c	0,49	l/270	0,06	0,11	0,16	0,20
d	0,76	l/180	0,04	0,08	0,11	0,14

Elementos no uniformes:

Tomar el valor W_{el}/A ó W_{pl}/A en el centro de la longitud de pandeo l

Tabla 1 Valores de cálculo de la imperfección de curvatura inicial $e_{o,d}$ (de la Figura 5.5.1, Eurocódigo 3) [1]

3. PANDEO POR TORSIÓN Y FLEXO-TORSIÓN

En los perfiles de acero laminado con los tipos de sección comunes en los elementos de compresión, el modo de pandeo es generalmente por flexión, aunque en algunos casos pueden regir los modos de torsión o flexo-torsión y hay que investigarlos en todas las secciones que tengan poca resistencia a la torsión.

3.1 Sección sometida a pandeo por torsión o flexo-torsión

Los pilares con carga concéntrica pueden pandearse por flexión en uno de los ejes principales (pandeo clásico), por alabeo en el centro del esfuerzo cortante (pandeo por torsión) o por la combinación de flexión y torsión (pandeo por flexo-torsión).

El pandeo por torsión sólo puede ocurrir si coinciden el centro del esfuerzo cortante y el centroide y si la sección puede girar, lo que lleva a la torsión del elemento. La secciones en I o Z con alas anchas están expuestas al pandeo por torsión; también debe verificarse esta clase de inestabilidad en las torres hechas con perfiles angulares.

En las secciones simétricas con la carga axial fuera del plano de simetría, y en las asimétricas, como las que tienen forma de C, de sombrero de copa (omega), de L con lados iguales, de T, y secciones simétricas en I aisladas, o sea, donde no coinciden el centro del esfuerzo cortante y el centroide, debe estudiarse el pandeo por flexo-torsión.

La Figura 5 muestra ejemplos de secciones cuyo pandeo por torsión o por flexo-torsión debe investigarse.

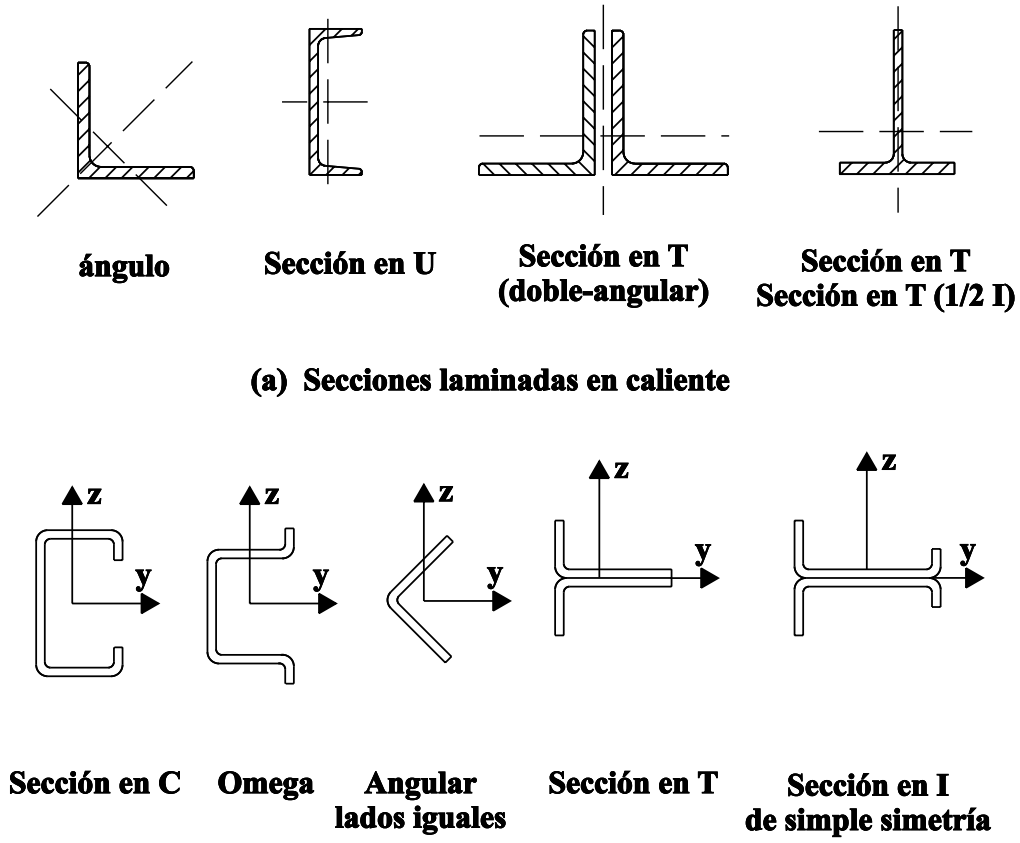


Figura 5 Secciones transversales típicas que requieren comprobación de pandeo a torsión y a flexo-torsión

3.2 Pandeo por torsión

El análisis de pandeo por torsión es bastante complejo y demasiado largo para incluirlo aquí. La tensión crítica depende de las condiciones límite y es muy importante evaluar con precisión la posibilidad de giro en los extremos. La tensión crítica depende de la rigidez torsional del elemento, de la resistencia al alabeo que ofrezca el propio elemento y por el empotramiento de los extremos.

La ecuación diferencial del pandeo por torsión es:

$$G I_D \frac{d^4 \theta}{dx^4} - E I_w \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -N r_o^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} \qquad (23)$$

y la carga crítica del pandeo por torsión puro, $N_{cr\theta}$, es:

$$N_{cr\,\theta} = \frac{1}{r_o^2}\left[G I_D + \frac{II^2 E I_w}{l_{cr}^2} \right] \qquad (24)$$

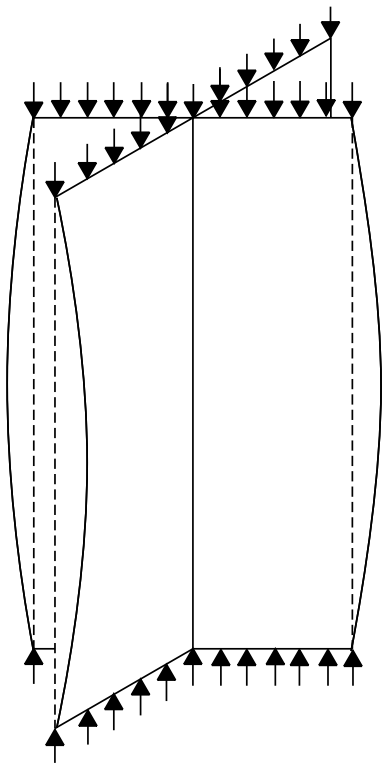


Figura 6 Pandeo por torsión de un pórtico cruciforme

siendo r_o el radio polar de giro, G el módulo de elasticidad transversal, N la carga axial, θ el ángulo de alabeo, I_D la constante de torsión, e I_w la constante de alabeo. La lección 9.9.2 da más detalles acerca del significado físico y el cálculo de la constante de alabeo.

Para estudiar un elemento de compresión con pandeo por torsión hay que evaluar una nueva esbeltez de referencia :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr\,\theta}} \qquad (25)$$

siendo $\sigma_{cr\theta}$ la tensión elástica crítica del pandeo por flexión obtenida con la carga crítica $N_{cr\theta}$ (ecuación (24)).

El pandeo por flexión se produce generalmente a una tensión crítica menor que el pandeo por torsión.

La Figura 6 ilustra este fenómeno en el caso de una pieza cruciforme comprimida.

3.3 Pandeo por flexo-torsión

Se trata de la combinación del pandeo por flexión y por torsión y es muy complejo para tratarlo aquí en detalle.

Las tres ecuaciones básicas de equilibrio que rigen este tipo de pandeo son:

$$E I_y = \frac{d^2 w}{dx^2} = -N (w + y_o\, \theta) \qquad (26)$$

$$E I_z = \frac{d^2 v}{dx^2} = -N (v + z_o\, \theta) \qquad (27)$$

$$E I_w = \frac{d^4 \theta}{dx^4} - (G I_D - r_o^2\, N) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - N y_o \frac{d^2 w}{dx^2} + N z_o \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \qquad (28)$$

siendo y_o y z_o las coordenadas del centro del esfuerzo cortante y v y w las deflexiones que se presentan en la Figura 7.

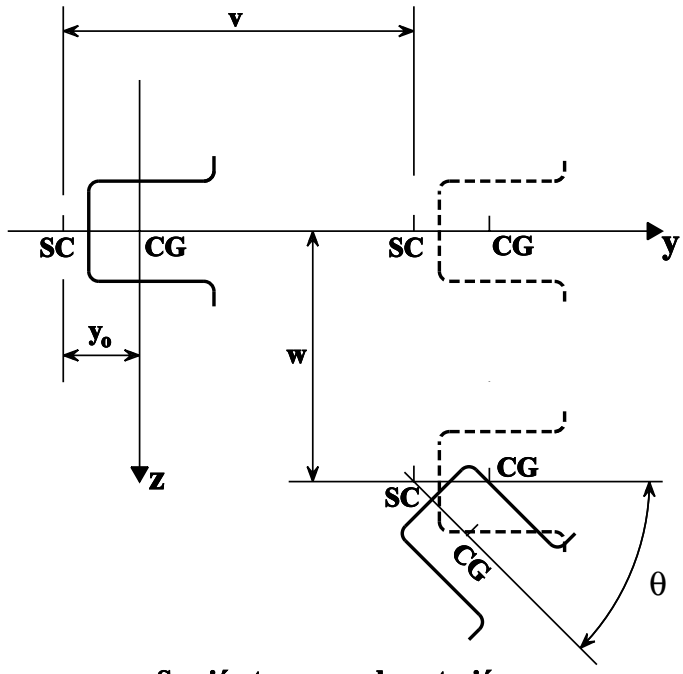


Figura 7a Pandeo por flexión de elemento de sección en omega

La carga crítica del pandeo por torsión pura se obtienen de la raíz más baja de la siguiente ecuación:

$$r_o^2 (N_{cr} - N_{crz})(N_{cr} - N_{cry})(N_{cr} - N_{cr\theta}) - \ldots$$
$$\ldots N_{cr}^2 z_o^2 (N_{cr} - N_{cry}) - N_{cr}^2 y_o^2 (N_{cr} - N_{crz}) = 0 \quad (29)$$

siendo N_{cry} N_{crz} la carga crítica del pandeo por flexión pura en los ejes y y z respectivamente, y $N_{cr\theta}$ está definido en la ecuación (24).

Las secciones con un eje de simetría (o dos), dan y_o (o z_o) = 0, dando lugar a una simplificación de la ecuación anterior; por ejemplo, una sección con dos ejes de simetría da:

$$(N_{cr} - N_{crz})(N_{cr} - N_{cry})(N_{cr} - N_{cr\theta}) = 0 \quad (30)$$

y los elementos se pandean a las cargas críticas más bajas sin que los modos se combinen.

Esta lección trata solamente del efecto de las imperfecciones sobre la conducta de los pilares de acero en compresión, y por lo tanto no se consideran los momentos de los extremos. El pandeo por flexo-torsión, en este caso, se debería a efectos tales como la excentricidad de la carga o a defectos de la sección.

Para estudiar el pandeo flexo-torsional de un elemento en compresión hay que evaluar una esbeltez de referencia nueva, $\bar{\lambda}$, de una manera parecida al pandeo por torsión (ecuación (25)).

En este caso, $\sigma_{cr\theta}$ es la tensión elástica para el pandeo por flexión obtenida con la carga crítica correspondiente al pandeo flexo-torsional.

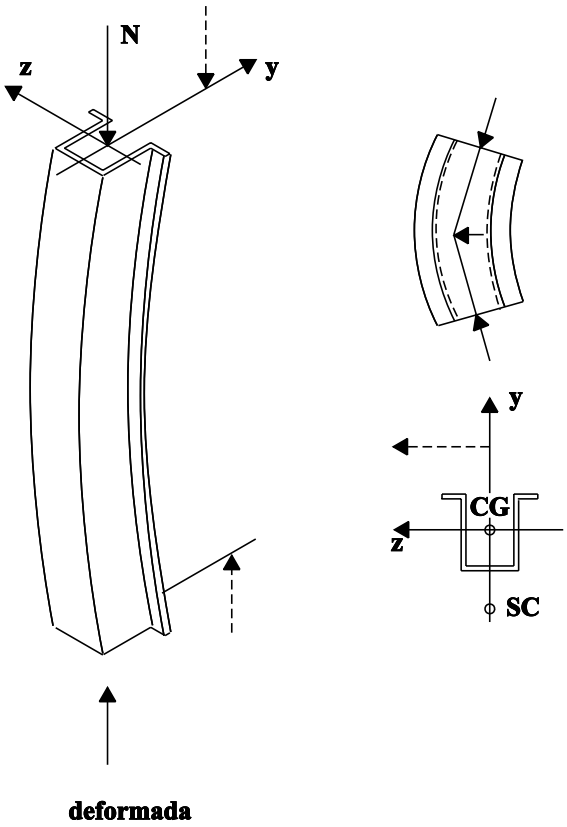


Figura 7b Pandeo flexo-torsional de sección en omega

4. RESUMEN FINAL

1. Se examinan los efectos del fenómeno de pandeo. La falta de rectitud inicial, la excentricidad de la carga y las tensiones residuales tienen una influencia importante en el pandeo de los pilares esbeltos y de esbeltez media.
2. La fórmula de Ayrton-Perry describe el comportamiento de pilares reales. Es la base de las curvas de pandeo europeas.
3. Se explican las curvas de pandeo europeas, que incluyen un factor de imperfección generalizado.
4. Se hace una introducción al pandeo por torsión y por flexo-torsión.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Dowling, P.J., Knowles, P. y Owens, G.W., “Structural Steel Design”, The Steel Construction Institute, Butterworths, 1988.

2. European Convention for Construction Steelwork, “Manual on Stability of Steel Structures”, Junio 1976.

3. Structural Stability Research Council, “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”, Edited by B. G. Johnson, John Wiley & Sons, 1976.

4. Maquoi, R. and Rondal, J., “Mise en Equation des Nouvelles Courbes Européennes de Flambement”, Revue Construction Méttalique, no. 1, 1978.

5. Timoshenko, S.P. y Gere, J.M., “Theory of Elastic Stability”, 2ª Edición, McGraw-Hill, 1961.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRTUCTURALES

Problema resuelto 9.5(i), (ii) Y (iii): Cálculo de Pilares

CONTENIDO

Problema resuelto 9.5(i): Influencia de la forma de la sección en el peso del pilar

Problema resuelto 9.5(ii): Incluencia de la esbeltez en la resistencia portante del pilar

Problema resuelto 9.5(iii): Influencia de la longitud de pandeo por el eje fuerte y el eje débil en el cálculo de pilares.

PROBLEMA 9.5(i) Influencia de la forma de la sección en el peso del pilar

Problema

Encontrar las secciones más ligeras, entre varias distintas, para un pilar uniforme biarticulado en sus extremos. La altura del pilar es de 4,5 m y debe soportar una carga de compresión axial de 550 kN (Figura 1).

Las secciones que se van a estudiar son:

- IPE
- HEA, HEB
- tubular cuadrada
- tubular rectangular (h = 2b)
- tubular circular

Todas las secciones son de acero Fe 360 y laminadas en caliente.

Se estudiarán dos casos: uno en que no se impide el pandeo en ninguna dirección y otro en que el pandeo sólo es posible por el eje fuerte.

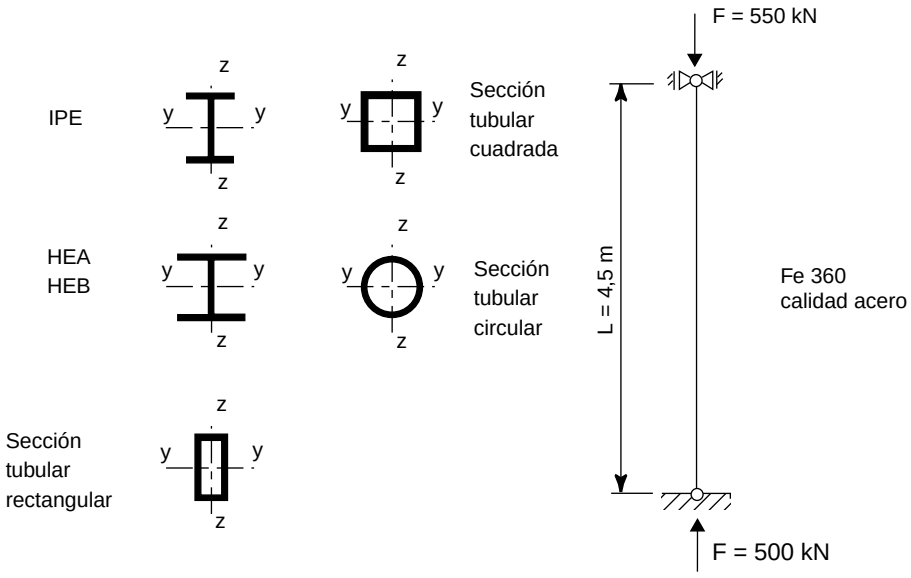


Figura 1 Secciones y disposición de pilar

1.1 Consideraciones generales

Referencia en Eurocódigo 3

El pilar es biarticulado en cualquier sentido; así que las longitudes de pandeo l_y y l_z son iguales a la longitud real L, es decir, $l_y = l_z = 4{,}5$ m

El valor nominal de la resistencia a la fluencia del acero clase Fe 360 es $f_y = 235$ M_{pa}, siendo el grosor $t \leq 40$ mm. El módulo de elasticidad es $E = 210 \times 10^3$ M_{pa}.

Para comprobar un elemento a compresión formado por un perfil laminado, siendo N_{Sd} el valor de cálculo de la carga axial (aquí $N_{Sd} = 550$ kN), sólo es necesario verificar:

5.4.4(1)

$$N_{Sd} \leq N_{c.Rd}$$

siendo $N_{c.Rd}$ la resistencia de cálculo a la compresión de la sección, que es el valor menor de la resistencia plástica de cálculo de la sección bruta:

$$N_{pl.Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

5.4.4(1)

y la resistencia de cálculo al pandeo:

$$N_{b.Rd} = \frac{\chi \beta_A A f_y}{\gamma_M 1}$$

5.5.1.1(1)

siendo:

$\beta_A = 1$ en las secciones de Clase 1, 2, ó 3,
χ el factor de reducción del modo de agotamiento respectivo.

Como $\chi \leq 1$, $\beta_A = 1$, $\gamma_{M0} = 1{,}1$ y $\gamma_{M1} = 1{,}1$, cuando pueda ocurrir el pandeo, $N_{pl.Rd}$ es siempre tal que:

$$N_{pl.Rd} \geq N_{b.Rd}$$

El pandeo manda cuando: $\chi \leq 1$, es decir, cuando: $\overline{\lambda} > 0{,}2$.

5.5.1.1(2)

Como se ha escogido un elemento a compresión axial laminado en caliente, el modo de pandeo principal es por flexión.

Los elementos son uniformes, así que el valor del factor χ se obtiene de:

5.5.1.2(1)

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \overline{\lambda}^2}} \leq 1$$

Referencia en Eurocódigo 3

siendo:

$$\phi = 0{,}5\,[1 + \alpha\,(\bar{\lambda} - 0{,}2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\beta_A A f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\beta_A f_y}{E}}$$

$$\lambda = \frac{l}{i}$$

Tabla 5.5.1

α es un factor de imperfección que depende de la curva de pandeo que se aplique, que depende a su vez de la forma de la sección, del eje de pandeo y de la relación h/b (Tabla 1).

Curva de pandeo	a	b	c	d
Factor de imperfección α	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 1 Factor de imperfección

1.2 Pandeo por el eje débil

Si no se impide el pandeo por el eje menor z y la longitud de pandeo es igual en cualquier dirección, hay que comprobar el eje débil z del pilar.

Secciones IPE o HPE

En las secciones laminadas en caliente usuales con perfil IPE o HPE, el espesor del ala es siempre $t_f \leq 40$ mm. Con esta hipótesis, cuando el pandeo se produce por el eje débil:

- si h/b > 1,2, debe aplicarse la curva de pandeo b,
- si h/b ≤ 1,2, debe aplicarse la curva de pandeo c.

Tabla 5.5.3

Secciones tubulares

A las secciones tubulares laminadas en caliente se les aplica siempre la curva a.

Tabla 5.5.3

Referencia en Eurocódigo 3

Resultados

Las Tablas 2 y 3 que siguen indican los resultados de los pasos intermedios del cálculo. El primer resultado es la relación h/b para elegir la curva de pandeo y el factor de imperfección α, el segundo es la evaluación de las relaciones d/t_w y c/t_f para comprobar que la sección no es de la Clase 4, el tercero es el cálculo del factor χ y el último es el cálculo de la resistencia de cálculo al pandeo $N_{b.Rd}$.

En cada caso se da la forma precisa necesaria y la inmediatamente más baja.

Perfil	h (mm)	b (mm)	h/b	α	d/t_w	c/t_f	Clase
IPE 330	330	160	2,06	0,34	36,1	6,9	2
IPE 360	360	170	2,12	0,34	37,4	6,7	2
HEA 180	171	180	0,95	0,49	20,3	8,4	1
HEA 200	190	200	0,95	0,49	20,6	10,0	1
HEB 160	160	160	1,00	0,49	13,0	6,1	1
HEB 180	180	180	1,00	0,49	14,4	6,4	1

Tablas 5.5.3 5.5.1 5.3.1

Tabla 2 Pandeo por el eje débil: características geométricas

Se obtiene una sección Clase 1 cuando: $d/t_w = 33\varepsilon$ y cuando: $c/t_f \leq 10\varepsilon$.
Se obtiene una sección Clase 2 cuando: $d/t_w \leq 38\varepsilon$ y cuando: $c/t_f \leq 11\varepsilon$.

Tabla 5.3.1

Perfil	i_z (mm)	$\bar{\lambda}_z$	ϕ	χ_z	A (cm^2)	$N_{b.Rd}$ (kN)
IPE 330	35,5	1,350	1,606	0,404	62,6	540
IPE 360	37,9	1,264	1,480	0,444	72,7	690
HEA 180	45,2	1,060	1,273	0,506	45,3	490
HEA 200	49,8	0,962	1,150	0,562	53,8	646
HEB 160	40,5	1,183	1,441	0,442	54,3	513
HEB 180	45,7	1,049	1,258	0,512	65,3	715
200×100×8	40,5	1,185	1,305	0,540	43,5	501
200×100×10	39,5	1,212	1,341	0,522	59,9	590

5.5.1.1(1)

Tabla 3 Pandeo por el eje débil: resultado de los cálculos

Referencia en Eurocódigo 3

La sección tubular rectangular 200 × 100 × 10 es de Clase 1 porque $(h - 3t_f)/t_w = 17 < 33\varepsilon$ y $(b - 3t_w)/t_f = 7 < 33\varepsilon$ ($\varepsilon = 1$ cuando $f_y = 235$ MPa).

Tabla 5.3.1(1)

Considerando la resistencia portante por unidad de área vemos que la sección IPE es la menos eficaz cuando no se impide el pandeo por el eje débil, por tanto, su momento de inercia es bastante reducido y da lugar a un radio de giro pequeño.

En cambio, la RHS de 200 × 8 es la más eficaz.

1.3 Pandeo por el eje fuerte

Supongamos que un arriostramiento adecuado impide que el eje débil pandee.

Secciones IPE o HE

Cuando el pandeo se produce por el eje fuerte y:

- Si h/b > 1,2, debe aplicarse a la curva a.
- Si h/b ≤ 1,2, debe aplicarse a la curva b.

Tabla 5.5.3

Secciones tubulares

A las secciones tubulares siempre les corresponde la curva a.

Tabla 5.5.3

Resultados

El resultado de los pasos intermedios se da en las Tablas 4 y 5, igual que antes.

Perfil	h (mm)	b (mm)	h/b	α	d/t_w	c/t_f	Clase
IPE 220	200	100	2,00	0,21	28,4	5,9	1
IPE 220	220	110	2,00	0,21	30,1	6,0	1
HEA 140	133	140	0,95	0,34	16,7	8,2	1
HEA 160	152	160	0,95	0,34	17,3	8,8	1
HEB 120	120	120	1,00	0,34	11,4	5,5	1
HEB 140	140	140	1,00	0,34	13,1	5,8	1

Tabla 4 Pandeo por el eje fuerte: características geométricas

Tablas 5.5.3 5.5.1 5.3.1

Referencia en Eurocódigo 3

5.5.1.1(1)

Perfil	i_v (mm)	$\bar{\lambda}_y$	ϕ	χ_y	A (cm^2)	$N_{b.Rd}$ (kN)
IPE 200	82,6	0,580	0,708	0,897	28,5	546
IPE 220	91,1	0,526	0,673	0,916	33,4	654
HEA 140	57,3	0,836	0,958	0,702	31,4	471
HEA 160	65,7	0,729	0,856	0,767	38,8	636
HEB 120	50,4	0,951	1,080	0,629	34,0	457
HEB 140	59,3	0,808	0,930	0,719	43,0	661
200×100×5	71,6	0,669	0,773	0,862	28,2	520
200×100×6	71,0	0,675	0,778	0,859	33,4	614

Tabla 5 Pandeo por el eje fuerte: resultado de los cálculos

La sección tubular rectangular de 200 × 100 × 6 es de la Clase 1 porque $d/t_w = 30,3$ y $(b-3t_f)/t_f = 13,7$.

Cuando el pandeo sólo es posible por el eje fuerte, la sección menos eficaz es la HEB.

1.4 Formas de doble simetría

En las secciones de doble simetría, como la tubular cuadrada o circular, el pandeo no se produce en el eje fuerte o el débil. El resultado de los cálculos viene en la Tabla 6.

5.5.1.1(1)

Secciones tubulares	i (mm)	$\bar{\lambda}$	ϕ	χ	A (cm^2)	$N_{b.Rd}$ (kN)
Cuadradas						
140×140×6,3	54,0	0,887	0,965	0,743	32,5	515
150×150×6	58,3	0,822	0,904	0,783	33,4	559
Redondas						
168,3×6,3	57,3	0,836	0,916	0,775	32,1	530
168,3×7,1	57,0	0,840	0,920	0,772	36,0	593

Tabla 6 Pandeo de secciones de doble simetría

La sección tubular cuadrada de 150×150×6 es de Clase 1 ($d/t_w = 22$ y $[b - 3t_f]/t_f = 13,7$). La sección tubular circular de ϕ 168,3×7,1 también es de Clase 1 ($d/t = 23,7 < 50\varepsilon^2$).

Tabla 5.3.1

1.5 Conclusión

Para comparar las secciones anteriores, el peso por metro de cada forma viene en las Tablas 7 a 9. Como la resistencia portante no puede ser exactamente igual al valor de cálculo de la carga axial N_{Sd} = 550 kN, se calcula una relación:

$$W_{550} = \frac{\text{Peso por metro} \times 550 \text{ kN}}{N_{b.Rd}}$$

para obtener la mejor clasificación de las soluciones.

	IPE 360	HEA 200	HEB 180	Cuadrada HS200×200×10
Peso (kg/m)	57,1	42,3	51,2	41,5
W_{550} (kg/m)	45,5	36,0	39,4	38,7

Tabla 7 Pandeo por el eje débil

	IPE 220	HEA 160	HEB 140	Cuadrada HS200×200×6
Peso (kg/m)	26,2	30,4	33,7	26,3
W_{550} (kg/m)	22,0	26,3	28,0	23,6

Tabla 8 Pandeo por el eje fuerte

	Cuadrada HS 150×150×6	Redonda 168,3 × 7,1
Peso (kg/m)	26,3	28,2
W_{550} (kg/m)	25,9	26,1

Tabla 9 Pandeo de seciones bisimétricas

Estas tablas explican por qué la elección de una sección da lugar a una gran diferencia de peso. Cuando el pandeo se puede producir en cualquier sentido, las secciones tubulares circulares o cuadradas son claramente las mejores antes que las HEA, los tubos rectangulares, los tipos HEB e IPE representan las formas más caras. Si el pilar pandea solamente por el eje fuerte, la mejor solución es la IPE antes que las sec-

ciones tubulares, siendo HE, en este caso, la menos eficaz. Sin embargo, importa destacar que el aspecto práctico de la unión con otras piezas de la estructura es lo que rige a veces la elección de la forma, ya que generalmente es más barato unir las secciones IPE o HE a otros elementos.

Referencia en Eurocódigo 3

EJEMPLO 9.5(ii) Incluencia de la esbeltez en la resistencia portante del pilar.

Problema

Estudiar la máxima carga axial que puede soportar un pilar en relación son su sección. El pilar tiene los extremos fijos contra el pandeo por el eje fuerte y el pandeo por el eje débil está impedido.

La altura del pilar es 9 m. Está compuesto con secciónes HEB laminadas en caliente (de HEB 100 a HEB 600) (Figura 2).

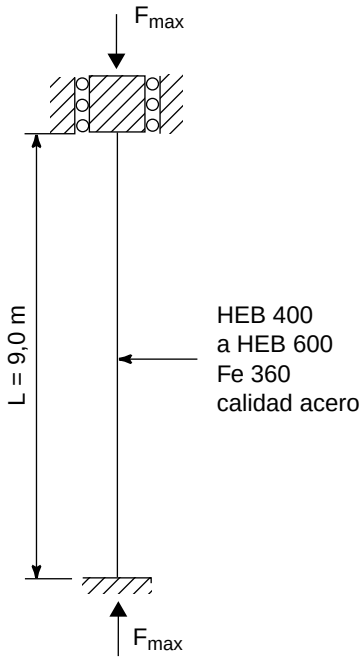


Figura E.2.1

Figura 2 Pilar con extremos fijos

Como el pilar tiene los extremos fijos, la longitud de pandeo l_y es igual a L/2, así: l_y = 4,5 m.

Los pasos del cálculo se presentan en las Tablas 10 y 11.

Se observa que los datos de la Tabla 10 no dependen de la magnitud de la carga axial ni de la longitud de pandeo.

Referencia en Eurocódigo 3

Tablas 5.5.3 5.5.1 5.3.1

También se señala que en la sección más pesada (HEB 600) no se produce pandeo porque $\chi = 1$.

Perfil	h (mm)	b (mm)	h/b	α	d/t_w	c/t_f	Clase
HEB 100	100	100	1,00	0,34	9,3	5,0	1
HEB 120	120	120	1,00	0,34	11,4	5,5	1
HEB 140	140	140	1,00	0,34	13,1	5,8	1
HEB 160	160	160	1,00	0,34	13,5	6,2	1
HEB 180	180	180	1,00	0,34	14,3	6,4	1
HEB 200	200	200	1,00	0,34	14,9	6,7	1
HEB 220	220	220	1,00	0,34	16,0	6,9	1
HEB 240	240	240	1,00	0,34	16,4	7,1	1
HEB 260	260	260	1,00	0,34	17,7	7,4	1
HEB 280	280	280	1,00	0,34	18,7	7,8	1
HEB 300	300	300	1,00	0,34	18,9	7,9	1
HEB 320	320	300	1,07	0,34	19,6	7,3	1
HEB 340	340	300	1,13	0,34	20,2	7,0	1
HEB 360	360	300	1,20	0,34	29,9	6,7	1
HEB 400	400	300	1,33	0,21	22,1	6,2	1
HEB 450	450	300	1,50	0,21	24,6	5,8	1
HEB 500	500	300	1,67	0,21	26,9	5,3	1
HEB 550	550	300	1,83	0,21	29,2	5,2	1
HEB 600	600	300	2,00	0,21	31,3	5,0	1

Tabla 10 Características geométricas de las secciones HEB

La figura 3 indica la carga de cálculo N respecto al área A de la sección del pilar. La línea de puntos representa la relación lineal entre A y N. Los puntos que se separan de esta línea son aquellos donde disminuye el efecto de pandeo sobre la resistencia portante del pilar.

La figura 4 muestra la proporción entre la relación de la carga de cálculo N con la resistencia plástica $N_{pl.Rd} = A.f_y$ y la esbeltez adimensional $\overline{\lambda}_y$ destacándose la disminución de la resistencia a la compresión del elemento a causa del pandeo.

Debe notarse que estos resultados se relacionan con una longitud de pandeo igual a 4,5 m y que no se pueden aplicar otros valores.

Perfil	i_y (mm)	$\bar{\lambda}_y$	Φ	χ_y	γ_M	A (cm^2)	N (kN)
HEB 100	41,6	1,152	1,325	0,505	γ_{M1}	26,0	$N_{b.Rd}$ = 280
HEB 120	50,4	0,951	1,080	0,629	γ_{M1}	34,0	$N_{b.Rd}$ = 457
HEB 140	59,3	0,808	0,930	0,710	γ_{M1}	43,0	$N_{b.Rd}$ = 661
HEB 160	67,8	0,707	0,836	0,780	γ_{M1}	54,3	$N_{b.Rd}$ = 905
HEB 180	76,6	0,626	0,768	0,824	γ_{M1}	65,3	$N_{b.Rd}$ = 1149
HEB 200	85,4	0,561	0,719	0,856	γ_{M1}	78,1	$N_{b.Rd}$ = 1428
HEB 220	94,3	0,508	0,681	0,881	γ_{M1}	91,0	$N_{b.Rd}$ = 1712
HEB 240	103	0,465	0,653	0,899	γ_{M1}	106,0	$N_{b.Rd}$ = 2037
HEB 260	112	0,428	0,630	0,915	γ_{M1}	118,4	$N_{b.Rd}$ = 2314
HEB 280	121	0,396	0,612	0,928	γ_{M1}	131,4	$N_{b.Rd}$ = 2604
HEB 300	130	0,369	0,597	0,938	γ_{M1}	149,1	$N_{b.Rd}$ = 2989
HEB 320	138	0,347	0,585	0,947	γ_{M1}	161,3	$N_{b.Rd}$ = 3262
HEB 340	146	0,328	0,576	0,954	γ_{M1}	170,9	$N_{b.Rd}$ = 3482
HEB 360	155	0,309	0,566	0,961	γ_{M1}	180,6	$N_{b.Rd}$ = 3707
HEB 400	171	0,280	0,548	0,982	γ_{M1}	197,8	$N_{b.Rd}$ = 4150
HEB 450	191	0,251	0,537	0,989	γ_{M1}	218,0	$N_{b.Rd}$ = 4605
HEB 500	212	0,226	0,528	0,994	γ_{M1}	238,6	$N_{b.Rd}$ = 5068
HEB 550	232	0,207	0,522	0,999	γ_{M1}	254,1	$N_{b.Rd}$ = 5421
HEB 600	252	0,190	0,517	1,000	γ_{M1}	270,0	$N_{b.Rd}$ = 5768

Tabla 11 Resultado de los cálculos de secciones HEB

Referencia en Eurocódigo 3

5.5.1.1(1)

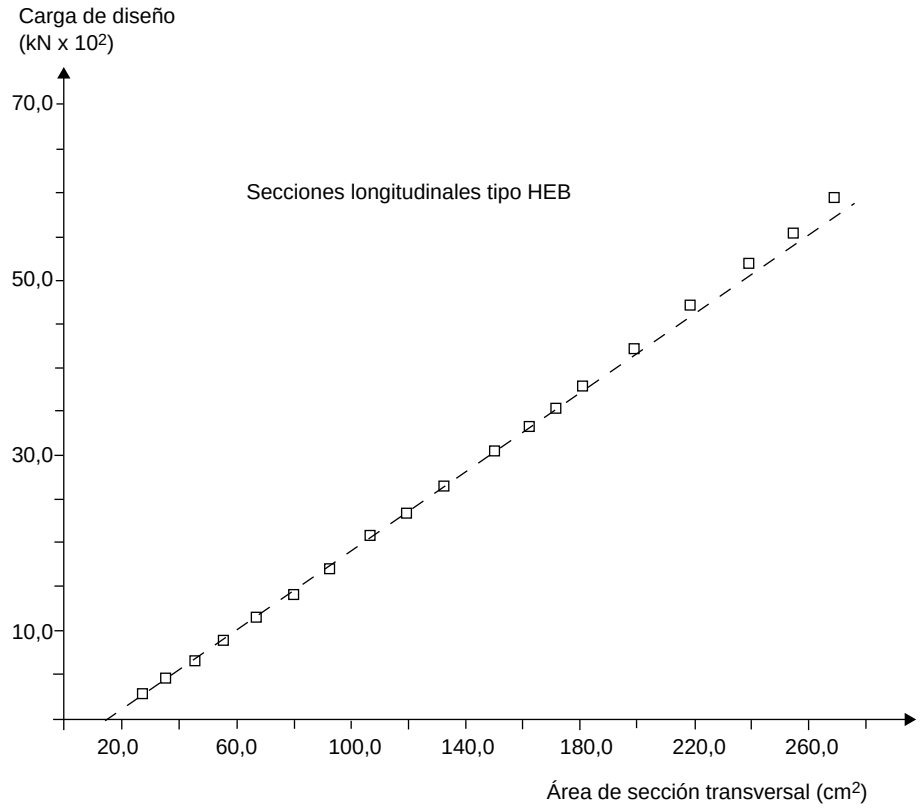


Figura 3 Carga N de diseño como una función del área A de la sección transversal

Referencia en Eurocódigo 3

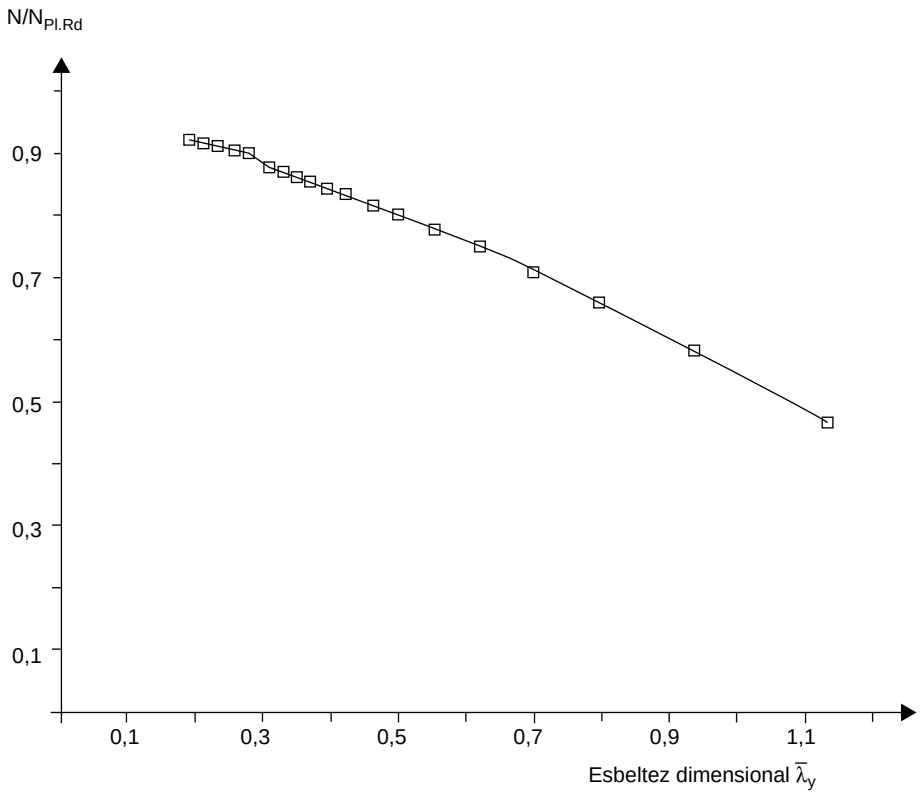


Figura 4 $N/N_{pl.Rd}$ en función de $\overline{\lambda}_y$

EJEMPLO 9.5(iii) Influencia de la longitud de pandeo por el eje fuerte y el eje débil sobre el cálculo del pilar.

Problema

Estudiar el efecto de distintas longitudes de pandeo por el eje fuerte y el eje débil en el modo sin flecha horizontal.

La carga axial de cálculo es 800 kN. La longitud es 9 m. Los extremos contra el pandeo del eje fuerte y articulados en el eje débil, pero en este caso la longitud de pandeo está reducida en tres puntos de arriostramiento lateral (Figura 5). El pilar es una sección IPE hecha con acero clase Fe 360.

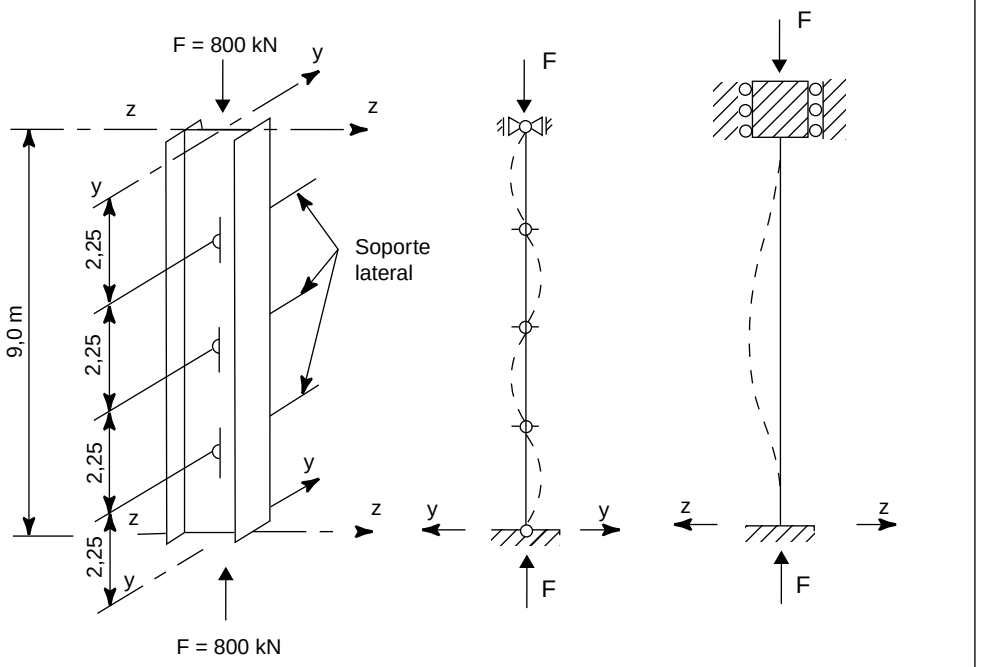


Figura 5 Disposición de soporte lateral

Las longitudes de pandeo son:

- por el eje y: $l_y = 9/2 = 4{,}5$ m.
- por el eje z: $l_z = 9/4 = 2{,}5$ m.

Para empezar el cálculo se evalúa el momento de inercia necesario para resistir la carga crítica de Euler:

Referencia en Eurocódigo 3

$$F_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Incluyendo el efecto del factor parcial de seguridad γ_{M1}, por el eje fuerte y:

$$I_y = \gamma_{M1} \frac{F l_y^2}{\pi^2 E}$$

$$I_y = 1{,}1 \frac{800 \times 10^3 \times 4{,}500^2}{\pi^2 \times 210.000} = 859{,}8 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

y por el eje débil z:

$$I_z = \gamma_{M1} \frac{F l_z^2}{\pi^2 E}$$

$$I_s = 1{,}1 \frac{800 \times 10^3 \times 2{,}250^2}{\pi^2 \times 210\,000} = 859{,}8 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

El área de la sección debe ser mayor que: F/f_y o:

$$\frac{800 \times 10^3}{235} = 3{,}404 \text{ mm}^2$$

Teniendo en cuenta estas tres condiciones, el primer perfil IPE que se toma es un IPE 240 que debe considerarse el elemento de partida. Los cálculos vienen en las Tablas 12 y 13. Se comprueba que la sección IPE 240 es de Clase 1 y que la IPE 270 y la IPE 300 son de Clase 2, $\beta_A = 1$ es un valor correcto.

5.5.1.1(1)

Perfil	i_y (mm)	$\bar{\lambda}_y$	Φ	χ_y	A (cm^2)	$N_{b.y.Rd}$ (kN)
IPE 240	9,97	0,961	1,042	0,693	39,1	579
IPE 270	11,2	0,856	0,935	0,762	45,9	747
IPE 300	12,5	0,767	0,853	0,814	53,8	936

Tabla 12 Pandeo por el eje fuerte: resultado de los cálculos

Referencia en Eurocódigo 3

5.5.1.1(1)

Perfil	i_z (mm)	$\bar{\lambda}_z$	Φ	χ_z	A (cm^2)	$N_{b.z.Rd}$ (kN)
IPE 240	2,69	0,891	1,014	0,667	39,1	557
IPE 270	3,02	0,793	0,916	0,729	45,9	714
IPE 300	3,35	0,715	0,843	0,775	53,8	891

Tabla 13 Pandeo por el eje débil: resultado de los cálculos

El IPE más pequeño que arroja $N_{b.z.Rd}$ y $N_{b.y.Rd}$ > 800 kN es el IPE 300. Se destaca que la sección debe ser más fuerte de lo necesario para equilibrar la carga crítica de Euler porque la geometría y las imperfecciones del material afecta negativamente a la resistencia portante. Los cálculos fundados en la carga crítica de Euler son sólo un medio para llegar a dimensiones preliminares.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.6: Pilares compuestos

OBJETIVO/CONTENIDO

Derivar las ecuaciones de las cargas de pandeo de pilares compuestos y presentar los métodos de cálculo que se aplican en el Eurocódigo 3

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lecciones del grupo 8: Estabilidad aplicada

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Pilares

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.6: Pilares compuestos

RESUMEN

Esta lección se divide en dos partes principales; la primera se centra en la influencia de las deformaciones cortantes sobre las cargas elásticas críticas y la esbeltez de los pilares (este efecto es crucial en los pilares compuestos y secundario en los pilares macizos: perfiles laminados o soldados); la segunda parte trata del método de cálculo adoptado por el Eurocódigo 3, que se relaciona con el comportamiento empírico.

1. INTRODUCCIÓN

En la construcción de acero se emplean extensamente pilares compuestos, en especial cuando las longitudes son grandes y las fuerzas de compresión pequeñas. Se componen de dos o más largueros unidos entre sí por perfiles o cartelas a escuadra o con riostras (Figuras 1 y 2). Cuanto mayor sea la distancia entre los ejes de los cordones, mayor es el momento de inercia de la sección del pilar compuesto; sin embargo, el aumento de rigidez se compensa con el incremento del peso y del coste de las uniones entre elementos.

Debe hacerse notar que los pilares compuestos (especialmente los armados a escuadra) son más flexibles que los macizos con igual momento de inercia, lo que deberá tenerse en cuenta en el cálculo.

Para derivar la capacidad portante de los pilares de acero compuestos, debe estudiarse lo siguiente:

- la carga de pandeo elástico y el comportamiento general;
- el comportamiento local de los cordones;
- los esfuerzos internos de los elementos de unión.

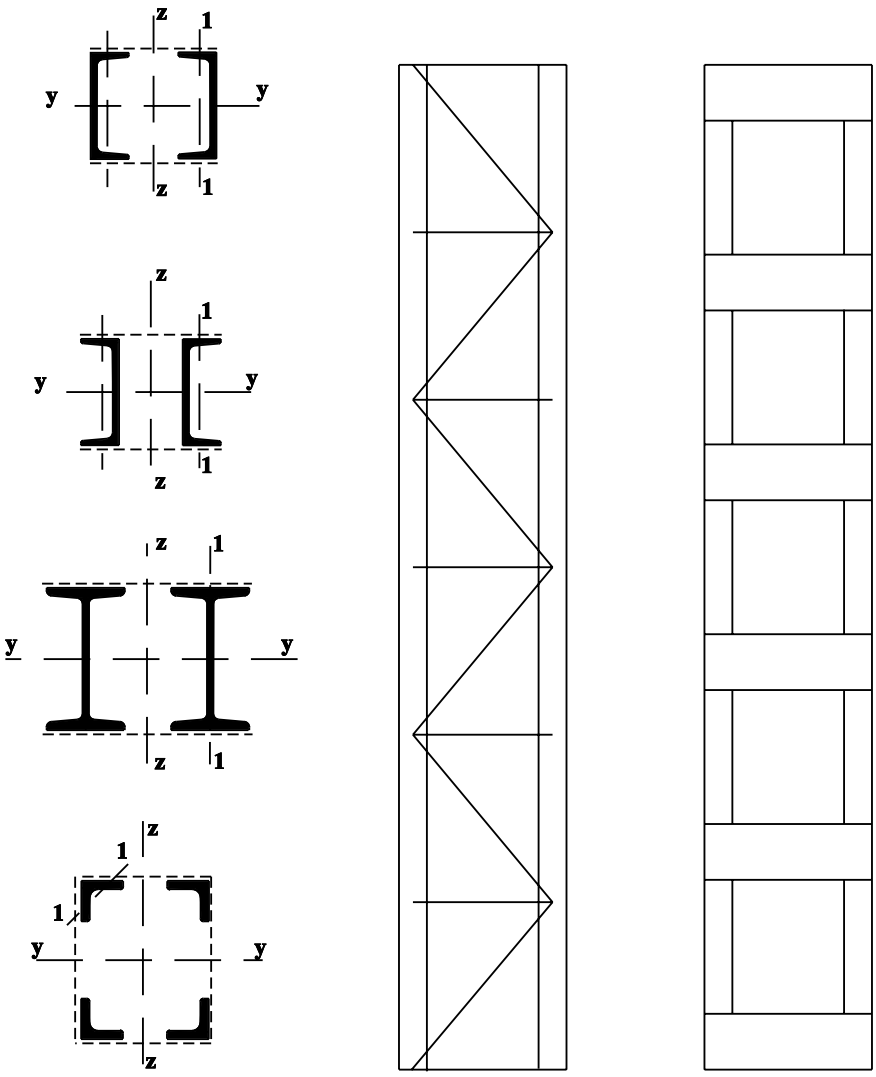


Figura 1 Pilares compuestos

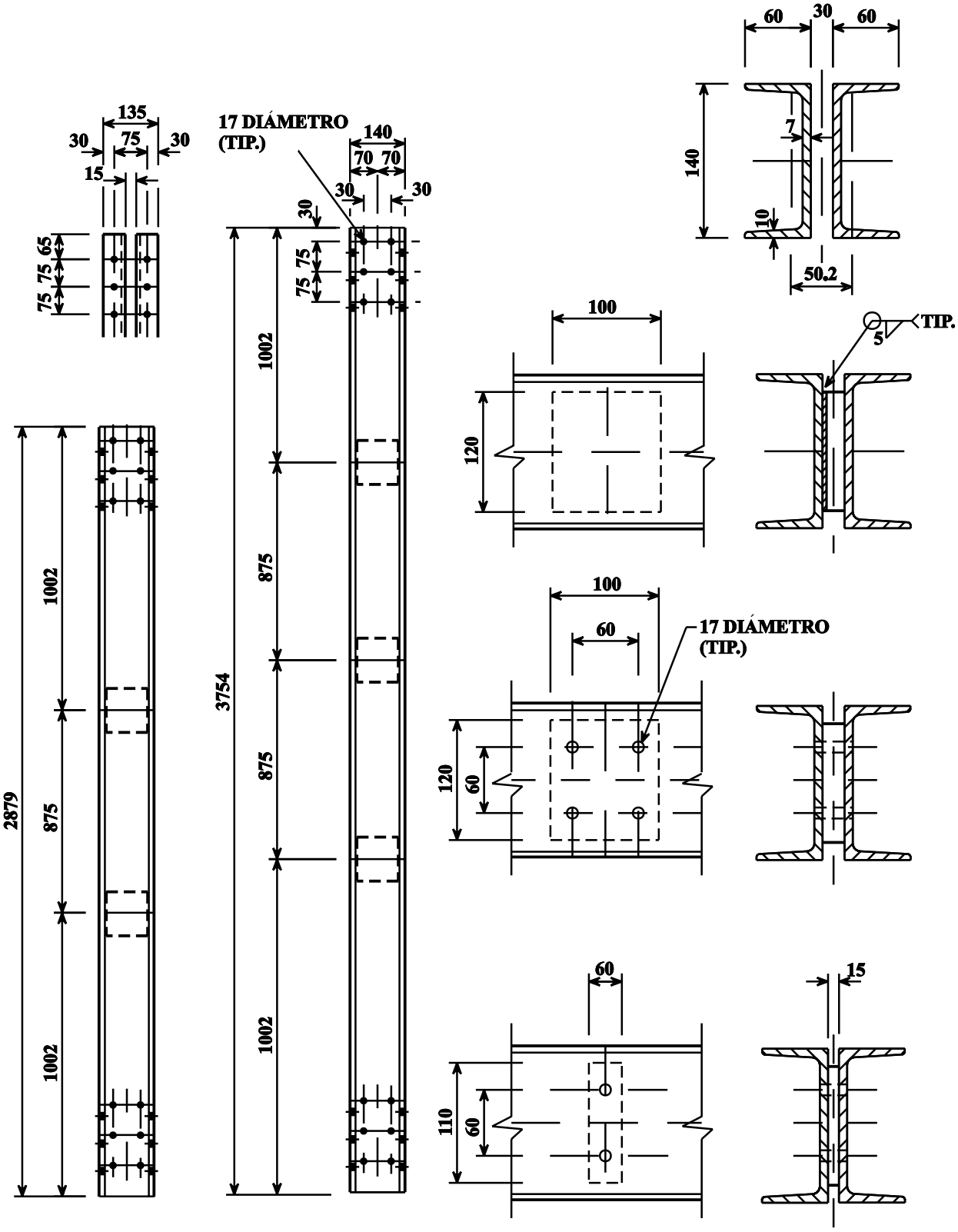


Figura 2 Pilares compuestos

2. EL EFECTO DE LAS DEFORMACIONES CORTANTES EN LA CARGA ELÁSTICA CRITICA DEL PILAR

Este apartado trata del efecto de la deformación cortante sobre la carga elástica crítica del pilar.

Se considera el caso sencillo de un pilar con un extremo articulado que se muestra en la Figura 3; son válidas las relaciones de M, N, V, x e y que se definen en la figura, a saber:

$$M = Ny\,, \qquad V = \frac{dM}{dx} = N\frac{dy}{dx} \qquad (2.1)$$

La flecha lateral total y del eje es resultado de dos componentes:

$$y = y_1 + y_2 \qquad (2.2)$$

el momento de flexión M da lugar a la deflexión y_1 y el esfuerzo cortante V a la deflexión adicional y_2.

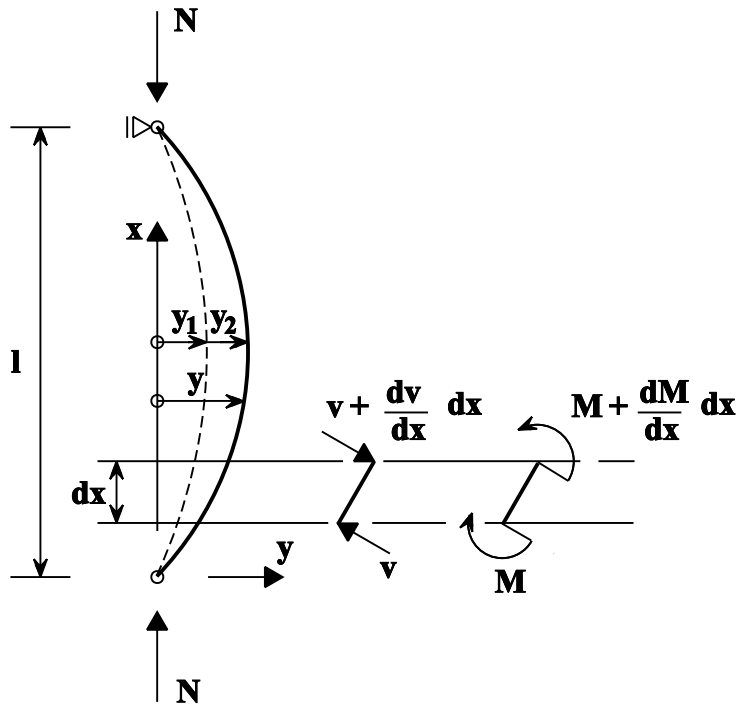


Figura 3 Pilar bi-articulado

Según la teoría elástica, la curvatura debida al momento flector M es como sigue:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Ny}{EI} \qquad (2.3)$$

siendo:

E el módulo de elasticidad o módulo de Young.

I el momento de inercia de la sección.

La inclinación debida al momento cortante V es como sigue:

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta\frac{V}{GA} = \beta\frac{N}{GA}\frac{dy}{dx} \qquad (2.4)$$

siendo

A el área de la sección.

G el módulo de rigidez o módulo cortante.

β el factor de la forma de la sección del pilar (β = 1,11 en pilares macizos y β = 1,2 pilares).

La curvatura debido al efecto del esfuerzo cortante V es como sigue:

$$\frac{d^2Y_2}{dx^2} = \frac{\beta}{GA}\frac{dV}{dx} = \beta\frac{N}{GA}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (2.5)$$

La curvatura total de la curva de pandeo se debe tanto al momento flector, ecuación (2.3) como al momento cortante, ecuación (2.5).

$$= \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{Ny}{EI} + \beta\frac{N}{GA}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (2.6)$$

Es posible reordenar la ecuación (2.6) de esta forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{(1-\beta N/GA)EI}y = 0 \qquad (2.7)$$

Adoptando el mismo procedimiento que en el caso de Euler, la carga crítica se define mediante esta ecuación:

$$\frac{N}{(1-\beta N/GA)EI} = \frac{\pi^2}{l^2} \qquad (2.8)$$

Hallando N se obtiene la siguiente expresión de la carga elástica crítica $N_{cr,id}$:

$$N_{cr,id} = \frac{1}{\frac{1}{N_{cr}} + \frac{1}{S_v}} = N_{cr}\frac{1}{1+\frac{N_{cr}}{S_v}} \qquad (2.9)$$

siendo:

N_{cr} = $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ la carga de pandeo de Euler obtenida despreciando las deformaciones debidas al esfuerzo

S_v = $\frac{GA}{\beta}$ la rigidez al cizallamiento del pilar.

Es obvio que $N_{cr,id} < N_{cr}$; cuanto mayor sea la relación N_{cr} / S_v, menor es la relación $N_{cr,id} / N_{cr} < 1$. La relación Ncr,id / Ncr obtenida en la Ecuación (2.9) aparece en la Figura 4, en función de la relación N_{cr} / S_v.

La rigidez al cizallamiento S de las secciones macizas de acero laminado es mucho mayor que N. La diferencia entre $N_{cr,id}$ y N_{cr} es muy pequeña por consiguiente y se puede pasar por alto a efectos del cálculo.

Sin embargo, como se verá más adelante, la rigidez al cizallamiento S_v de los pilares compuestos es mucho menor que en los macizos; en este caso, por tanto, es muy significativa la influencia de las fuerzas cortantes sobre la reducción de la carga crítica.

Para comparar la rigidez al cizallamiento Sv con las cargas de pandeo de Euler de los pilares macizos N_{cr}, tómese como ejemplo un pilar HEA200 que pandea en el plano del alma.

La rigidez al cizallamiento S_v es como sigue:

S_v = $\frac{E}{2(1+\upsilon)} A_w$ = 85 MN

E = 200 kNmm^{-2}

u = 0,3

A_w = el área del alma = 6,5 x 170 = = 1105 mm^2

La carga de pandeo de Euler N_{cr} es:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EA}{l^2} = 10620 \text{ MN}/\lambda^2$$

siendo:

A el área de la sección = 5380 mm^2.

λ la esbeltez del pilar.

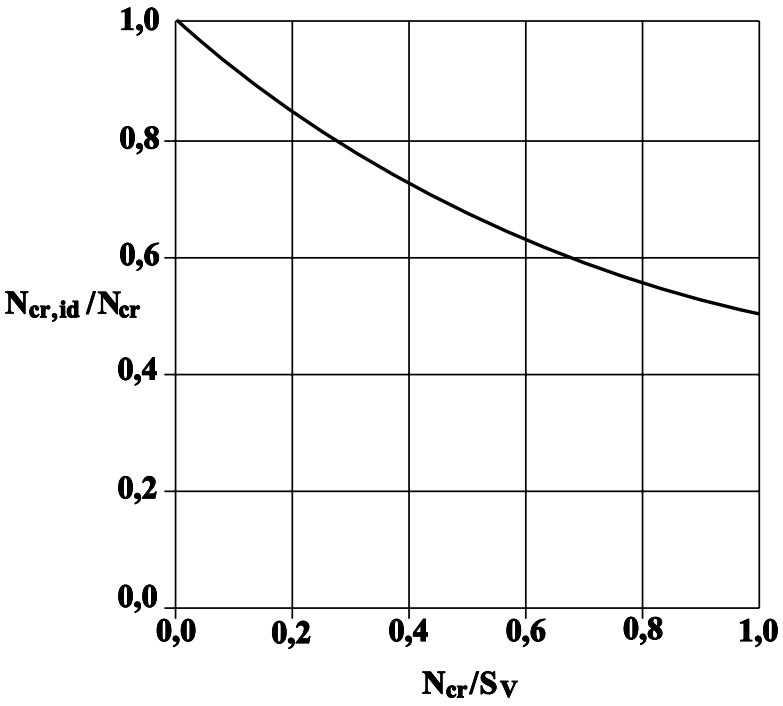


Figura 4 Efecto cortante de pilar debido a la carga crítica elástica

En la Tabla 1 se dan las cargas críticas de pandeo $N_{cr,id}$, las cargas de pandeo de Euler N_{cr} y las relaciones N_{cr} / S_v en función de la esbeltez; se ve claramente que, en el caso de secciones macizas, N_{cr} es siempre menor que S_v; así, a efectos técnicos, es posible despreciar la influencia de las deformaciones cortantes sobre las cargas de pandeo elástico $N_{cr,id}$.

λ	80	90	100	110	120	130	140
$N_{cr,id}$ (MN)	1,63	1,29	1,05	0,869	0,731	0,624	0,538
N_{cr} (MN)	1,66	1,31	1,06	0,878	0,738	0,628	0,542
N_{cr} / S_v	0,020	0,015	0,12	0,010	0,009	0,007	0,006

Tabla 1

3. EVALUACIÓN DE LA RIGIDEZ AL CIZALLAMIENTO DE LOS PILARES COMPUESTOS ARMADOS A ESCUADRA EN ÁNGULO

3.1 Pilares de celosía

Para deducir la rigidez al cizallamiento Sv de los pilares de celosía hay que considerar la prolongación de las diagonales y montantes. No se tendrá en cuenta el alargamiento de los cordones (los componentes principales) porque ya se han considerado en la rigidez general al cizallamiento EI del pilar compuesto.

En la celosía dispuesta en forma de N, como en la Figura 5, se tiene en cuenta el alargamiento de una diagonal y un montante para deducir S_V:

$$\frac{1}{S_V} = \frac{\delta}{a} = \gamma \qquad (3.1)$$

siendo δ el desplazamiento lateral debido al esfuerzo cortante unitario.

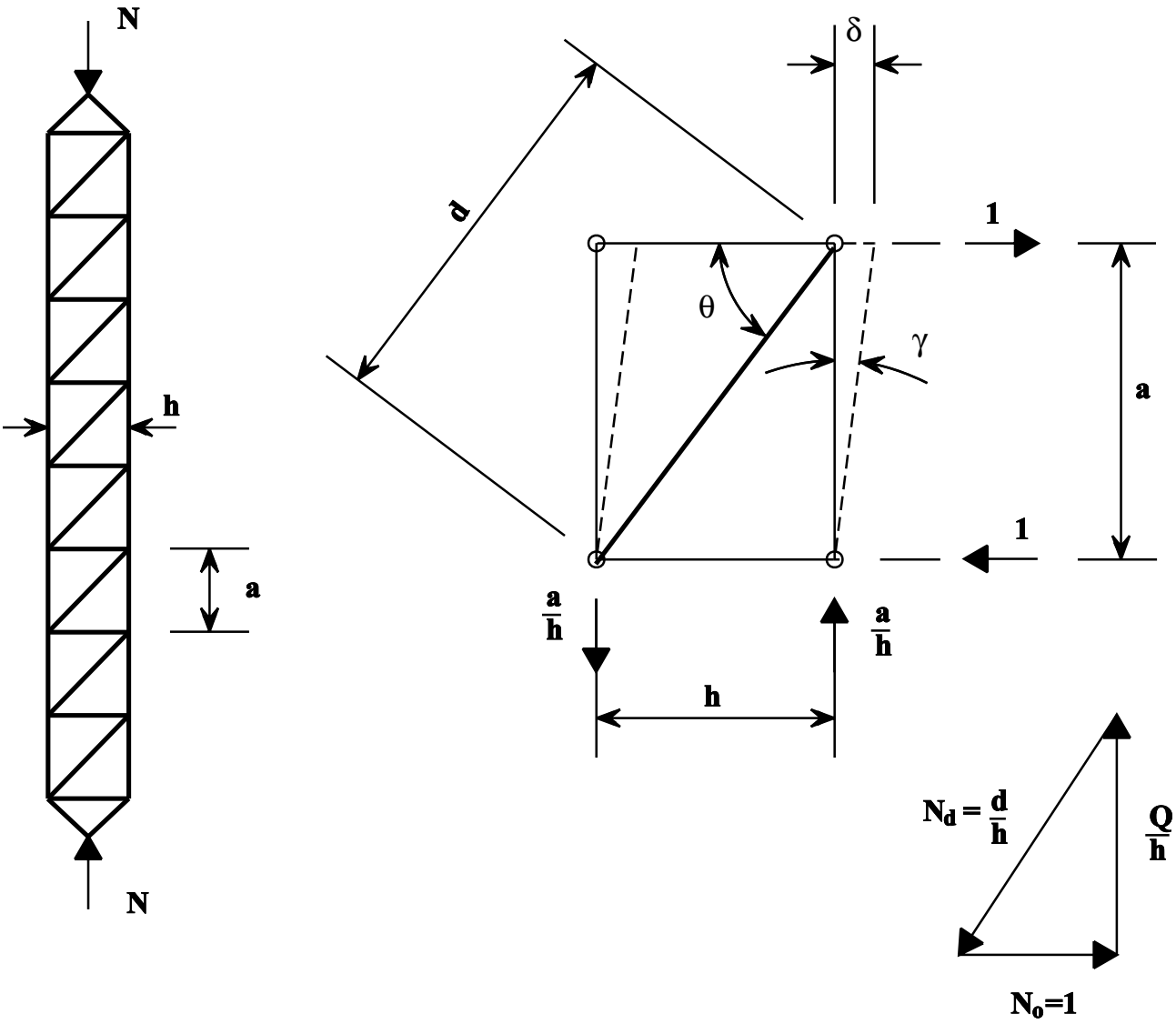


Figura 5 Atado en N

El desplazamiento total δ resulta de dos componentes: δ_1 es la aportación del alargamiento de la diagonal; δ_2 es lo que aporta el acortamiento del montante horizontal. De la teoría de trabajo virtual:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = N_d \frac{d}{E A_d} N_d + + N_o \frac{h}{E A_o} N_o = \frac{d}{h} \frac{d}{E A_d} \frac{d}{h} + \frac{h}{E A_o}$$

Así, para un plano del entramado:

$$\frac{1}{S_v} = \frac{1}{a E} \left(\frac{h}{A_o} + \frac{d^3}{h^2 A_d} \right) = \frac{1}{a h^2 E} \left(\frac{h^3}{A_o} + \frac{d^3}{A_d} \right) = \frac{d^3}{a h^2 A_d E} \left(\frac{h^3 A_d}{d^3 A_o} + 1 \right) \quad (3.2)$$

Con la celosía dispuesta en forma de A como en la Figura 6:

$$\delta = 2 N_d \frac{d}{E A_d} N_d = 2 \frac{d}{h} \frac{d}{E A_d} \frac{d}{h} = 2 \frac{d^3}{h^2 E A_d}$$

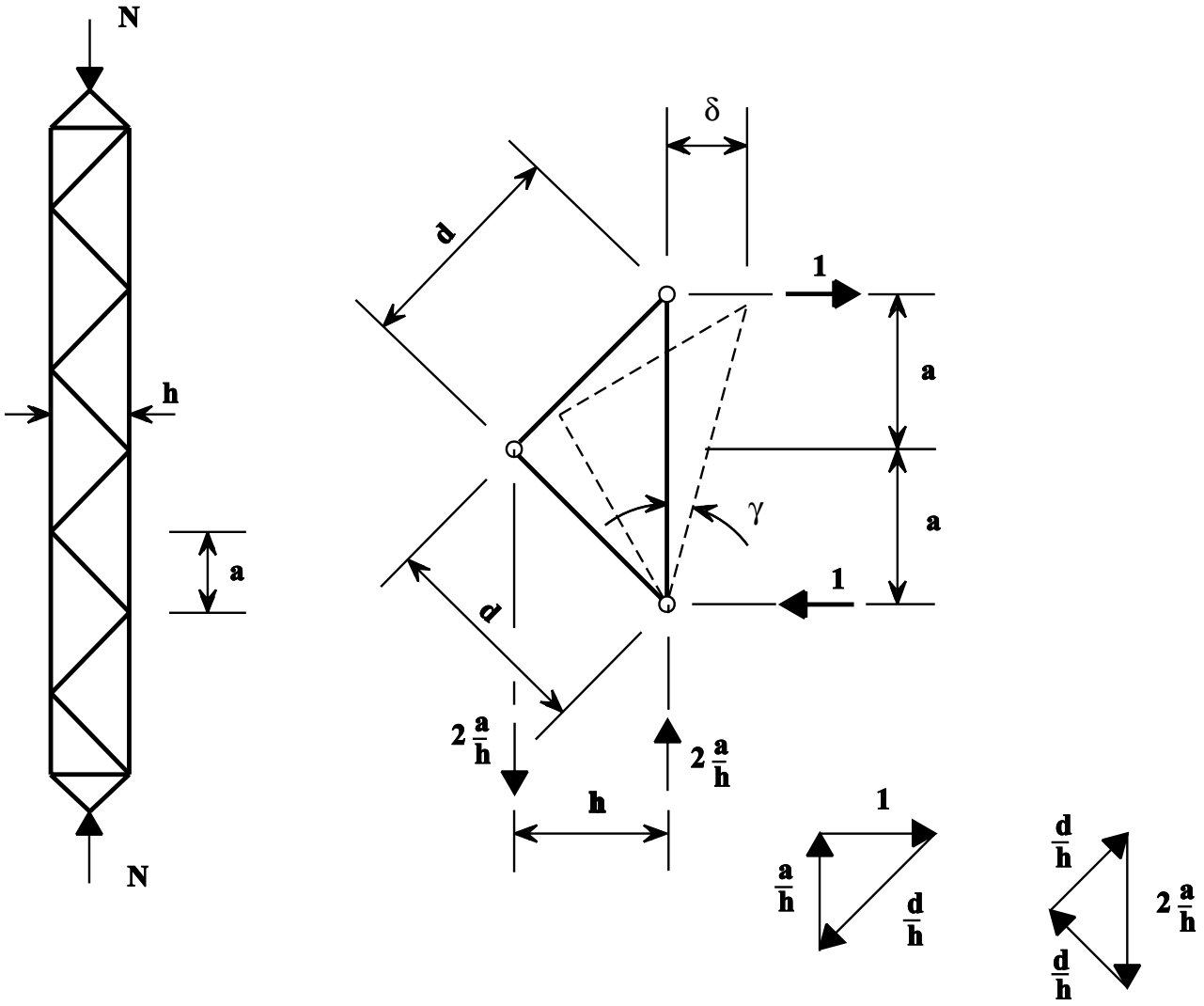


Figura 6 Atado en A

Por lo tanto:

$$\frac{1}{S_v} = \frac{\delta}{2\,a} = \frac{d^3}{a\,h^2\,E\,A_d} \qquad (3.3)$$

Los arriostramientos que muestra la Figura 7 tienen la misma rigidez a la cizalla porque los travesaños no intervienen en la transmisión de la fuerza cortante:

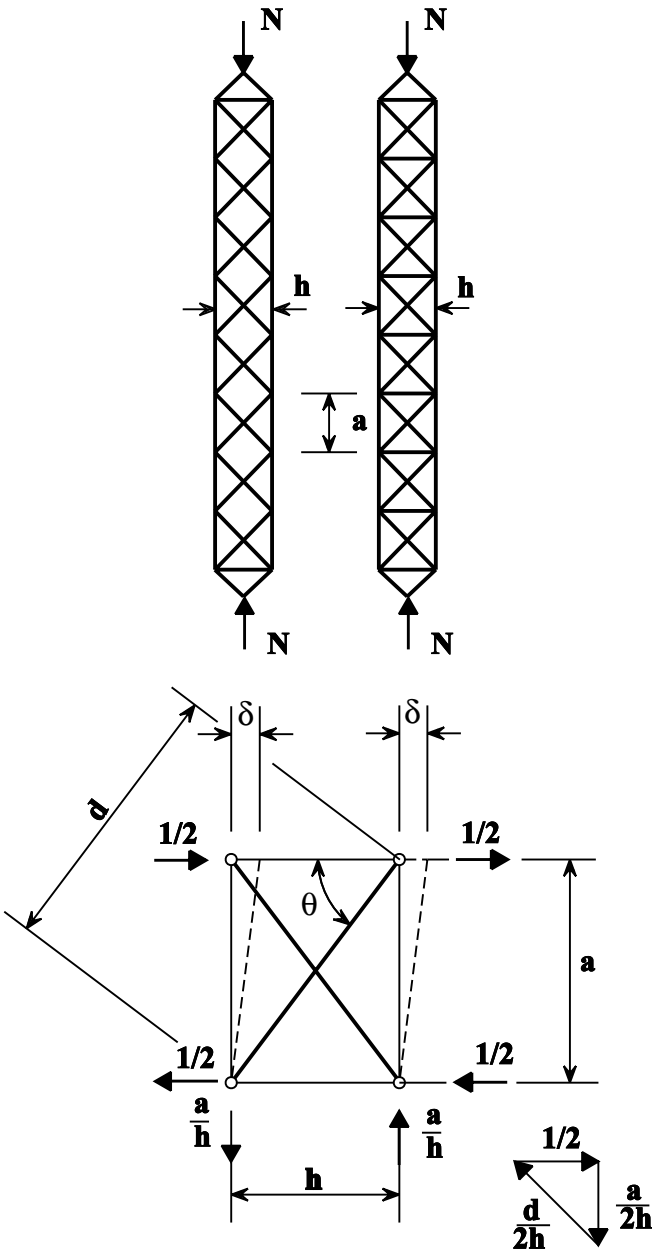


Figura 7 Atado en cruz

$$\delta = 2\,N_d\,\frac{d}{E\,A_d}\,N_d = 2\,\frac{d}{2\,h}\,\frac{d}{E\,A_d}\,\frac{d}{2\,h} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d^3}{h^2\,E\,A_d}$$

y la rigidez al cizallamiento es:

$$\frac{1}{S_v} = \frac{\delta}{a} = \frac{d^3}{2\,a\,h^2\,E\,A_d} \qquad (3.4)$$

3.2 Pilares compuestos armados a escuadra

En los pilares compuestos armados a escuadra o de escalerilla, como el de la Figura 8, hay que considerar las deformaciones por flexión de los cordones y montantes para derivar la rigidez al cizallamiento S_v; lo mismo que en el caso de los pilares de celosía, no se tiene en cuenta la prolongación de los cordones porque su aportación aparece en la rigidez general a la flexión EI.

El desplazamiento δ debido a la fuerza cortante unitaria se halla adoptando el método de trabajo virtual:

$$\delta = 4\int_0^{a/2}\frac{1}{2}\,\frac{x}{E\,I_c}\,\frac{1}{2}\,x\,dx + 2\int_0^{h/2}\frac{a}{h}\,\frac{y}{E\,I_b}\,\frac{a}{h}\,y\,dy =$$

$$= \frac{a^3}{24\,E\,I_c} + \frac{a^2\,h}{12\,E\,I_b}$$

y la rigidez al cizallamiento es:

$$\frac{1}{S_v} = \frac{\delta}{a} = \frac{a^2}{24\,E\,I_c} + \frac{a\,h}{12\,E\,I_b} \qquad (3.5)$$

siendo I_c el segundo momento del área en el plano de un cordón.

I_b el segundo momento del área en el plano de un montante.

La fórmula anterior se puede perfeccionar añadiendo las deformaciones debidas al esfuerzo cortante de los montantes.

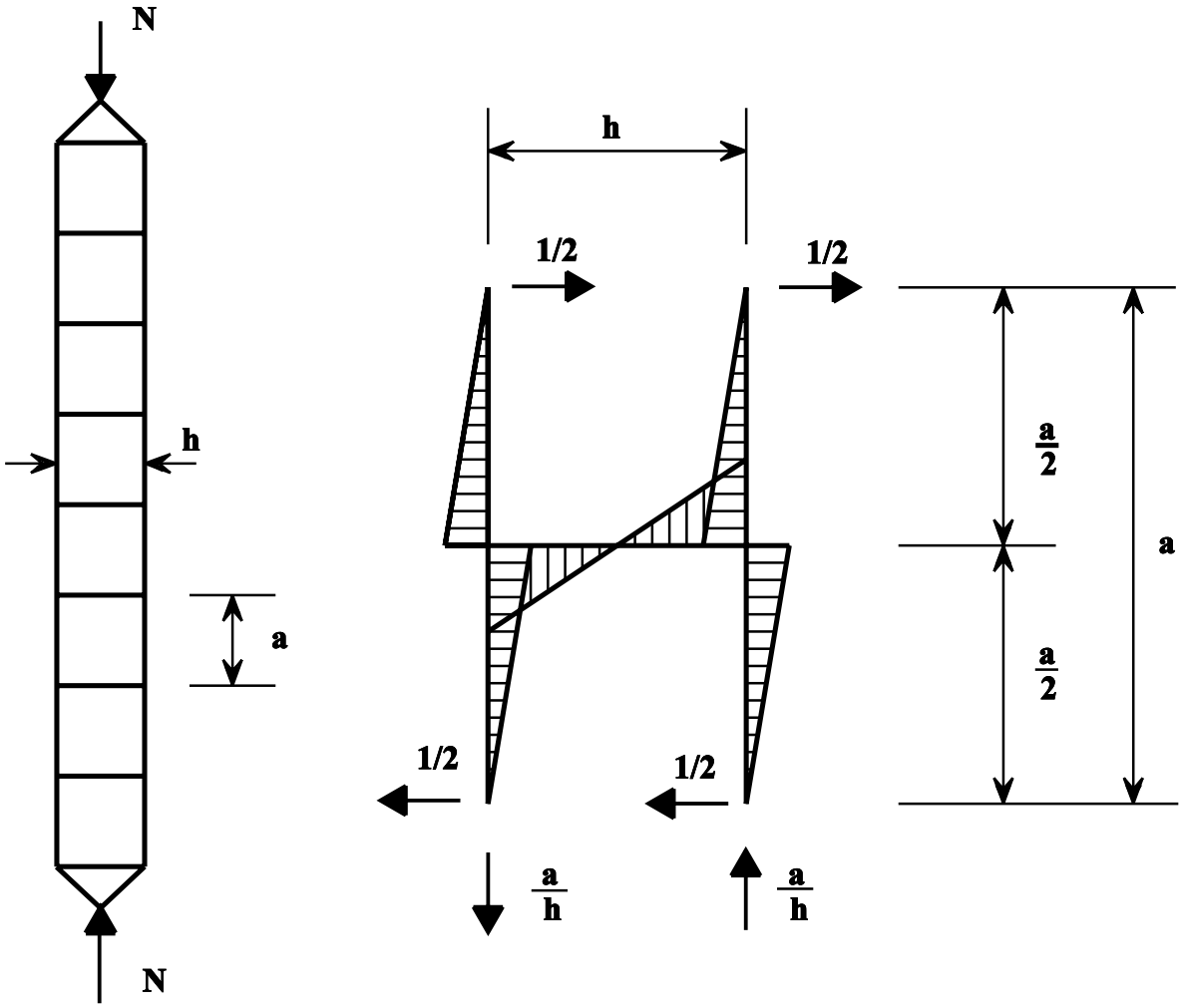


Figura 8 Pilar empresillado

3.3 Comparación cuantitativa

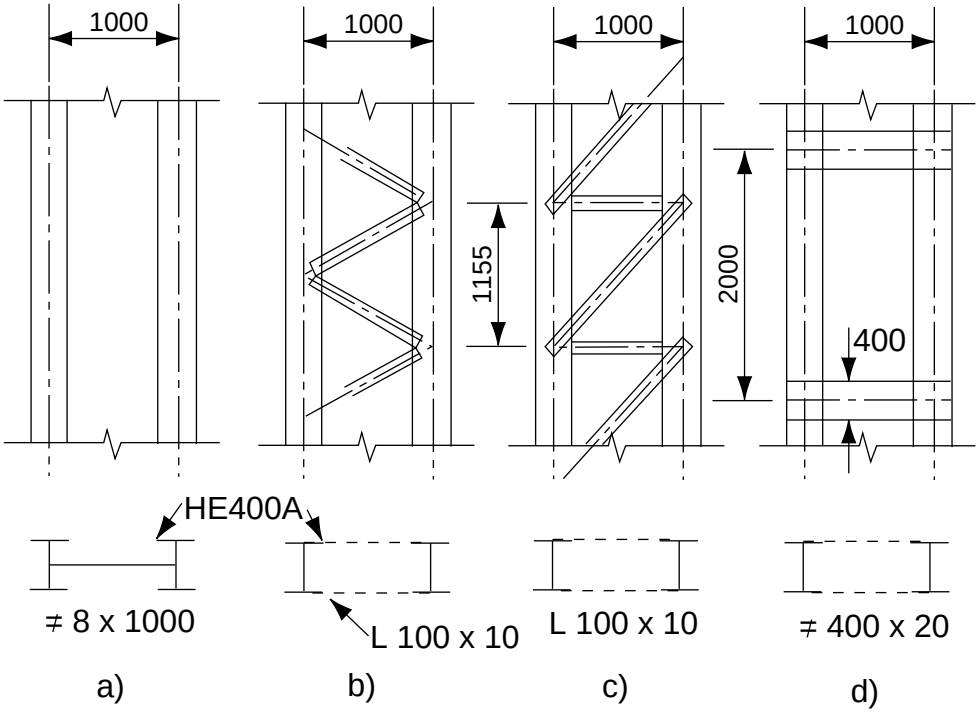
La Tabla 2 hace una comparación de la rigidez al cizallamiento S_v de un pilar sólido y tres clases distintas de pilares compuestos; son constantes las dimensiones generales, las secciones y los pesos por unidad de longitud.

El pilar sólido (a) está hecho con dos perfiles HEA400 soldadas a una chapa de 8 mm de espesor $\times$ 1000 mm de ancho.

Los pilares compuestos (b) y (c) son de celosía; los cordones son perfiles HEA400 y hay dos planos de celosía de angulares de lados iguales de 100 $\times$ 10.

El pilar compuesto (d) es de cartelas a escuadra; para los cordones se ha adoptado el mismo perfil HEA400; las cartelas de sección rectangular de 400 $\times$ 20 mm están en dos planos.

En tanto el acero del alma y de los montantes tiene casi el mismo peso en los cuatro pilares, la Tabla 2 muestra que la rigidez al cizallamiento S_v varía en un campo amplio.



a) Rigidez al cizallamiento

$$S_v = \frac{E}{2(1+\upsilon)} A_w$$

$E = 20\ MN\ cm^{-2}$ $\upsilon = 0,3$

$A_w = 100 \times 0,8 = 80\ cm^2$

$$S_v = \frac{20 \times 80}{2(1+0,3)} = 615\ MN$$

Volumen y masa del acero

$V = 0,8 \times 100 \times 100 = 8000\ cm^3\ m^{-1}$

$W = Y_s\ V = 0,00785 \times 8000 = 63\ kg\ m^{-1}$

Tabla 2 Ejemplos de rigidez a cortante o cizallamiento para elementos macizos, arriostrados y pilares compuestos

b) Rigidez al cizallamiento

$$S_v = \frac{a\,h^2\,E\,A_d}{d^3}\,2$$

L 100×10 $A_d = 19{,}2\ cm^2$

h = 100 cm a = 115,5 / 2 = 57,75 cm

d = 2 a = 115,5 cm

$$S_v = \frac{57,75 \times 100^2 \times 20 \times 19,2}{115,5^3}\,2 = 288\,MN$$

Volumen y masa del acero

$V = 19{,}2 \times 115{,}5 \times 4 / 1{,}155 = 7680\ cm^3\ m^{-1}$

$W = 0{,}00785 \times 7680 = 60\ kg\ m^{-1}$

c) Rigidez al cizallamiento

$$S_v = \frac{a\,h^2\,E}{\frac{h^3}{A_o} + \frac{d^3}{A_d}}\,2$$

$A_d = A_o = 19{,}2\ cm^2$

h = 100 cm a = 115,5 cm

$d = (a^2 + h^2)^{0,5} = 152{,}8$ cm

$$S_v = \frac{115,5 \times 100^2 \times 20 \times 192}{100^3 + 152,8^3}\,2 = 194\,MN$$

Volumen y masa del acero

$V = 19{,}2 \times (100 + 152{,}8) \times 2 / 1{,}155 = 8405\ cm^3\ m^{-1}$

$W = 0{,}00785 \times 8405 = 66\ kg\ m^{-1}$

Tabla 2 Continuación

d) Rigidez al cizallamiento

$$S_v = \frac{1}{\frac{a^2}{24\,E\,I_c} + \frac{a\,h}{12\,E\,I_b}}$$

$I_c = 8564\ cm^4$ H E 400 A

$I_b = 40^3 \times 2 \times 2 / 12 = 21333\ cm^4$

a = 200 cm h = 100 cm

$$S_v = \frac{12 \times 20}{200\left(\frac{200}{2 \times 8564} + \frac{100}{21333}\right)} = 73\,MN$$

Volumen y masa del acero

$V = 2 \times 40 \times 100 \times 2/2 = 8000\ cm^3$

$W = 0{,}00785 \times 8000 = 63\ kg\ m^{-1}$

	Rigidez al cizallamiento S_v (MN)	Masa del acero W (kg m^{-1})
a) Alma 8 × 1000	615	63
b) Arriostramiento.L 100 × 10	288	60
c) Arriostramiento.L 100 × 10	194	66
d) Presillas 400 × 20	73	63

Tabla 2 Continuación

4. LAS CARGAS ELÁSTICAS CRÍTICAS DE LOS PILARES COMPUESTOS

A efectos del cálculo, las cargas elásticas críticas de los pilares compuestos salen de la ecuación (2.9); esto es, se puede suponer que el reparto de la rigidez al cizallamiento S_v es continuo si el número de presillas es igual a seis o mayor; si no, habrá que realizar un análisis más complejo por los métodos para pórticos (ver más particulares sobre este tema en (1, 3 y 3).

Introduciendo fórmulas de rigidez al cizallamiento S_v (3.2, 3.3, 3.4 y 3.5) en la ecuación (2.9), es fácil derivar, para los varios tipos de diagonales y montantes, fórmulas específicas de las cargas elásticas críticas $N_{cr,id}$ y, por consiguiente, de la longitud efectiva de los pilares compuestos; fórmulas de este tipo están ampliamente aceptadas en los códigos y normas europeos de la construcción.

A continuación se explican los detalles del procedimiento analítico.

Cuando la celosía es en forma de N (como en la Figura 5), se sustituye en la ecuación (2.9) la expresión de rigidez al cizallamiento S_v (3.2), siendo:

N_{cr} = $\pi^2 E I / l^2$ la carga crítica de Euler, igual que en el pilar macizo.

I = $2 I_c + A_c h^2$, el momento de inercia de la sección compuesta.

A_c el área de la sección de los cordones.

I_c el momento de inercia que corresponde a los cordones.

La sustitución produce lo siguiente:

$$N_{cr,id} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E I}{l^2} \frac{1}{a h^2 E} \left(\frac{h^3}{A_o} + \frac{d^3}{A_d} \right)} \quad (4.1)$$

Al introducir la esbeltez λ del pilar sin deformaciones por cizalla, de modo que:

$$\lambda^2 = l^2 / \rho^2 = 2 A_c l^2 / I$$

la tensión elástica crítica $\sigma_{cr,id}$ del pilar compuesto se convierte en:

$$\sigma_{cr,id} = \frac{N_{cr,id}}{2 A_c} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 + \frac{2 \pi^2 A_c}{a h^2} \left(\frac{h^3}{A_o} + \frac{d^3}{A_d} \right)} = \pi^2 E / \lambda_{eq}^2 \quad (4.2)$$

siendo:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{2 \pi^2 A_c}{a h^2} \left(\frac{h^3}{A_o} + \frac{d^3}{A_d} \right)} \quad (4.3)$$

la esbeltez equivalente del pilar compuesto.

Siguiendo el mismo procedimiento, cuando se adopta un arriostramiento simple en A (Figura 6), la esbeltez equivalente del pilar es:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{2 \pi^2 A_c d^3}{a h^2 A_d}} \quad (4.4)$$

Para riostras trianguladas (Figura 7):

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2 A_c d^3}{a h^2 A_d}} \quad (4.5)$$

Por último, para pilares unidos con presillas (Figura 8), la esbeltez equivalente es:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2 A_c}{6} \left(\frac{a^2}{2 I_c} + \frac{a h}{I_b} \right)} \quad (4.6)$$

Las deformaciones por flexión de los travesaños se puede despreciar si la chapa es muy rígida y se puede poner:

$\frac{a h}{I_b} = 0$, en la ecuación (4.6).

En este caso la esbeltez equivalente de los pilares armados unidos con presillas se convierte en:

$$\lambda_{eq} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2 A_c a^2}{12 I_c}} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2}{12} \lambda_1^2} \quad (4.7)$$

siendo λ_1 la esbeltez local de los cordones entre centros de las presillas.

5. CAPACIDAD PORTANTE DE LOS PILARES DE ACERO COMPUESTOS Y LA FILOSOFÍA DE CÁLCULO DEL EUROCÓDIGO 3

La Figura 9 resume la conducta empírica de un pilar de acero compuesto (en escalera) en un ensayo de compresión hasta la rotura (más datos en el nº 4 de la Bibliografía):

- en la Figura 9(a) se ha trazado el desplazamiento lateral en el centro del fuste (a media altura) en función de la carga de compresión N_i aplicada exteriormente;
- en la Figura 9(b) se han trazado los esfuerzos axiales N_1 y N_2 en los cordones a media altura en función de la carga de compresión N_i;
- por último, se han trazado los esfuerzos cortantes en los travesaños en la Figura 9(c).

Debido a las imperfecciones geométricas iniciales y a las tensiones residuales, el desplazamiento lateral aumenta cada vez más rápido con la carga aplicada hasta la capacidad portante del pilar N_{cr}; la presencia de desplazamientos laterales explica que un cordón esté más comprimido que el otro, que tiende a descargarse cuando ha llegado a la compresión máxima.

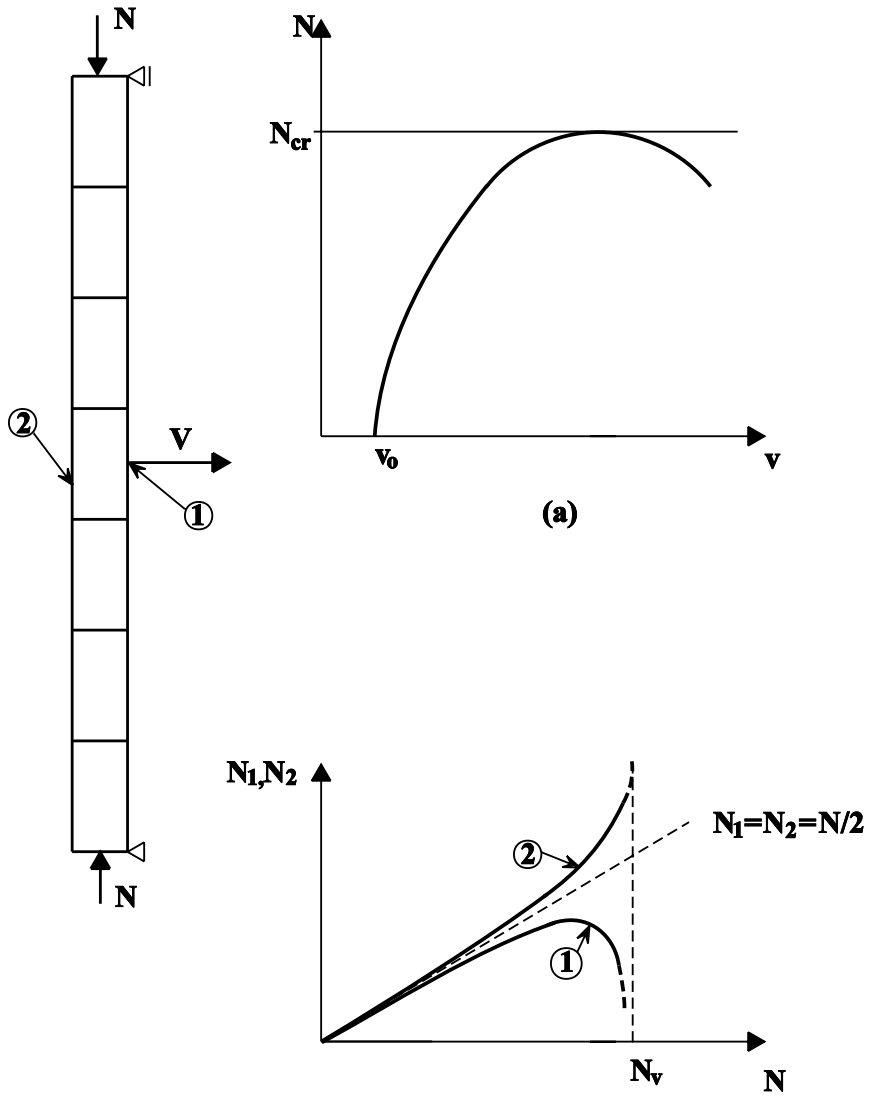


Figura 9 Comportamiento de un pilar empresillado

El efecto de pórtico es menos marcado en el último montante que en el que le sigue hacia adentro, debido a la presencia de sólo medio campo.

El pilar compuesto llega a la capacidad portante máxima cuando ocurre una de estas posibilidades:

- que pandee por el centro del fuste el cordón más comprimido.
- que al final se rompa un cordón por compresión y flexión.
- que al final se rompa un montante o sus uniones a los cordones por cizallamiento y flexión.

Los aspectos principales de la conducta experimental de un elemento compuesto en compresión que se han resumido arriba, se pueden representar por un sim-

ple pilar elástico con imperfecciones geométricas equivalentes iniciales y flexibilidad al cizallamiento (Figura 10).

La filosofía de cálculo del Eurocódigo 3 se funda en este modelo simple; se supone que el pilar, en su estado inicial sin carga, no es perfectamente recto y que la deflexión inicial y (x) es dada por una curva senoidal de un elemento con el extremo basculante:

$$y_o\,(x) = w_o\,\text{sen}\,(\pi\,x\,/\,l) \qquad (5.1)$$

siendo:

w_o el equivalente geométrico de sinuosidad a media altura ($w_o = 0{,}002l = l\,/\,500$);

l la longitud del pilar biarticulado

Cuando se aplica la carga de cálculo N al pilar compuesto, la imperfección geométrica inicial se aplica elásticamente; los desplazamientos laterales en el estado equivalente son:

$$y\,(x) = y_o\,(x)\,\frac{1}{1 - N\,/\,N_{cr,id}} = \frac{W_o}{1 - N\,/\,N_{cr,id}}\,\text{sen}\,(\pi\,x\,/\,l) \qquad (5.2)$$

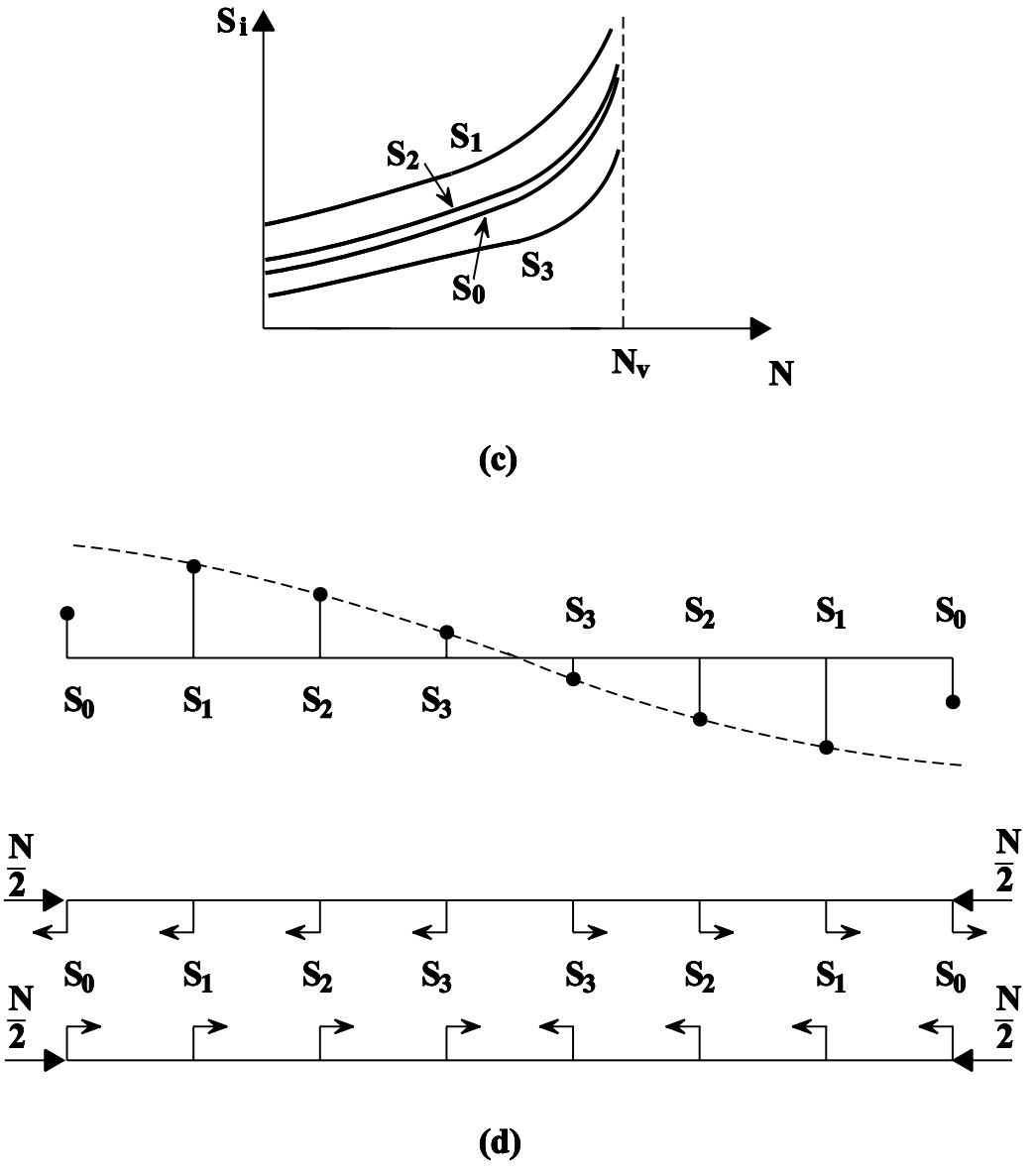


Figura 9 Comportamiento de un pilar empresillado (Continuación)

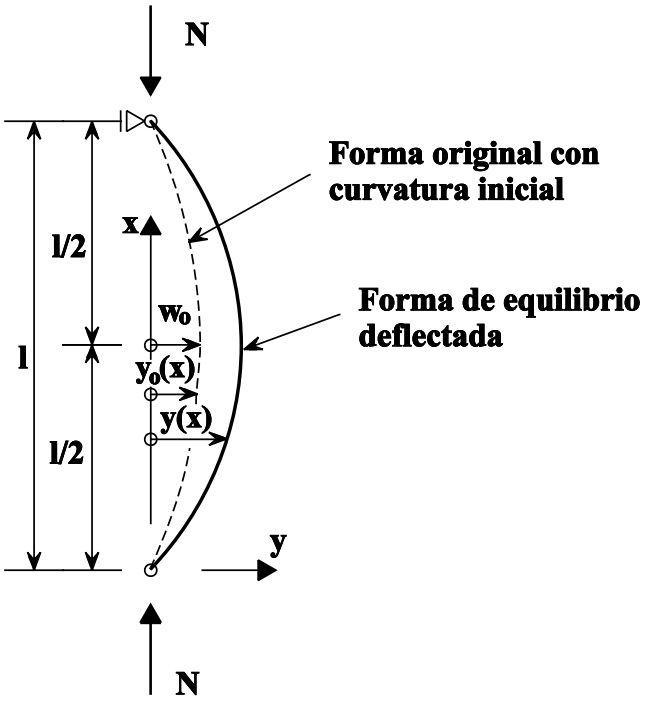


Figura 10 Comportamiento de un pilar defectuoso

siendo $N_{cr,id}$, en la ecuación (5.2) la carga elástica crítica del pilar compuesto que viene en el apartado 4.

A la mitad del fuste del pilar compuesto, el esfuerzo axial es N y el momento de flexión M es igual a:

$$M = N\,y\,(1/2) = \frac{W_o\,N}{1 - N/N_{cr,id}} \qquad (5.3)$$

El esfuerzo axial N_f en el cordón más cargado es:

$$N_f = \frac{N}{2} + \frac{M}{h} = N\left(\frac{1}{2} + \frac{w_o/h}{1 - N/N_{cr,id}}\right) \qquad (5.4)$$

La resistencia al pandeo N_{Rd} de los cordones debe ser mayor de N_f:

$$N_{Rd} \geq N_f \qquad (5.5)$$

En los pilares compuestos armados en diagonal, la longitud efectiva de los cordones se toma igual a la distancia entre las uniones del sistema; en los pilares en escalera (por simplicidad y despreciando los embridados que pudiera haber en los extremos) la longitud efectiva de los cordones se toma igual a la distancia entre ejes de los montantes.

El esfuerzo cortante V en los extremos del pilar compuesto viene dado por:

$$V = N\left\{\frac{dy}{dx}\right\}_{x=0} = N\,w_o\,\frac{\pi}{l}\,\frac{1}{1 - N/N_{cr}} = \frac{\pi}{l}M \qquad (5.6)$$

Los esfuerzos en los tirantes diagonales y cercanos al extremo de los cordones se derivan del esfuerzo cortante V y del esfuerzo axial N.

Se verifican los momentos y solicitaciones en los montantes, sus uniones a los cordones y los cordones mismos, debidos al esfuerzo cortante V y al esfuerzo axial N, como se indica en la Figura 11.

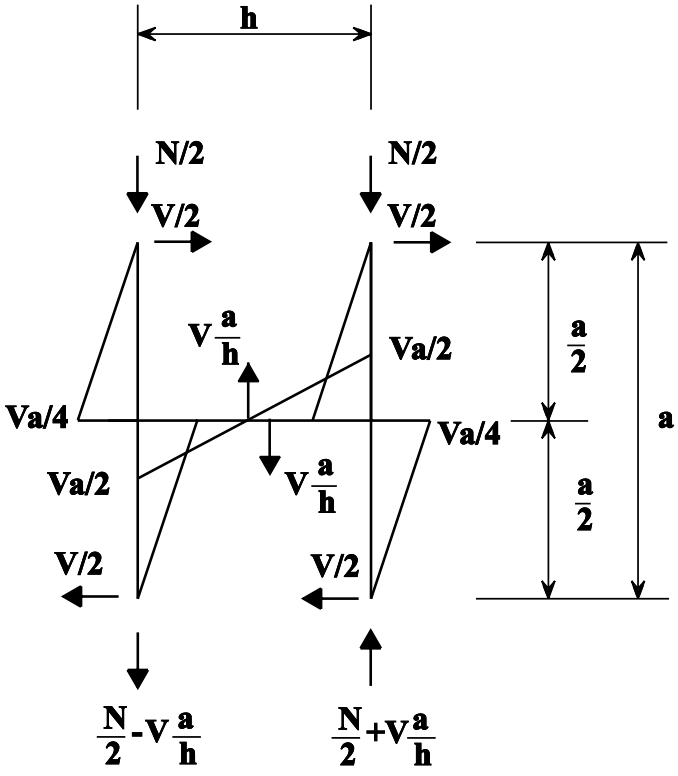


Figura 11 Diagrama para presillas y sección local de pilar

La filosofía de cálculo del Eurocódigo 3 se puede resumir en estos seis pasos:

1. derivar la carga axial de cálculo.

2. derivar la rigidez a la flexión y la rigidez al cizallamiento del pilar compuesto.

3. derivar la carga elástica crítica del pilar compuesto.

4. calcular el momento flector de cálculo en el centro del fuste y el esfuerzo cortante de cálculo en los extremos del pilar compuesto.

5. comprobar la resistencia al pandeo de los cordones a media altura.

6. verificar la resistencia de las piezas del alma y sus uniones a los cordones de los elementos más cargados de los extremos.

6. RESUMEN FINAL

1. Las deformaciones por efecto de cizalla afectan mucho a la capacidad portante de los pilares compuestos.
2. Es posible estudiar el comportamiento de los pilares compuestos por medio de un modelo elástico.
3. Las deformaciones por cortante amplían la falta inicial de rectitud del pilar.
4. El método de cálculo propuesto por el Eurocódigo 3 se funda en el planteamiento expuesto arriba.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Bleich, F., “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw Hill, Nueva York, 1952.

2. Timoshenko, S., “Theory of Elastic Stability”, McGraw Hill, Nueva York, 1936.

3. Galambos, Th. V., “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures - Fourth Edition”, J. Wiley & Sons, Nueva York, 1988.

4. Ballio, G. & Mazzolani, F. M., “Theory and Design of Steel Structures”, Chapmann and Hall, Nueva York, 1983.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.6: Cálculo de pilares compuestos

CONTENIDO

Problema resuelto 9.6 Cálculo de pilares compuestos

PROBLEMA 9.6 CÁLCULO DE PILARES COMPUESTOS

Problema

Clacular un pilar compuesto formado por dos secciones IPE laminadas en caliente con travesaños.

La estructura en cuestión aparece en la Figura 1. Está formada por dos cordones de sección IPE enlazados con cordones de IPE. Los arriostramientos están puestos en ambas caras del pilar compuesto, como se ve en la Figura 2. La carga axial F es igual a 3,500 kN y la altura es 10,00 m. Se supone que es articulado. Está fabricado con acero clase Fe 360.

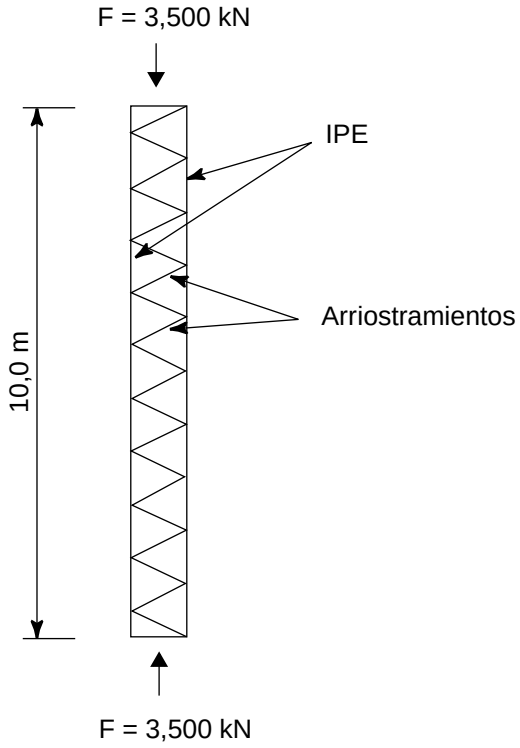


Figura 1: Pilar compuesto

Elección de componentes

Considerando compresión pura, el área total de la sección A debe ser tal que:

$$\frac{N_{Sd}}{A} \leq f_y$$

Referencia en Eurocódigo 3

O bien:

$$A \geq \frac{N_{Sd}}{f_y} = \frac{3,500 \times 10^3}{235} = 148,9 \times 10^2 \ mm^2$$

El perfil IPE 400 debe ser suficiente, pero se estudia el siguiente tamaño, IPE 450, teniendo en cuenta el efecto del pandeo. La sección de los dos perfiles da un área A = 2 × 98,8 = 197,6 cm^2 y una resistencia plástica $N_{pl.Rd}$ = 19,760 × 235 = 4,644 × 10^3 kN.

El sistema de riostras está hecho con chapas 60 × 12 soldadas a los dos cordones de IPE, con a = 1000 mm y h_o = 600 mm, como se ve en la Figura 2.

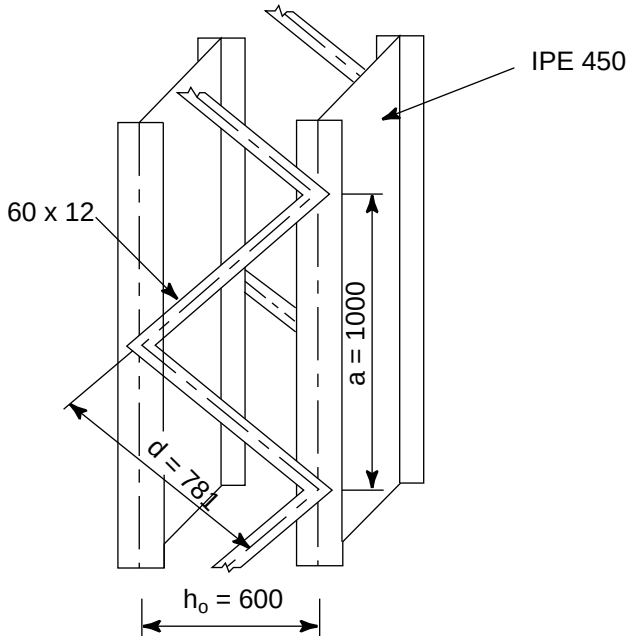


Figura 2 Detalle del arriostramiento del pilar

Segundo momento del área

El momento de inercia del área I_{eff} es: *5.9.2.3(1)*

I_{eff} = $0,5\ h_o^2\ A_f$

Referencia en Eurocódigo 3

siendo:

A_f el área de la sección de un cordón (aquí A_f = 98,8 cm^2),

h_o la distancia entre los centroides de los cordones (aquí h_o = 600 mm),

entonces:

I_{eff} = $0,5 \times 600^2 \times 9,880 = 1778,4 \times 10^6$ mm^4

Cálculo de los esfuerzos internos

Esfuerzos en los cordones

La rigidez anticizalla S_u de los arriostramientos se obtiene de la relación: *Fig. 5.9.3*

$$S_v = \frac{n E A_d a h_0^2}{2d^3}$$

o bien:

$$S_v = \frac{2 \times 210 \times 720 \times 1000 \times 600^2}{2 \times 781^3} = 114262 \text{ kN/mm}$$

siendo: E = 210 kN/mm^2

El esfuerzo $N_{f.Sd}$ a la mitad de la altura de un cordón se obtiene de: *5.9.2.4(1)*

$$N_{f \cdot Sd} = 0,5 N_{Sd} + \frac{M_s}{h_0}$$

siendo:

$$M_s = \frac{N_{Sd} e_0}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_{cr}} - \frac{N_{Sd}}{S_v}}$$

$$e_0 = \frac{l}{500} = \frac{10000}{500} = 20 \text{ mm}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{eff}}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 1778,4 \times 10^6}{10000^2} = 36859 \text{ kN}$$

Referencia en Eurocódigo 3

Así:

$$M_s = \frac{3500 \times 20}{1 - \frac{3500}{36859} - \frac{3500}{114262}} = 80054 \ \text{kN} \cdot \text{mm}$$

y:

$$N_{f \cdot Sd} = 0,5 \times 3500 + \frac{80054}{600} = 1883 \, \text{kN}$$

Esfuerzos en los arriostramientos

El esfuerzo N_d en un arriostramiento se obtiene de las relaciones:

$$V_s = \frac{\pi M_s}{l} = \frac{\pi \times 80054}{10000} = 25,1 \ \text{kN}$$

5.9.2.6(1)

y:

$$N_d = \frac{V_s \, d}{n \, h_0} = \frac{25,1 \times 781}{2 \times 600} = 16,3 \ \text{kN}$$

Resistencia al pandeo de los componentes

Resistencia al pandeo del cordón

- Por el eje fuerte

La longitud de pandeo l_y del eje fuerte del cordón es igual a la altura del pilar, o sea, 10 m. Entonces hay que comprobar:

5.5.1.2(1)

$$\bar{\lambda}_y = \frac{l_y}{i_y \, \pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} = \frac{10000}{185 \times \pi} \sqrt{\frac{235}{210000}} = 0,576$$

El cálculo arroja $\chi_y = 0,899$ (con $\alpha = 0,21$) y la resistencia al pandeo es:

Tablas 5.5.3 y 5.5.1

5.5.1.1(1)

$$N_{b \cdot y \cdot Rd} = \frac{\chi_y \, \beta_A \, A \, f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,899 \times 1 \times 9880 \times 235}{1,1} = 1,898 \ \text{kN}$$

Referencia en Eurocódigo 3

- Por el eje débil

La longitud de pandeo l_z en el eje débil es sólo a = 1 m, así:

5.9.2.5(1)

$$\bar{\lambda}_z = \frac{l_z}{i_z \pi}\sqrt{\frac{f_z}{E}} = \frac{10000}{41,2 \times \pi}\sqrt{\frac{235}{210000}} = 0,258$$

Entonces χ_z = 0,979 (con α = 0,34) y la resistencia al pandeo es:

Tablas 5.5.3 y 5.5.1
5.5.1.1(1)

$$N_{b\cdot z\cdot Rd} = \frac{\chi_z \beta_A A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,979 \times 1 \times 9880 \times 235}{1,1} = 2,067 \text{ kN}$$

- Verificación de los cordones

Hay que verificar los cordones de IPE 450 porque $N_{b.y.Rd}$ = 1898 kN y $N_{b.z.Rd}$ = 2067 kN son mayores que $N_{f.Sd}$ = 1893 kN.

Resistencia al pandeo de los arriostramientos

Sólo hay que estudiar el pandeo por el eje débil.

La longitud de pandeo de un arriostramiento es: d = 781 mm. Su radio de giro por el eje débil es: $i_{d\cdot z} = \sqrt{I_{d\cdot z} / A_d}$

$$i_{d\cdot z} = \sqrt{\frac{b\,h^3}{12\,b\,h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_{d\cdot z} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ mm}$$

Aplicando la curva c de pandeo (α = 0,49) correspondiente a una sección rectangular, tenemos:

Tablas 5.5.3 y 5.5.1

$$\bar{\lambda}_z = \frac{l_z}{i_{d\cdot z} \pi}\sqrt{\frac{f_z}{E}} = \frac{781}{3,46 \times \pi}\sqrt{\frac{235}{210000}} = 2,40$$

5.5.1.2(1)

χ_z = 0,1425

$$N_{b\cdot z\cdot Rd} = \frac{\chi_z \beta_A A_d f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,1425 \times 1 \times 720 \times 235}{1,1} = 21,9 \times 10^3 \text{ N}$$

Referencia en Eurocódigo 3

Este valor de $N_{b.z.Rd}$ = 21,9 kN es mayor que N_d = 16,3 kN

Por lo tanto, el pilar es válido.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.7: Longitudes de pandeo

OBJETIVO/CONTENIDO

Introducir el concepto de longitud efectiva y explicar su aplicación al cálculo de pilares prácticos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.3:	Modelos de inestabilidad elástica
Lección 9.5.1 y 9.5.2:	Pilares
Lección 9.6:	Pilares compuestos

LECCIONES AFINES

Lección 9.11:	Pórticos
Lecciones 9.12:	Celosías

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.7:	Longitudes efectivas

RESUMEN

En los pilares biarticulados la longitud de pandeo es igual a la real, pero esto rara vez se da en la práctica. La resistencia en condiciones distintas a la biarticulada se puede predecir por la noción de longitud efectiva (L_E).

L_E es la longitud de un pilar biarticulado similar (de igual sección) que tenga la misma carga de pandeo que el que se considera. Se dan valores aproximados de la longitud efectiva en muchas condiciones de empotramiento que pueden servir para el cálculo.

1. INTRODUCCIÓN

Para hallar la carga crítica de pandeo elástico de Euler

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \qquad (1)$$

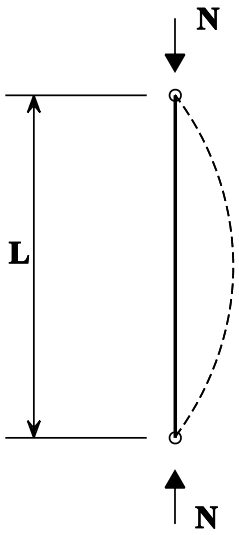


Figura 1 Pandeo de pilar biarticulado

se presume (Lecciones 8.1. y 9.5.1) que ambos extremos del pilar son basculantes (Figura 1); sin embargo las uniones posibles de los extremos de los pilares reales no siempre se comportan así, y por tanto, esto afecta de manera significativa a la carga de pandeo. Deben considerarse dos aspectos de las condiciones de los extremos:

- los impedimentos al giro que varían de 0 al ∞ (i.e. una rótula sin fricción o plenamente empotrada);
- los empotramientos de traslación (con o sin flecha horizontal).

El planteamiento acostumbrado del cálculo consiste en reducir el caso real en estudio a un caso basculante equivalente por medio de un factor de longitud efectiva K.

2. LONGITUD EFECTIVA DE PILARES

La longitud efectiva L_E de un elemento con extremos articulados es la distancia entre los ejes de las rótulas. En empotramiento general, la longitud efectiva L_E es la longitud de un elemento articulado en los extremos con la misma resistencia portante que el elemento en cuestión.

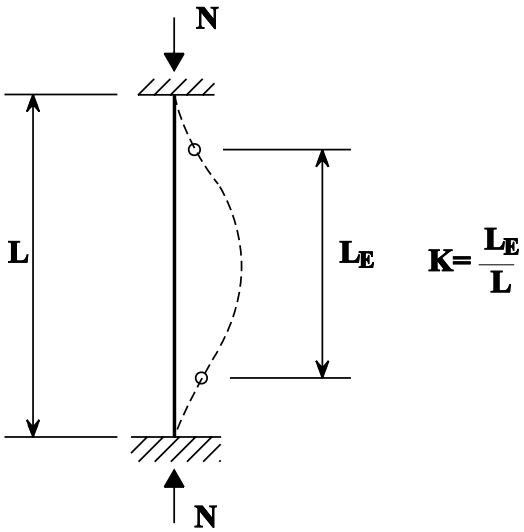


Figura 2 Longitud equivalente de pilar

En la práctica no es muy fácil aplicar la definición anterior. Se ha visto en estudios numéricos que la noción de longitud efectiva del pilar se puede derivar de la teoría de estabilidad elástica. En este caso, el factor de longitud efectiva K es la relación entre la longitud del pilar equivalente (L_E) y la longitud real (L); y la longitud del pilar equivalente es la distancia entre dos puntos consecutivos de contraflexión (puntos de momento cero) del pilar real (Figura 2).

En el pilar con extremos biarticulados (caso fundamental de pandeo de una barra prismática, ver Figura 1), el factor de longitud equivalente es igual a 1, y la distancia entre puntos de momento cero es la longitud real del pilar.

Más generalmente, consideremos por ejemplo, los pilares del pórtico de la Figura 3a; si se presume que la rigidez a la flexión de la viga es mucho mayor que la de los pilares, no se produce el giro de los capiteles de los pilares al moverse el pórtico lateralmente. Esta situación se muestra en la Figura 3b.

El momento de flexión de un punto del pilar viene dado por

M = NV + HZ (Figura 3c).

La ecuación diferencial pasa a ser:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{-(N_V + Hz)}{EI} \qquad (2)$$

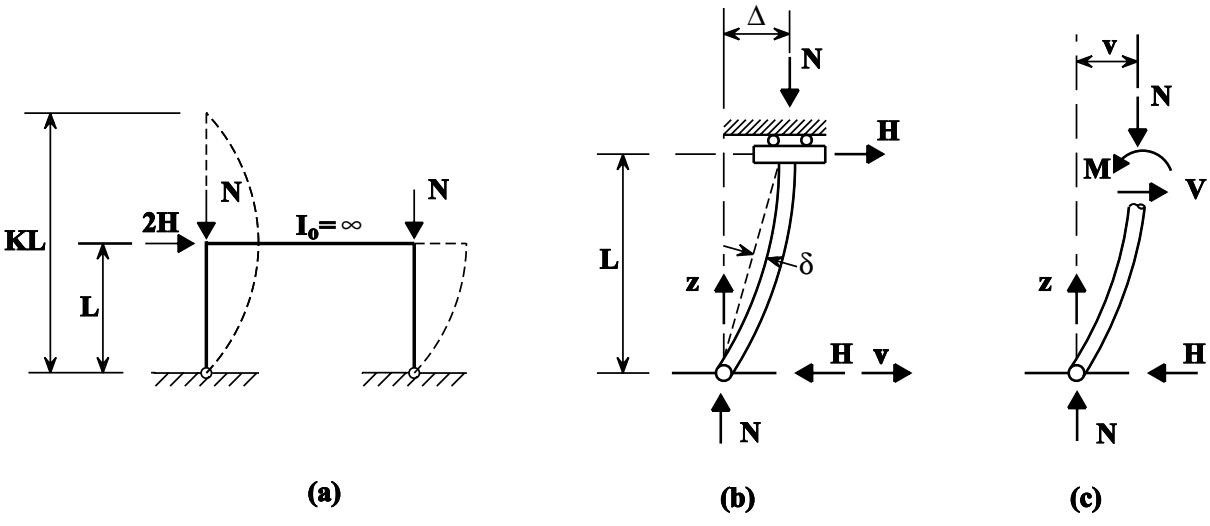


Figura 3 Determinación de la longitud efectiva

Poniendo la notación $k^2 = N/EI$:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2 v = -\frac{k^2 Hz}{N} \qquad (2b)$$

La solución de la ecuación (2b) la da:

$$v = A\cos k\,z + B\,\mathrm{sen}\,k\,z - \frac{Hz}{N} \qquad (3)$$

Para hallar las constantes A y B se toman las condiciones límite:

para z = 0, v = 0 y para z = L, $\frac{dv}{dz} = 0$ = 0, por lo tanto A = 0 y

B k cos k L = 0 (4)

Se sigue de (4) que B o cos k L = 0.

Si B = 0, v = -Hz/N y $d^2v/dz^2 = 0$; en este caso el momento de flexión M debe ser cero en cualquier punto del pilar.

La otra posibilidad es que kL = 0 y tal condición requiere que k = nπ/2L donde n = 1,3,5,… (5)

Para obtener el menor valor de N que satisface a la ecuación (5), se toma n = 1 que da kL = π/2, de donde k = π/2L y $k^2 = N/EI$,

$$N_{cr} = k^2\,EI = \pi^2\,EI/4L^2 = \pi^2\,EI/(2L)^2 \qquad (6)$$

La comparación de las ecuaciones (6) y (1) indica que el factor de longitud efectiva k es igual a 2, y así, la longitud efectiva del pilar es el doble de la real. Dicho de otro modo, la carga crítica del pilar de longitud L, de la Figura 3, es igual a la carga crítica del pilar biarticulado de longitud 2L. Esta situación se presenta geométricamente en la Figura 3a.

Acudir a la longitud efectiva es en esencia un recurso para emparejar la conducta de pilares con cualquier forma de apoyo a la del pilar articulado. El procedimiento de cálculo de pilares

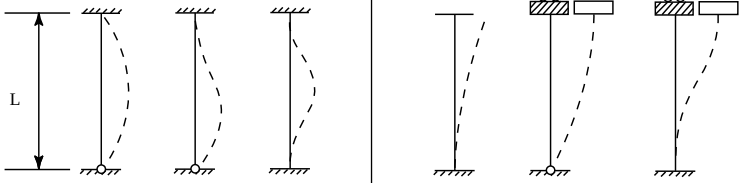
	Con empotramiento lateral			**Sin empotramiento lateral**		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
Condiciones de pandeo ideales						
Valores K teóricos	1,0	0,7	0,5	2,0	2,0	1,0
Valores K recomendados cuando las condiciones son aproximadas	1,0	0,8	0,65	2,0	2,0	1,2

Tabla 1 Factor de longitud efectiva de pilares con carga central y diversas condiciones de empotramiento

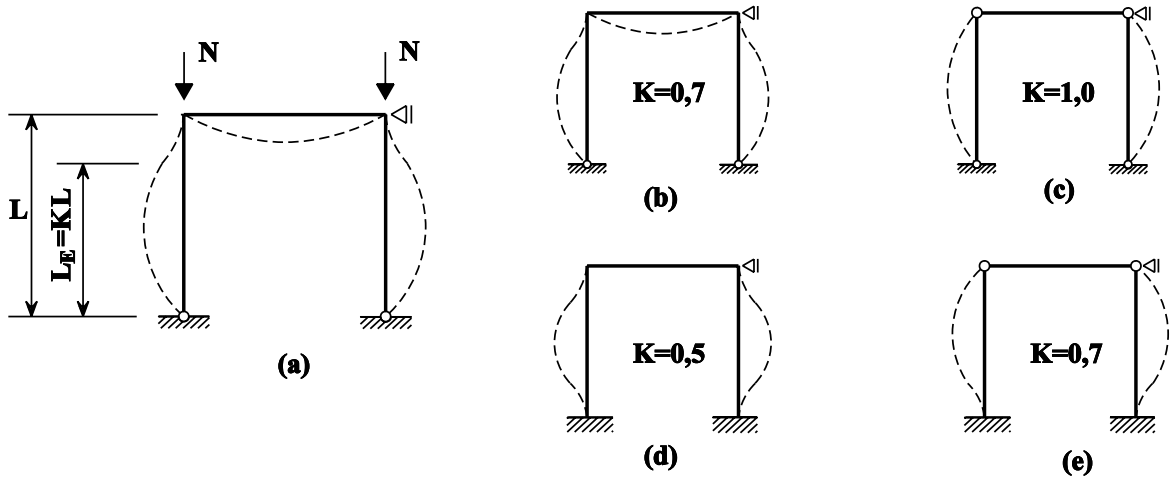


Figura 4 Pandeo de un pilar de pórtico con desplazamiento horizontal impedido

con condiciones particulares en los extremos es igual que para pilares biarticulados (ver Lección 9.5.1), pero la resistencia de cálculo respecto a la curva de cálculo del pilar se establece tomando la esbeltez (L_E/r_y) en vez de L/r_y.

La Tabla 1 da los valores K teóricos de condiciones ideales donde las restricciones de giro y traslación en los extremos del pilar se dan totalmente o no existen. Todos estos valores se obtienen como en el ejemplo anterior.

La tabla 1 recomienda también valores K iguales o algo más altos que los valores teóricos equivalentes derivados de la teoría de estabilidad elástica. Cuando se especifican valores más altos, suele ser en reconocimiento de la dificultad práctica de impedir completamente el giro o la traslación.

Comparando los casos (b) y (e) de la Tabla 1 se ve cómo influyen los impedimentos a la traslación sobre la carga de pandeo. El caso (e) representa la situación del pilar de la Figura 3a con desplazamiento lateral, mientras que en el caso (b) se impide la traslación; impidiendo la traslación, la carga de pandeo se multiplica por un factor de 8 ($(2,0/0,7)^2$). Por esta razón es absolutamente necesario que el calculista sepa la diferencia entre pórtico con y sin flecha horizontal.

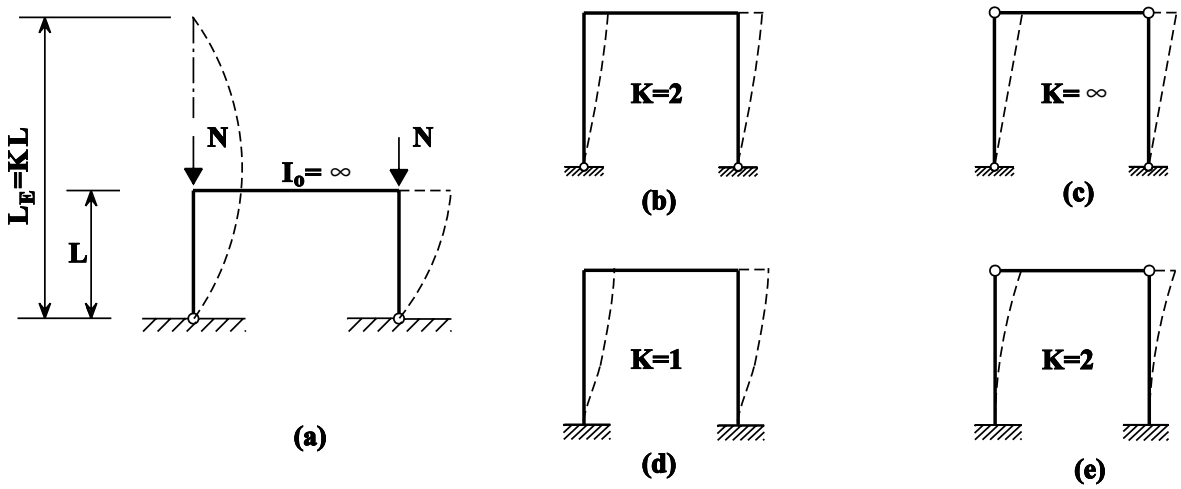


Figura 5 Pandeo de un pilar de pórtico con desplazamiento horizontal

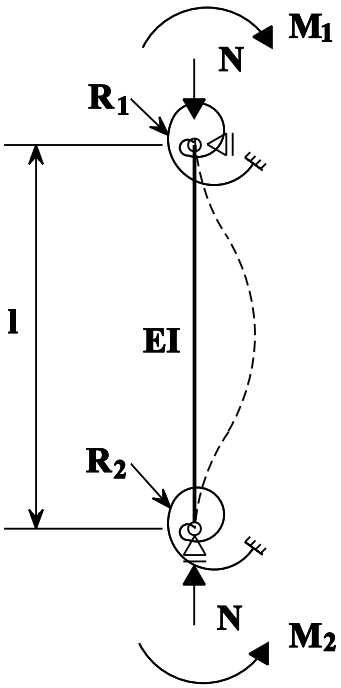


Figura 6 Sub-ensamblaje mediante fórmula de Donnell

Según la clasificación del Eurocódigo 3, un pórtico sin flecha horizontal es el que responde a las cargas horizontales en un plano con la rigidez necesaria para poder aceptar su exactitud despreciando otras fuerzas o momentos internos originados por el desplazamiento horizontal de sus nudos. Todos los demás pórticos deberán considerarse que tienen flecha horizontal y se tendrá en cuenta en el cálculo el efecto del desplazamiento horizontal de sus nudos.

En las lecciones del Tomo 16 se dan más detalles respecto a la distinción entre pórticos cono sin flecha horizontal.

El capitel de un pilar de un pórtico sin flecha horizontal no se mueve lateralmente respecto a su base. El pandeo de un pórtico sin flecha horizontal causa el pandeo de un pilar que tenga al menos un punto de contraflexión en sus extremos, como en los casos (a), (b) y (c) de la Tabla 1 (ver Figura 4). El factor de longitud efectiva K es siempre igual a 1 o menor ($0,5 \leq K \leq 1$).

En un pórtico con flecha horizontal, el capitel del pilar se mueve respecto a la base. Los casos (d), (e) y (f) son los de pandeo lateral que ilustra la Figura 5. El factor de longitud efectiva K es siempre igual a 1 o mayor, y es ilimitado ($1 \leq K \leq \infty$).

Las consideraciones anteriores acerca de pórticos de una planta se pueden generalizar y comprender pórticos de más plantas.

Los empotramientos totalmente rígidos (expuestos en las Figuras 4b, 4d, 5b y 5d) rara vez se logran en la práctica, siendo mucho más común el semiempotramiento de los extremos.

En el caso del semiempotramiento, el factor de longitud efectiva puede hallarse bien mediante un método de giro de segundo orden generalizado, o por medio de las funciones de estabilidad (ver (1)).

La solución del problema se expresa así:

$$K = f(\eta t, \eta b) \qquad (7)$$

siendo ηt y ηb los coeficientes de empotramiento elástico del capitel y la base del pilar en estudio.

Existen métodos simplificados para evaluar el factor de longitud efectiva K (ver (2), (3), (4), (5) y (6)).

Aplicando la fórmula aproximada de Donnell (ver Figura 6 y (2))

$$k = 1/\sqrt{n} \qquad (8)$$

siendo $n = \dfrac{1,2.9\,(f_1 + f_2) + 7,2\,f_1\,f_2}{1 + 1,4\,(f_1 + f_2) + 1,8\,f_1\,f_2}$ (9)

y

$$f_i = \frac{1}{6,5\,E\,I}\,\frac{M_i}{\theta_i} \qquad (10)$$

En el caso de una barra o celosía en compresión

$$f_i = \frac{1}{6,5\,E\,I}\,R_i \qquad (11)$$

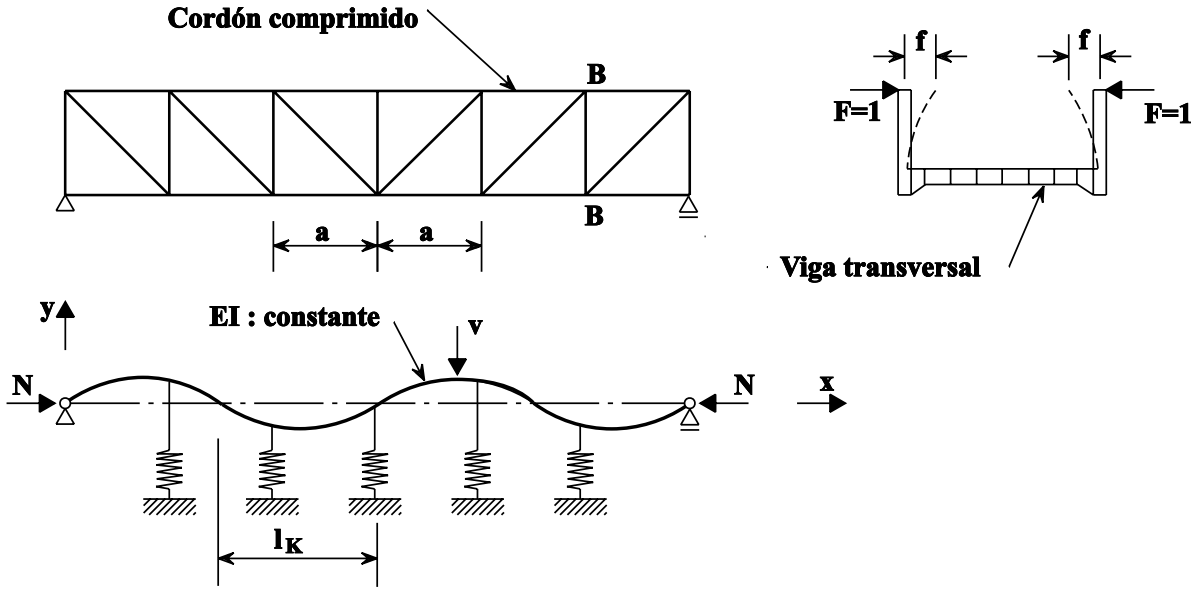


Figura 7 Pandeo de una barra con soportes elásticos

siendo $$R_i = \Sigma j\, 3\frac{E I_j}{l_j} \qquad (12)$$

caracteriza el empotramiento de las barras contiguas, “j”.

Wood (3) y Johnston (4) han dado otros métodos simplificados que sólo difieren en su presentación.

En el Eurocódigo 3 se ha adoptado el método propuesto por Wood y considera dos casos, con y sin flecha horizontal.

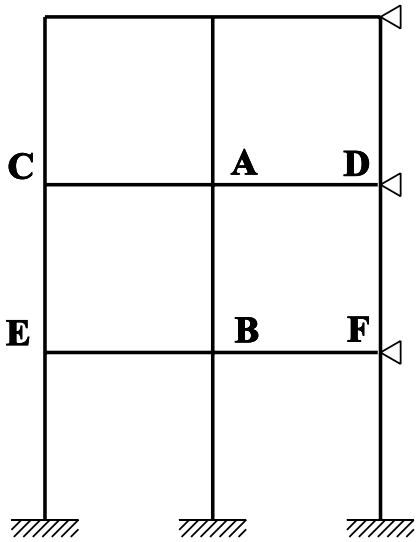
En algunos casos un elemento elástico se puede apoyar en varios puntos intermedios de su longitud. La figura 7 muestra, por ejemplo, el cordón en compresión de una jácena de celosía; los apoyos intermedios del cordón los aporta la jácena transversal del armazón. En tal caso la longitud efectiva es mayor que la distancia “e” entre las jácenas transversales y viene dada (ver (7)) por:

$$l_k = \pi^4 \sqrt{\frac{1}{4} E I f a} \qquad (13)$$

siendo $f = 1/k_r$, el desplazamiento de muelle (apoyo intermedio) debido a una fuerza unitaria.

3. PILARES DE PÓRTICOS SIN FLECHA HORIZONTAL

Wood (3) considera un subelemento de un pórtico sin flecha horizontal como el que presenta la Figura 8b (la parte AB pórtico de la Figura 8a).



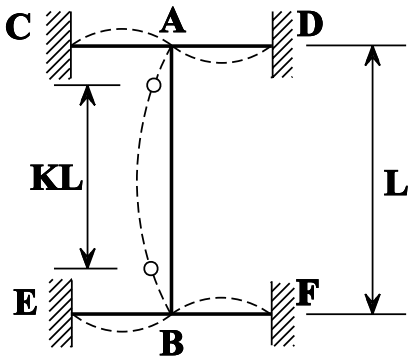


Figura 8 Ejemplo de pórtico sustituto

Los dos coeficientes de empotramiento elástico ηt y ηb (que son muy análogos a los coeficientes de reparto transversal en el capitel y la base del pilar) se calculan con las siguientes fórmulas:

$$\eta t = K_C/(K_C + \Sigma K_{b,t}) \quad (14)$$

$$\eta_b = K_C/(K_C + K_{b,b}) \quad (15)$$

siendo K_C la rigidez del pilar I/L

ΣK_b la suma de la rigidez efectiva de la viga en una unión, indicando los subíndices b y t el capitel y la base del pilar.

No estando sometidas las vigas a esfuerzos axiales, su rigidez efectiva se halla con referencia a la Tabla 2, siempre que sigan siendo elásticas bajo los momentos de cálculo.

Si en el mismo caso de carga, el momento de cálculo en alguna de las vigas superara el momento elástico, debe suponerse que la viga está articulada en el punto o puntos en cuestión.

Si una viga tiene uniones semirrígidas, su rigidez efectiva debe reducirse en la misma medida.

Condiciones de restricción de giro en en el extremo más alejado de la viga	**Rigidez efectiva de la viga (la viga permanece elástica)**
Fija en el extremo más alejado	1,0 I/L
Articulada en el extremo más alejado	0,75 I/L
Giro de igual signo que el extremo más próximo (doble curvatura)	1,5 I/L
Giro igual y opuesto al del extremo más próximo (simple curvatura)	0,5 I/L
Caso general. Giro θ_A en el extremo más próximo y θ_B en el más alejado	$(1 + 0{,}5\ \theta_B/\theta_A)$ I/L

Tabla 2 Rigidez efectiva de una viga

Condiciones del extremo opuesto	Rigidez efectiva de la viga
Fijo	1,0 I/L (1 - 0,4 N/N_{cr})
Articulado	0,75 I/L (1 - 1,0 N/N_{cr})
Doble curvatura	1,5 I/L (1 - 0,2 N/N_{cr})
Simple curvatura	0,5 I/L (1 - 1,0 N/N_{cr})
Donde $N_{cr} = \pi^2 EI/L^2$	

Tabla 3 Fórmulas aproximadas de rigidez reducida por compresión axial

Si las vigas están sometidas a solicitaciones axiales, se corregirá su rigidez efectiva correlativamente; en este caso pueden aplicarse las funciones de estabilidad. Una alternativa sencilla es despreciar la mayor rigidez causada por la tensión axial y permitir los efectos de la compresión axial mediante las aproximaciones moderadas que da la Tabla 3.

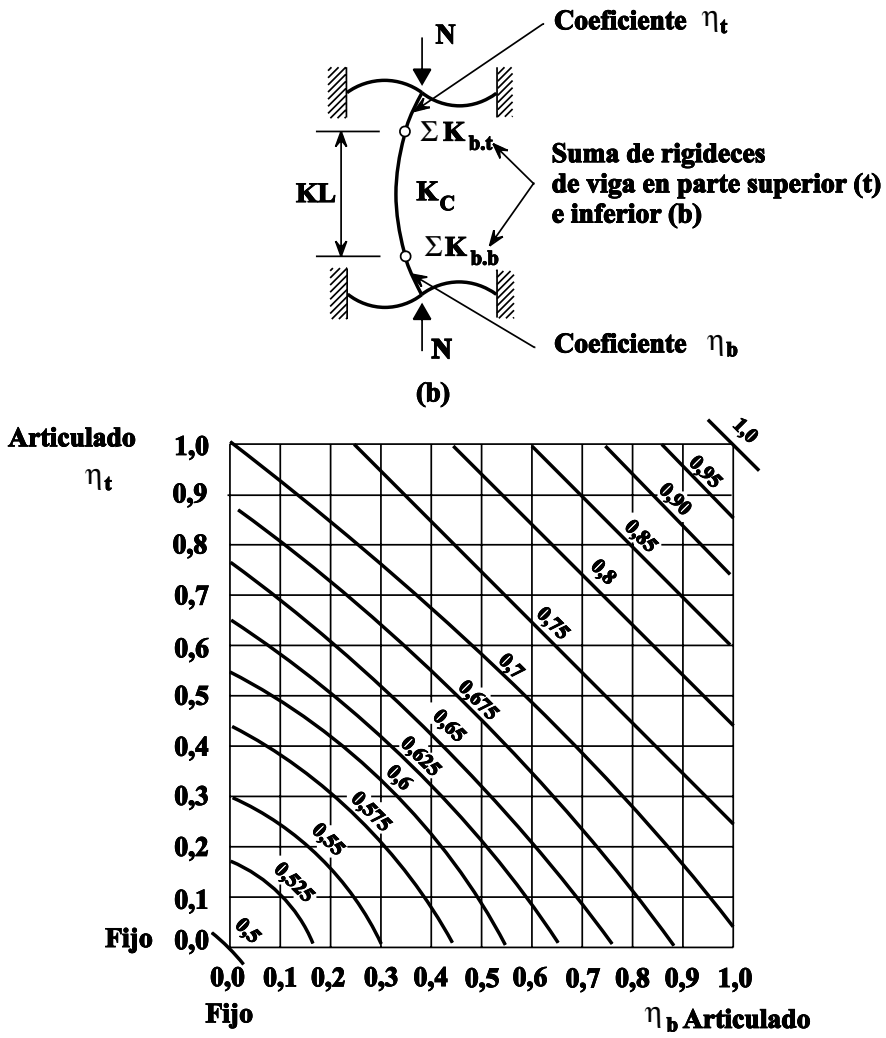
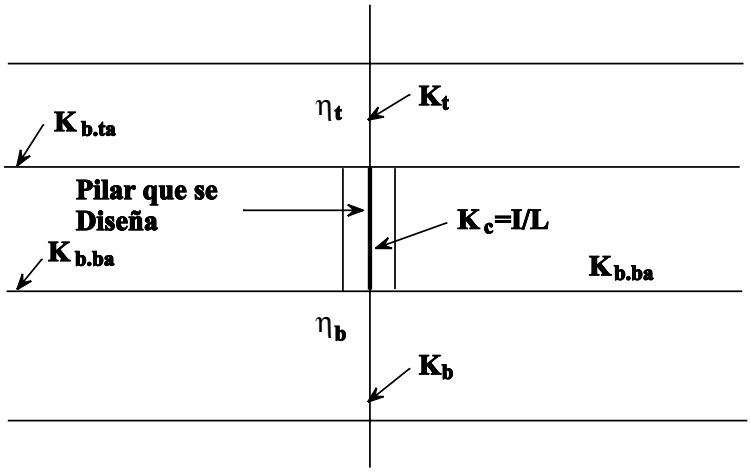


Figura 9 Factor de longitud efectiva de un pilar de pórtico con desplazamiento horizontal impedido

Considerando el subelemento que muestra la Figura 8b y el reparto de coeficientes que se dan arriba, se producen resultados que se pueden presentar gráficamente (3) con las curvas de la Figura 9, que también se pueden representar por la siguiente expresión:

$$K = \frac{1 + 0,145\,(\eta_b + \eta_t)) - 0,265\,\eta_b \cdot \eta_t}{2 - 0,364\,(\eta_b + \eta_t) - 0,247\,\eta_b \cdot \eta_t} \qquad (16)$$

El modelo se puede adaptar al cálculo de pilares continuos, suponiendo que cada tramo de pilar está cargado al mismo valor de la relación (N/N_{cr}). En el caso general, donde (N/N_{cr}) varía, se llega a un valor moderado de K para el tramo más desfavorable del pilar.



$$\eta_t = \frac{K_c + K_t}{K_c + K_t + K_{b.ta} + K_{b.tb}}$$

$$\eta_b = \frac{K_c + K_b}{K_c + K_b + K_{b.ba} + K_{b.bb}}$$

Figura 10 Coeficientes de restricción elástica en pilar continuo

Se puede introducir esta hipótesis, respecto a cada tramo de un pilar continuo, mediante el modelo que muestra la Figura 10 y obteniendo los coeficientes de reparto ηt y ηb como sigue:

$$\eta_t = \frac{K_c + K_t}{K_c + K_t + \Sigma K_{b \cdot t}} \quad (17)$$

$$\eta_b = \frac{K_c + K_b}{K_c + K_b + \Sigma K_{b \cdot b}} \quad (18)$$

4. PILARES DE PÓRTICOS CON FLECHA HORIZONTAL

En los pórticos sin arriostrar (y algunos arriostrados) se permite la flecha horizontal; el factor de longitud efectiva, K, es por tanto mayor que la unidad y tiende al infinito si las vigas son muy flexibles.

K se puede calcular por el mismo método adoptado para pórticos cuya flecha horizontal se evita, pero debe señalarse que los resultados de los pórticos con flecha horizontal se consideran aún más inexactos que los que se han dado para pórticos sin flecha horizontal.

El método de Wood puede considerarse aceptable, con flecha horizontal permitida, sólo si los pórticos son regulares, es decir, que las alturas, momentos de inercia y solicitaciones axiales de los pilares no difieran demasiado.

El factor de longitud efectiva de un pilar en un pórtico con flecha horizontal se obtiene de la Figura 11 o de la ecuación (19):

$$K = \sqrt{\frac{1 - 0,2\,(\eta_t + \eta_b) - 0,24\,\eta_t\ \eta_b}{1 - 0,8\,(\eta_t + \eta_b) + 0,6\,\eta_t\ \eta_b}} \quad (19)$$

Los coeficientes de empotramiento elástico ηt y ηb se calculan como en el caso de pórticos sin flecha horizontal.

La introducción del concepto de longitud efectiva en el cálculo elástico de pilares con flecha horizontal exige tener en cuenta aproximadamente los efectos desestabilizadores de la carga (debido al desplazamiento del capitel del pilar), por medio de un factor de longitud efectiva mayor que 1. La ventaja de este método es la sencillez, aunque debe reconocerse que es limitado, y en algunos casos inexacto.

Se le concede más confianza a un cálculo que considere toda la estructura y se base en métodos aproximados de análisis de la carga elástica crítica. Estos métodos consideran los efectos de los esfuerzos horizontales sobre la estructura que someten al pilar a momentos flectores así como a cargas axiales. En la lección 9.11 se da más información sobre esta cuestión.

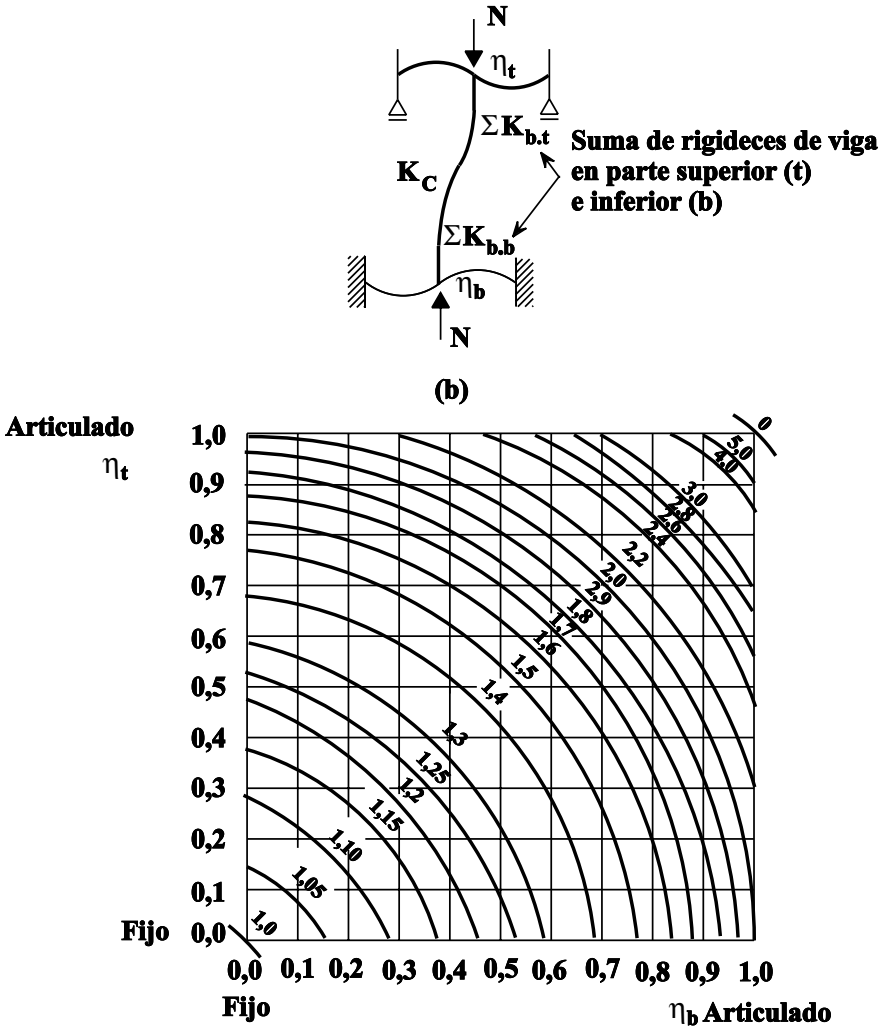


Figura 11 Factor de longitud efectiva de un pilar de pórtico con desplazamiento horizontal

5. RESUMEN FINAL

1. Las longitudes efectivas permiten aplicar las curvas de cálculo de pilares biarticulados al cálculo de pilares reales con gran variedad de condiciones de empotramiento.
2. Se dispone de métodos simplificados para evaluar la longitud efectiva de elementos en compresión.
3. La longitud efectiva de los pilares que tienen flecha horizontal es mayor que la longitud real.
4. La longitud efectiva de los pilares sin flecha horizontal es menor que la longitud real.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Livelsey, R.K. y CHANDLER, P.B., “Stability Functions for Structural Frameworks”, Manchester University Press, 1956.

2. Massonnet, Ch., “Flambement des Constructions Formées de Barres Droites”. Note technique B10.52, CRIF, Bruselas, 1955.

3. Wood, R.H., “Effective Lengths of Columns in Multistorey Buildings”. The Structural Engineer, vol. 52, 1974 (pp. 235-244; 295-302; 341-346).

4. Johnston, G., “Design Criteria for Metal Compression Members”. John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1960.

5. Djalaly, H., “Longueur de Flambement des Eléments de Structures”. Construction métallique, no. 4, 1975.

6. Kamal Hassan., “Zur Bestimmung der Knicklänge of Rahmenstrelen”, IVBH Anhandlungen 28-I-1968.

7. SIA 161, Constructions Métalliques 1979.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.7(i), (ii) y (iii): Longitudes efectivas

CONTENIDO

Problema resuelto 9.7(i) Cálculo de las longitudes de pandeo de pórticos sin flecha horizontal

Problema resuelto 9.7(ii) Cálculo de las longitudes de pandeo de pórticos con flecha horizontal

Problema resuelto 9.7(iii) Cálculo de longitudes efectivas en el plano y fuera del plano

PROBLEMA 9.7(i) CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE PANDEO DE PÓRTICOS SIN FLECHA HORIZONTAL

Problema

Evaluar las longitudes de pandeo de un pilar sin flecha horizontal con elementos diagonales que aportan suficiente arriostramiento.

La estructura aparece en la Figura 1. Consiste en un pórtico, los extremos de cuyos pilares imposibilitados de movimiento lateral por un sistema de arriostramientos. El estudio se reduce a evaluar las longitudes de pandeo en el plano de los pilares y arriostramientos.

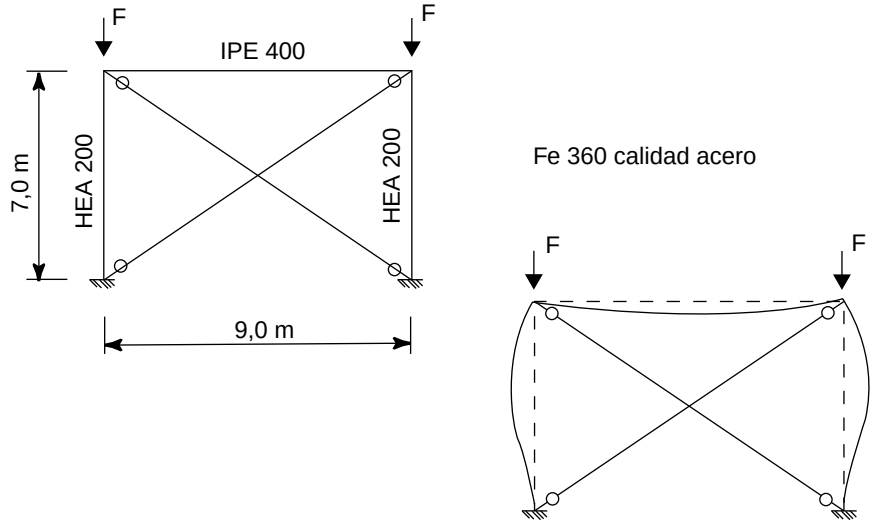


Figura 1 Pórtico arriostrado

Factores de distribución

Las características geométricas de los elementos se dan en la Tabla 1.

Elementos	Tipo	I	L	K´ = I/L
HEA 200	Viga	3692 cm^4	7 m	5,274 cm^3
IPE 400	Pilar	23130 cm^4	9 m	25,700 cm^3

Tabla 1 Coeficientes de rigidez

Referencia en Eurocódigo 3

Los factores de distribución η_1 y η_2 se obtienen de las relaciones:

Anexo E E.2(3)

$$\eta_1 = \frac{K_c}{K_c + K_{11} + K_{12}}$$

$$\eta_2 = \frac{K_c}{K_c + K_{21} + K_{22}}$$

siendo K_c el coeficiente de rigidez del pilar en cuestión, K_{ij} es el coeficiente de rigidez del pilar efectivo, incluso el de todas las vigas unidas al nudo que se estudia.

La viga no está sometida a esfuerzos axiales. Está fija en ambos extremos y su deformación es una curva simple. Así el coeficiente de rigidez efectivo K_{ij} debe cambiarse a: $K_{ij} = 0{,}5\ K'_{ij}$. El coeficiente K_c no debe cambiarse ($K_c = K'_c$).

Anexo E Tabla E.1

$$\eta_1 = \frac{5,274}{5,274 + 0,5 \times 25,7} = 0,291$$

$\eta_2 =$ 0 (el pilar está fijo en la base).

Longitudes de pandeo

Estos valores dan una relación de la longitud de pandeo aproximadamente igua a 0,54;

Anexo E Fig. E.2.1

También se puede calcular a partir de las siguientes relaciones:

Anexo E E.2(12)(a)

$$\frac{l}{L} = 0,5 + 0,14\,(\eta_1 + \eta_2) + 0,055\,(\eta_1 + \eta_2)^2$$

o bien:

$$\frac{l}{L} = \frac{1 + 0,145\,(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\,\eta_1\,\eta_2}{2 - 0,364\,(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\,\eta_1\,\eta_2}$$

que arroja:

$$\frac{l}{L} = 0,5 + 0,14 \times 0,291 + 0,055 \times 0,291^2 = 0,545$$

y:

$$\frac{l}{L} = \frac{1 + 0,145 \times 0,291}{2 - 0,364 \times 0,291} = 0,550$$

Así, la evaluación de la longitud de pandeo resulta:

$l = 0,545 \quad L = 0,545 \times 7 = 3,82$ m

Los arriostramientos están articulados en ambos extremos. Si no se unen en el cruce, $l = L = \sqrt{7^2 + 9^2} = 11,4$ m. Si están articulados en el centro (para acortar la longitud de pandeo), l = L/2 = 11,4/2 = 5,7 m.

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.7(ii) CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE PANDEO DE PÓRTICOS CON FLECHA HORIZONTAL

Problema

Evaluar las longitudes de pandeo de los pilares de un pórtico con flecha horizontal.

La estructura aparece en la Figura 2. Es de varias plantas con vigas de sección IPE y pilares HEA. Se presume que todas las uniones son perfectamente rígidas, excepto en el nudo A en el que el pilar AB está articulado.

Factores de distribución

Las características geométricas de todos los elementos (vigas y pilares) vienen en la Tabla 2.

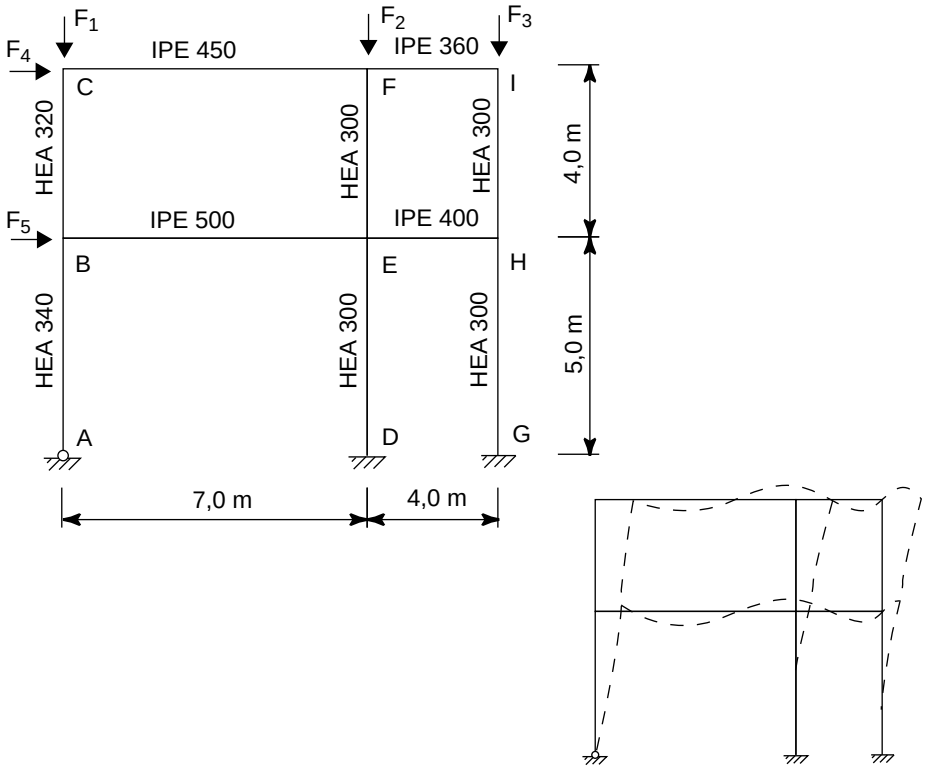


Figura 2 Pórtico con flecha horizontal

Referencia en Eurocódigo 3

Elemento	Perfil	Tipo	I	L	K´ = I/L
AB	HEA 340	Pilar	27.690 cm^4	5 m	55,40 cm^3
BC	HEA 320	Pilar	22.930 cm^4	4 m	57,32 cm^3
DE	HEA 300	Pilar	18.260 cm^4	5 m	36,52 cm^3
EF	HEA 300	Pilar	18.260 cm^4	4 m	45,65 cm^3
GH	HEA 300	Pilar	18.260 cm^4	5 m	36,52 cm^3
HI	HEA 300	Pilar	18.260 cm^4	4 m	45,65 cm^3
BE	IPE 500	viga	48.200 cm^4	7 m	68,86 cm^3
CF	IPE 450	viga	33.740 cm^4	7 m	48,20 cm^3
EH	IPE 400	viga	23.130.cm^4	3 m	77,10 cm^3
FI	IPE 360	viga	16.270 cm^4	3 m	54,23 cm^3

Tabla 2 Coeficientes de rigidez

Los factores de distribución η_1 y η_2 se obtienen de las relaciones:

Anexo E E.2(5)

$$\eta_1 = \frac{K_c}{K_c + K_{11} + K_{12}}$$

$$\eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}}$$

siendo K_c el coeficiente de rigidez del pilar en cuestión, y K_1 y K_2 los coeficientes de rigidez de la longitud de los pilares contiguos, y K_{ij} es los coeficientes de rigidez efectiva de las vigas, incluso el de todas las que están unidas al nudo que se estudia.

Las vigas no están sometidas a esfuerzos axiales. Están fijas en ambos extremos y su deformación es en doble curva (Figura 2). Así, su coeficiente de rigidez efectiva K_{ij} debe cambiarse a: $K_{ij} = 1{,}5\ K_{ij}´$.

Anexo E Tabla E.1

El resultado del cálculo de η_1 y η_2 viene en la Tabla 3.

Referencia en Eurocódigo 3

Longitudes de pandeo

A partir de η_1 y η_2, la Figura E.2.2 del Eurocódigo 3 permite obtener la relación l/L. Los resultados aparecen en la Tabla 4.

Elemento (Nudo)	K_c	K_1 K_2	K_{11} K_{21}	K_{12} K_{22}	η_1 η_2
AB (B)	55,40 cm^3	57,32 cm^3		103,3 cm^3	0,52
AB (A)					1,00
BC (C)	57,32 cm^3			72,30 cm^3	0,44
BC (B)	57,32 cm^3	55,40 cm^3		103,3 cm^3	0,52
DE (E)	36,52 cm^3	45,65 cm^3	103,3 cm^3	115,6 cm^3	0,27
DE (D)					0,00
EF (F)	45,65 cm^3		72,30 cm^3	81,34 cm^3	0,23
EF (E)	45,65 cm^3	36,52 cm^3	103,3 cm^3	115,6 cm^3	0,27
GH (H)	36,52 cm^3	45,65 cm^3	115,6 cm^3		0,42
GH (G)					0,00
HI (I)	45,65 cm^3		81,34 cm^3		0,36
HI (H)	45,65 cm^3	36,52 cm^3	115,6 cm^3		0,42

Tabla 3 Coeficientes de rigidez

También se puede calcular mediante las relaciones siguientes:

Anexo E E.2(12)(b)

$$\frac{l}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2\,(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\,\eta_1\,\eta_2}{1 - 0,8\,(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\,\eta_1\,\eta_2}}$$

Los resultados del cálculo de l/L vienen también en la Tabla 4.

Elemento	η_1	η_2	l /L (E.2.2)	l /L (calculado)	l
AB	0,52	1,00	2,50	2,57	12,9 m
BC	0,44	0,52	1,42	1,45	5,80 m
DE	0,27	0,00	1,09	1,10	5,50 m
EF	0,23	0,27	1,16	1,18	4,72 m
GH	0,42	0,00	1,17	1,17	5,85 m
HI	0,36	0,42	1,30	1,33	5,32 m

Tabla 4 Coeficientes de rigidez y longitudes de pandeo

Referencia en Eurocódigo 3

PROBLEMA 9.7(iii) CÁLCULO DE LONGITUDES EFECTIVAS EN EL PLANO Y FUERA DEL PLANO

Problema

Averiguar la longitud efectiva de los pilares de una estructura en la que se puede producir el pandeo dentro o fuera del plano de la misma.

La estructura aparece en la Figura3. El pórtico tiene flecha horizontal en su plano y se supone arriostrado en el plano perpendicular.

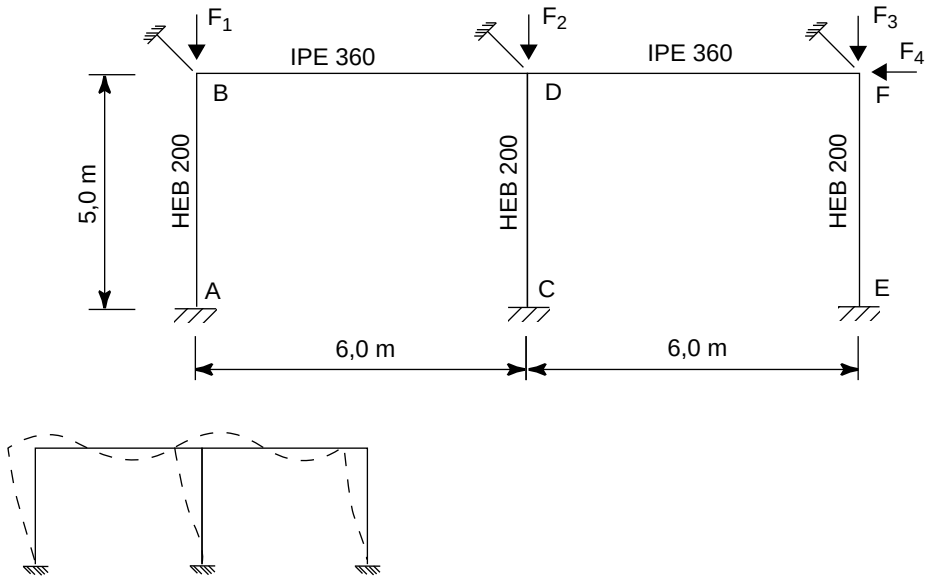


Figura 3 Pórtico

Factores de distribución

Las características geométricas y los valores de los coeficientes de rigidez K_y' y K_z' vienen en la Tabla 5.

Referencia en Eurocódigo 3

Elemento	L	Iy	Iz	$K'_y = \frac{I_y}{L}$	$K'_z = \frac{I_z}{L}$
AB, CD, EF HEB 200	5 m	5696 cm^4	2003 cm^4	11,39 cm^3	4,006 cm^3
BD, DF IPE 360	6 m	16270 cm^4	1043 cm^4	27,12 cm^3	1,738 cm^3

Tabla 5 coeficientes de rigidez

Para obtener los coeficientes de rigidez efectiva de las vigas en el plano, es de nuevo necesario multiplicar los valores por 1,5 (doble curvatura). η_1 y η_2 salen de las siguientes relaciones:

Anexo E Tabla E.1

$$\eta_{1AB} = \eta_{1EF} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + 1,5 \times K'_{BD}}$$

Anexo E E.2(5)

$$\eta_{1CD} = \frac{K_{CD}}{K_{CD} + 1,5 \times K'_{BD} + 1,5 \times K'_{DF}}$$

Longitudes de pandeo

Las longitudes de pandeo l_y en el plano del pórtico de la Figura E.2.2 vienen en la Tabla 6. Cuando η_2 = 0, los valores de l/L se calculan mediante la relación:

Anexo E Fig. E.2.2

Anexo E E.2(12)(b)

$$\frac{l}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2\,\eta_1}{1 - 0,8\,\eta_1}}$$

Referencia en Eurocódigo 3

Elemento (eje)	η_1	η_2	l_y /L	l_y
AB (y)	0,22	0,0	1,08	5,4 m
CD (y)	0,12	0,0	1,04	5,2 m
EF (y)	0,22	0,0	1,08	5,4 m

Tabla 6 Coeficientes de rigidez

En el plano perpendicular, el capitel del pilar es articulado ($\eta_2 = 0$) y la base es fija ($\eta_1 = 1$).

Anexo E
E2(12)(a)

En este caso l_z /L = 0,5 + 0,14 × 1 + 0,055 × 1^2 = 0,695

and l_z = 3,475 m

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.8.1: Vigas arriostradas I

OBJETIVO

Derivar y explicar los procedimientos para calcular la flexión, el esfuerzo cortante y la deflexión de vigas arriostradas compactas, según los principios del Eurocódigo 3.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría elástica de la flexión no axial

Teoría de la torsión simple

Lecciones 9.2: Clasificación de secciones

LECCIONES RELACIONADAS

Lección 9.8.2:	Vigas arriostradas II
Lecciones 9.9.1 y 9.9.2:	Vigas no arriostradas

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.8:	Vigas arriostradas lateralmente

RESUMEN

Esta lección se reduce a las vigas cuyo cálculo se basa en simples consideraciones de resistencia de materiales. Trata del comportamiento en flexión simple que lleva al concepto del módulo de la sección como base del cálculo de la resistencia. Se mencionan también las consideraciones subsidiarias de resistencia al cizallamiento, resistencia a cargas locales y la rigidez adecuada contra la deflexión. Se introduce el comportamiento bajo cargas complejas que produce flexión por ambos ejes principales o flexión y torsión combinadas.

NOTACIÓN ADICIONAL

A	área
Av	área de cizallamiento
d	canto de la sección
F	carga aplicada
f_d	limitación de tensión del material
f_y	resistencia a la fluencia del material
f_{yd}	resistencia de cálculo del material
I	momento de inercia
M	momento
M_{pl}	momento plástico
t	espesor
t_f	espesor del ala
t_w	espesor del alma
V_s	cizallamiento causado por la carga aplicada
W	módulo elástico de la sección
W_{max}	valor máximo de W
W_{min}	valor mínimo de W
W_{pl}	módulo plástico de la sección
α,β	coeficientes, ver ecuación (7)
σ	tensión normal

1. INTRODUCCIÓN

Quizá el elemento estructural más básico sea la viga, que salva un vano entre dos apoyos y transmite las cargas actuando principalmente por flexión. Las vigas de acero, que vienen en gran variedad de tipos y formas, a menudo se pueden calcular con poco más que la simple teoría de la flexión. Aunque surgirán situaciones en las que la reacción de la viga a la carga impuesta sea más compleja y deberán considerarse otras formas de conducta. El fin principal de esta lección es centrarse en aquellas vigas de acero en las que la resistencia del material forma la base del método de cálculo. Estas vigas se denominan “arriostradas compactas”; para que una viga entre en esta categoría no debe ser susceptible de inestabilidad local (ver vigas de clase 4 en la Lección 9.2) ni de inestabilidad lateral por torsión (ver vigas sin arriostrar en las Lecciones 9.9.1 y 9.9.2). Otra limitación es que se supone que las vigas son estáticamente determinadas, o si son estáticamente indeterminadas, que se haya hallado el reparto de los momentos de flexión internos sobre una base elástica lineal simple.

La primera condición se cumple si la anchura de los elementos de chapa que forman la sección es limitada respecto al espesor. Las secciones cuyas relaciones de anchura/espesor del ala, canto/espesor del alma, etc., se han limitado de modo que puedan alcanzar la capacidad total del momento plástico, corresponden bien a la clase 1 o a la clase 2, según el Eurocódigo 3. La mayoría de los perfiles laminados, p.ej.: los UB e IPE cumplen estas exigencias. No obstante, se necesita cuidado con las secciones formadas con perfiles, para las que los códigos de práctica proveen las reglas oportunas. En esta lección se presume que la sección de la viga corresponde en el peor de los casos a las clase 2 ó 3, y que, si cumple los límites de la clase 1, el análisis global de la estructura se llevará a cabo mediante métodos elásticos.

La inestabilidad lateral por torsión no se produce si se da alguna de las condiciones siguientes:

- que la sección se flexione por el eje menor.
- que haya empotramiento lateral, p.ej.: por fijación positiva del ala superior de una viga con apoyo simple a una placa de hormigón.
- que haya arriostramiento discreto muy junto, de modo que la esbeltez del eje débil (L/i_z) de la viga sea pequeña.
- que haya empotramiento torsional adecuado del ala en compresión, p.ej.: por perfilado con chapa
- que la sección tenga mucha resistencia a la torsión y a la flexión lateral; por ej.: no es probable que se agote de este modo una sección de cajón rectangular.

En el caso especial de vigas continuas que sostengan una cubierta o un forjado se cuidará de darles estabilidad en las zonas donde el ala inferior esté en compresión, p.ej.: la zona de apoyo en carga por gravedad, la zona central del vano expuesta a la carga eólica ascendente, etc. A los fines de esta lección, las vigas que estén en una de estas categorías se clasifican como “empotradas” o “arriostradas”.

2. TIPOS DE VIGA

En el proyectista influyen varios factores cuando elige una viga para un fin determinado, y algunos de estos factores tienden a chocar entre sí. Está claro que la viga ha de poseer una resistencia adecuada, pero tampoco debe hacer mucha flecha. También debe poder unirse a otras partes de la estructura, a menudo hay que unirlas en la obra y las uniones deben ser fáciles y rápidas de hacer, necesitando un mínimo de personal cualificado y equipos especiales. Ciertos aspectos, como el paso de servicios bajo el forjado, obligan a elegir una sección con huecos en el alma, mientras que la arquitectura podría requerir variar el perfil para mejorar la línea. La Tabla 1, que resume los tipos principales de viga de acero, indica las luces para las que cada tipo es más apropiado y da alguna idea de las características especiales que tengan.

Tipo de viga	Vanos (m)	Notas
0. Angulares	3 - 6	para correas de cubierta, largueros de cerramiento, etc., que sólo soportan cargas ligeras.
1. Perfiles conformados en frío	4 - 8	para correas de cubierta, largueros de cerramiento, etc, que sólo soportan cargas ligeras.
2. Perfiles laminados UB, IPE, UPN, HE	1 - 30	el tipo de sección más frecuente; se eligen las proporciones para eliminar varios tipos posibles de agotamiento.
3. Viguetas de alma abierta	4 - 40	prefabricadas con angulares o tubos para cordones y barras redondas para el alma de celosía, en lugar de perfiles laminados.
4. Vigas alveoladas	6 - 60	para vanos largos y/o cargas ligeras: el canto de UB se aumenta 50%, puede haber orificios en el alma para pasar conducciones, etc.
5. Secciones compuestas, p.ej.: IPE+UPN	5 - 15	cuando un solo perfil laminado no ofrece bastante capacidad; a menudo se disponen para aumentar también la resistencia horizontal a la flexión.
6. Vigas armadas	10 - 100	se hacen soldando 3 chapas, a veces automáticamente; el canto del alma puede llegar a 3-4 m si hace falta para darle rigidez.
7. Vigas de cajón	15 - 200	fabricadas con chapa, generalmente rigidizadas; se ponen en grúas OHT y puentes por sus buenas propiedades de rigidez a la torsión y transversal.

TABLA 1

3. CÁLCULO DE LA FLEXIÓN SIMPLE DE VIGAS

Una sección de doble simetría o una simetría que se flexione por el eje de simetría, la teoría básica de la flexión, en el supuesto de comportamiento elástico, da el reparto de tensiones flectoras que muestra la Figura 1, puesto que la tensión máxima σ_{max} viene dada por:

$$\sigma_{max} = M \frac{d/2}{I} \qquad (1)$$

siendo M el momento en la sección que se considera.

d el canto total de la sección.

I el segundo momento del área que rodea el eje neutro (línea de tensión cero).

se sigue que limitando esto a una fracción de la tensión de fluencia del material, resulta una condición de cálculo de esta forma:

$$W \geq M/f_d \qquad (2)$$

siendo $W = \frac{I}{d/2}$

f_d la tensión de flexión normal limitante.

Cuando se toma M como el momento producido por las cargas de trabajo, el método de cálculo se denomina “elástico” o de “tensión permisible”, que es el que se proponía tradicionalmente en muchos códigos de práctica. En los códigos de estados límite más modernos, se toma f_d para la resistencia del material f_y, posiblemente dividido entre un factor adecuado al material γ_M y M se toma como el momento debido a las cargas factorizadas, o sea, las cargas de trabajo debidamente aumentadas para incluir un margen de seguridad en el cálculo. La ecuación (2) representa en este caso la condición de primera fluencia. Los valores de W para la gama de perfiles normalizados viene en las tablas de propiedades de las secciones.

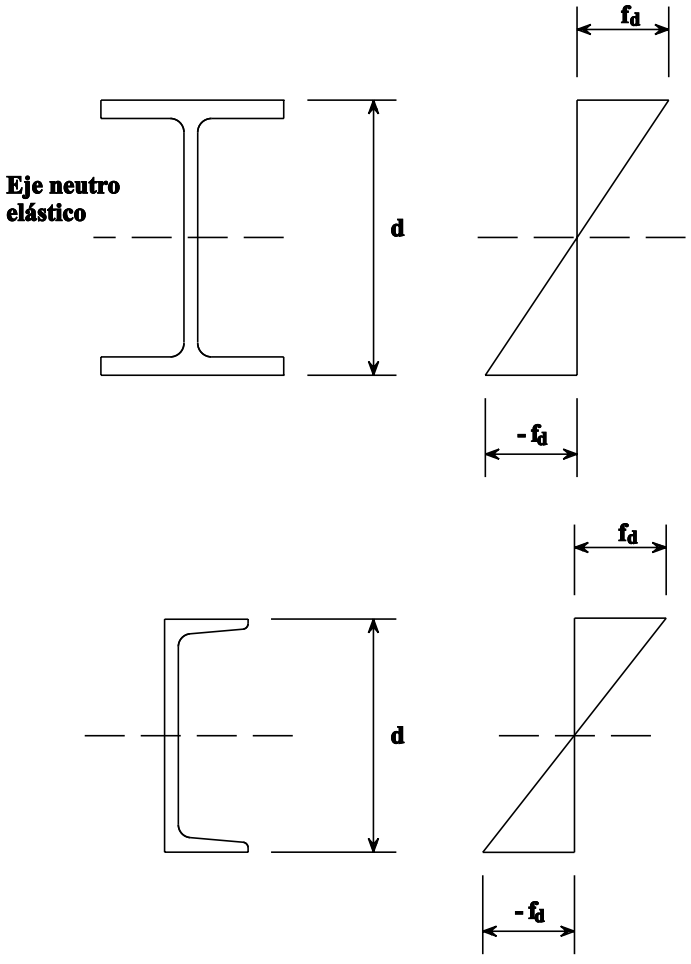


Figura 1 Distribución de la tensión longitudinal de flexión alrededor del eje de simetría de acuerdo a la teoría elástica

Por lo tanto, la elección de la viga idónea se reduce a:

1. determinar el momento máximo de la viga,
2. extraer el valor correspondiente de f_d del código aplicable,
3. elegir una sección con el valor de W adecuado, considerando el peso mínimo, canto de la sección, racionalización de las dimensiones en toda la estructura, etc.

Está claro que las secciones donde la mayoría del material está situado lo más lejos posible del eje neutro tienden a ser las más eficaces en cuanto a la flexión elástica. La Figura 2 da cierta idea cuantitativa respecto a las formas estructurales más comunes. Las secciones en I son las que se eligen para vigas con más frecuencia por su eficacia estructural; por ser abiertas, también se pueden unir a otras partes de la estructura sin mayor dificultad. La figura 3 presenta varios ejemplos tipo de uniones viga-pilar.

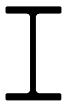
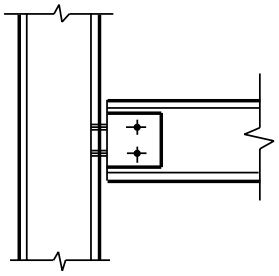
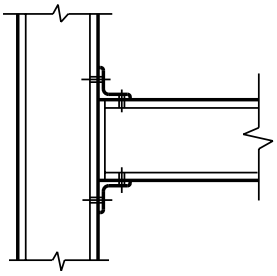
Tipo de sección	Rectangular	HE o UC (Típicas)	IPE o UB (Típicas)	Tubo rect. (Típico)
Propied. de sección				
A: área	1	1	1	1
W_y : Módulo elástico sección	1	3,5	6,2	2,3
W_{ply}: Módulo plástico sección	1,5	3,9	7,2	2,9

Figura 2 Propiedades de sección referidas a flexión de diferentes perfiles

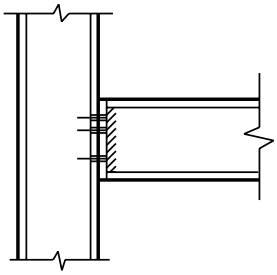
La utilización de la zona plástica de las curvas de tensión-deformación del acero genera momentos superiores a lo que sólo provocan la fluencia. A plasticidad total, el reparto de la tensión flectora en una sección de simetría doble es como lo ilustra la Figura 4, la mitad de la sección en fluencia por compresión y la otra mitad en fluencia por tracción. El momento correspondiente se llama momento totalmente plástico, M_{pl}. Puede calcularse tomando los momentos del diagrama de tensión por el eje neutro que dan:



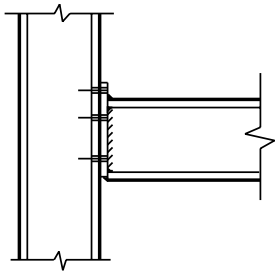
(a) Ejiones de alma



(b) Ejiones de ala



(c) Placa de testa



(d) Placa de testa ampliada

Figura 3 Ejemplos de unión viga-columna

$$M_{pl} = f_y W_{pl} \qquad (3)$$

siendo:

f_y la tensión de fluencia del material (se supone idéntica en tracción y en compresión).

W_{pl} el módulo plástico de la sección.

La solución básica de la ecuación 3 significa que ahora se aprovecha toda la resistencia de la sección en flexión, dando la condición de cálculo:

$$W_{pl} \geq M/f_{yd} \qquad (4)$$

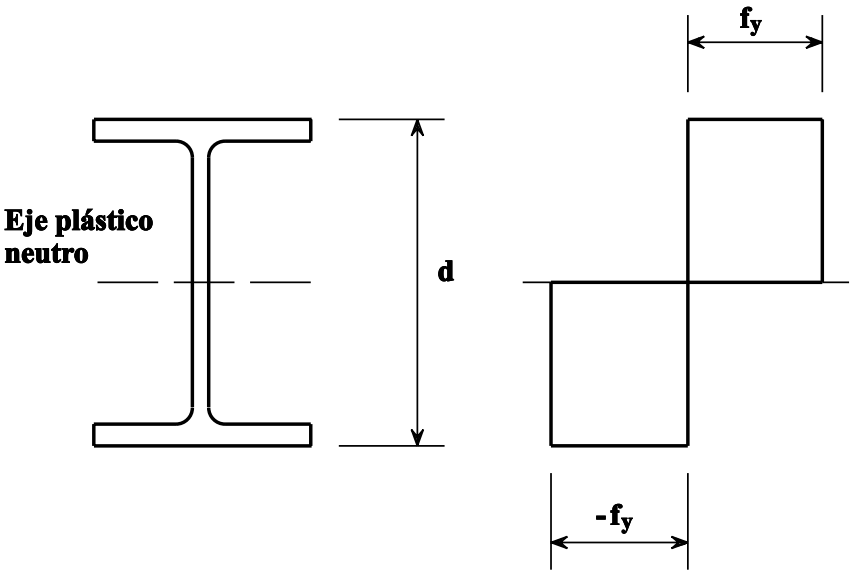


Figura 4 Distribución plástica de tensiones en sección con doble eje de simetría

siendo M el momento en la sección que se considera.

f_{yd} la resistencia de cálculo (la resistencia a la fluencia del material dividida por el debido factor de material).

Cuando M es resultado de las cargas factorizadas, la ecuación (4) representa la condición de cálculo de la resistencia a la flexión a la rotura que el Eurocódigo 3 aplica a las secciones que cumplen al menos los límites de la clase 2. Es usual que los códigos, como el Eurocódigo 3, tomen el valor f_{yd} por la resistencia a la fluencia del material, algo reducido en previsión de las posibles variaciones respecto al valor deseado.

En las estructuras continuas (indeterminadas estáticamente), llegar a M_{pl} en el punto de momento máximo no supone normalmente la ruina. Siempre que nada provoque la descarga en dicho punto, p.ej.: que no se produzca un pandeo local, la rigidez local al giro desparece prácticamente, o sea, la sección se comporta como una rótula y el esquema de momentos dentro de la estructura se altera desde el reparto elástico inicial a formas de rótula plástica sucesivas. Esta redistribución de momentos permite a la estructura resistir cargas mayores que la que origina la primera rótula plástica, hasta que finalmente ocurre el colapso cuando se formen bastantes rótulas para convertir la estructura en un mecanismo, como se ve en la

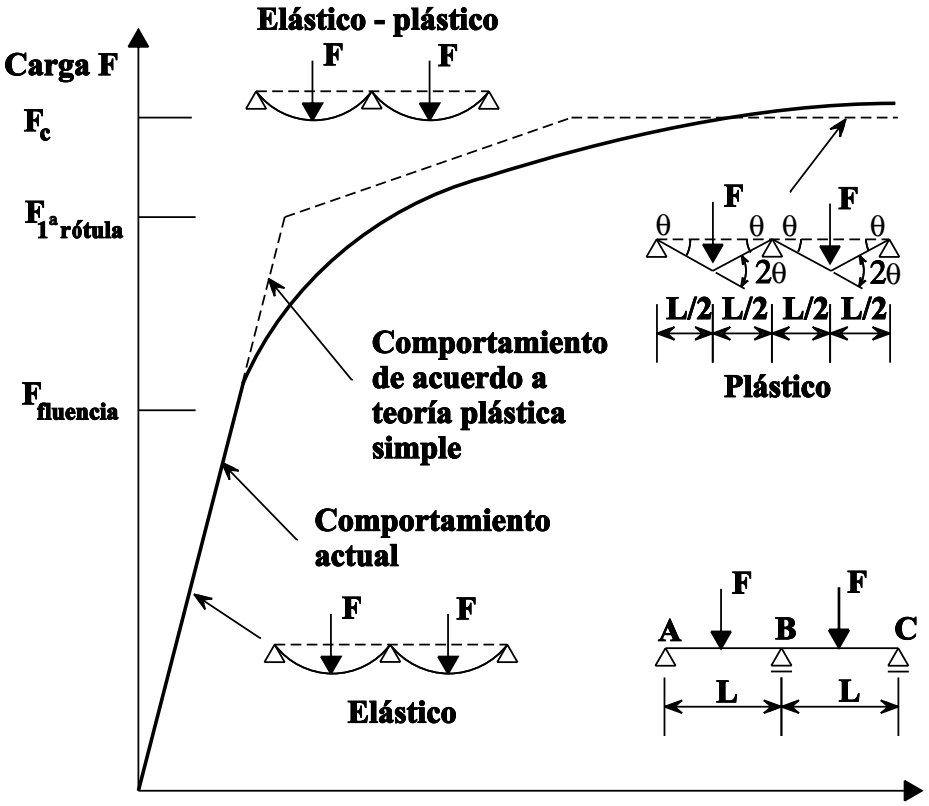


Figura 5 Curva de flechas bajo carga para viga de acero estáticamente indeterminada

Figura 5. Valerse de esta propiedad redistributiva se denomina “cálculo plástico”. Sólo sirve para estructuras continuas y sólo observando ciertas restricciones en cuanto a la geometría de la sección, esbeltez de los elementos, etc. Este tema se trata con detalle en la Lección 9.8.2 con referencia a vigas y en la Lección 9.11 en cuanto a pórticos.

4. CÁLCULO DEL CIZALLAMIENTO DE VIGAS

Aunque la flexión rige el cálculo de casi todas las vigas de acero, surgirán situaciones en las que haya esfuerzos cortantes tan altos que sean el factor dominante, p. ej.: vigas cortas con cargas fuertes concentradas.

La Figura 6 muestra el esquema de esfuerzos cortantes que existe en una sección rectangular y una sección I, suponiendo comportamiento elástico. En ambos casos el esfuerzo cortante varía con el canto, ocurriendo el valor máximo en el eje neutro. En cambio, en la sección I, la diferencia entre el valor máximo y mínimo en el alma, que soporta prácticamente todo

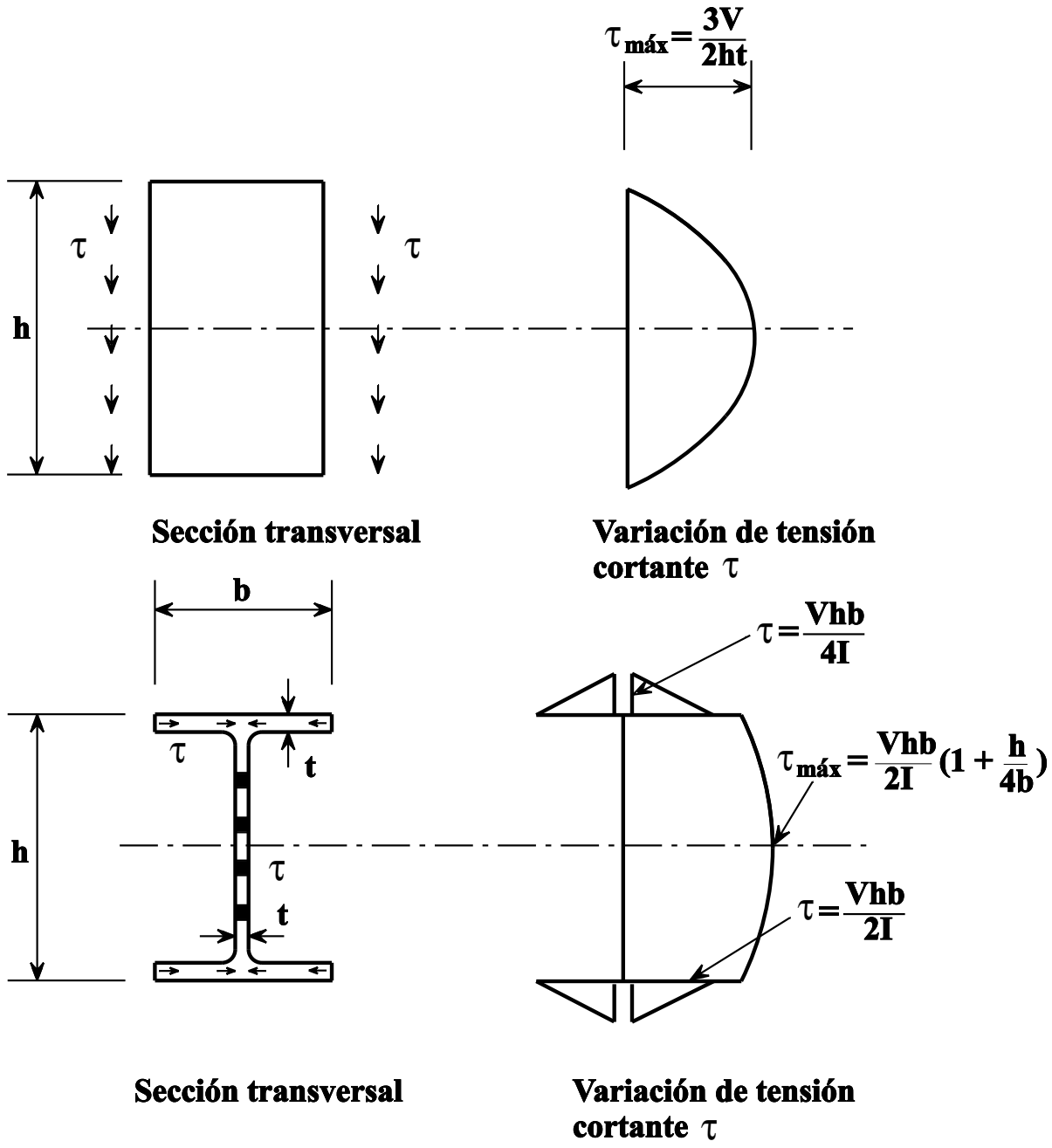


Figura 6 Distribución de tensión cortante en vigas producida por esfuerzo cortante V

el esfuerzo cortante vertical, es tan pequeña que se puede simplificar el cálculo trabajando con tensiones cortantes promediadas, o sea, fuerza cortante total/área del alma. Dado que la resistencia al cizallamiento por fluencia del acero es aproximadamente $1/\sqrt{3}$ de su tensión de fluencia en tracción, un valor apropiado del esfuerzo cortante "permisible" en el cálculo elástico es $1/\sqrt{3}$ de la tensión en tracción permisible.

La resistencia al cizallamiento a la rotura (basada en principios plásticos) del Eurocódigo 3, es $f_{yd}/\sqrt{3}$, y lo aplica conjuntamente con un área de cizallamiento A_v, de lo que son ejemplos:

sección I, carga paralela al alma:

$A_v = A-2bt_f + (t_w+2r)t_f$

chapas y perfiles macizos: $A_v = A$

secciones tubulares redondas:

$A_v = 2A/\pi$

En los casos en que coexisten cizallamiento y momento altos, como en el apoyo interno de una viga continua, a veces podría ser necesario permitir que los efectos actúen recíprocamente. Pero como puede desarrollarse la capacidad cortante total en presencia de momentos bastante grandes, y viceversa, a menudo no hace falta hacerlo (el Eurocódigo 3 sólo exige reducir la capacidad de momento cuando el esfuerzo cortante aplicado pasa del 50% de la capacidad cortante a la rotura).

5. DEFLEXIONES

Aunque la deflexión excesiva no suele ocasionar la ruina de una estructura, puede sin embargo disminuir su eficacia.

Por ejemplo, la deflexión puede ocasionar:

- agrietamiento de techos de escayola.
- desalineación de los carriles de grúas.
- dificultad de abrir puertas grandes.

Como esto afecta al rendimiento de la estructura en condiciones de trabajo, se suele realizar este tipo de comprobación al nivel de cargas de servicio. El Eurocódigo 3 sugiere un límite máximo de flecha de luz/300 en vigas que sostengan un forjado con sobrecargas de servicio. Pero este límite debe considerarse nada más aconsejable, pues el valor puede ser mayor o menor en una situación dada. Cuando sea posible, debe buscarse el asesoramiento de un especialista; por ejemplo, un fabricante de grúas puede dar orientaciones precisas sobre las deflexiones permisibles en las vigas de una grúa puente.

6. FLEXIÓN DE SECCIONES ASIMÉTRICAS

La Figura 7 muestra el reparto elástico de tensiones flectoras de secciones con un solo eje de simetría que se flexionan por el eje perpendicular. Debido a esta asimetría en el eje neutro, no es igual la tensión en el ala superior e inferior; por ejemplo, en una viga en I con alas desiguales, la tensión en el ala menor supera a la del ala mayor. Por tanto, en el cálculo elástico es necesario tomar el menor de los dos módulos elásticos de la sección, W_{min}.

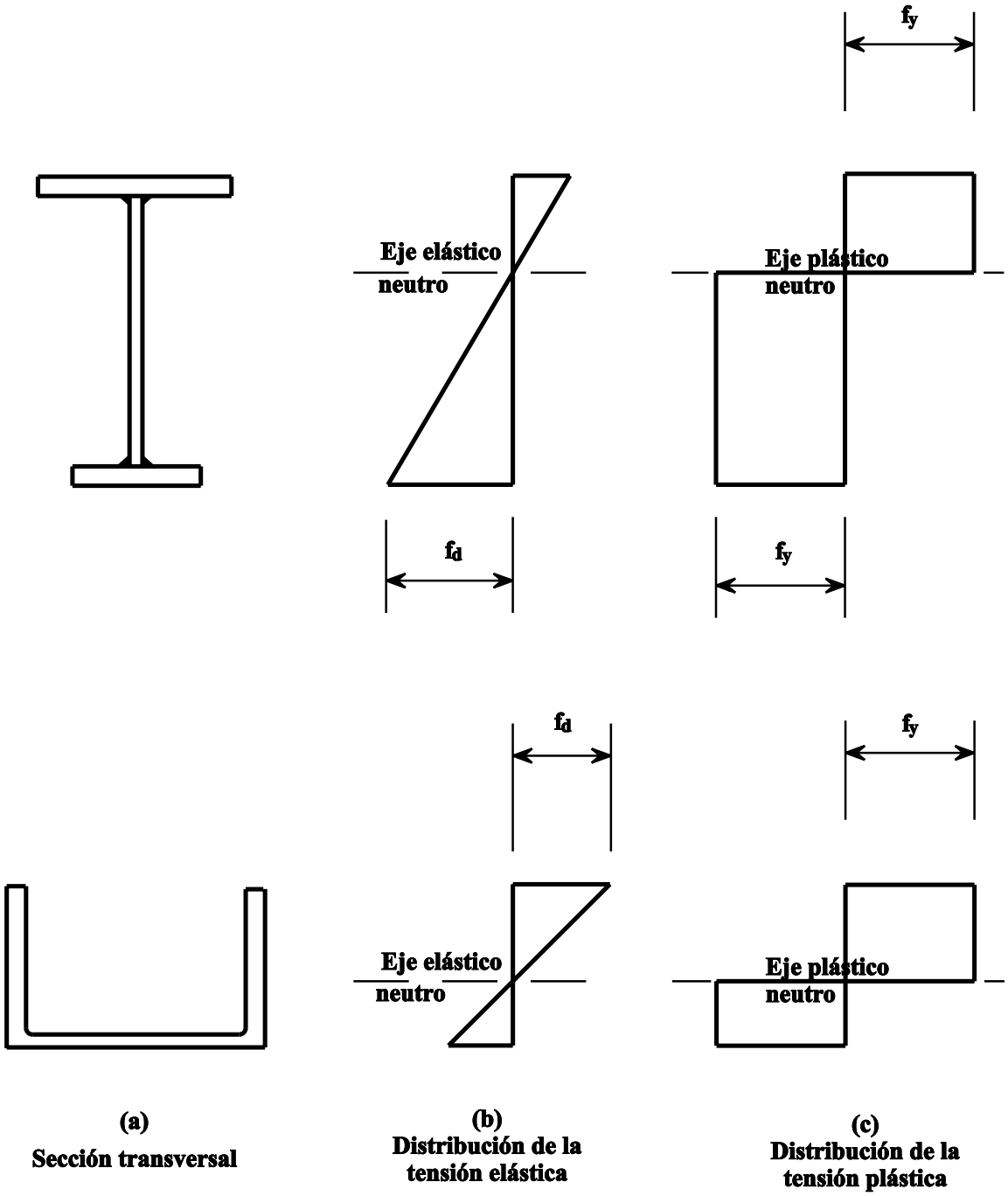


Figura 7 Flexión de secciones de simple simetría en el plano de simetría

A plasticidad total, debe situarse la línea de tensión cero de modo que divida el área de la sección en dos partes iguales, como se ve en la Figura 7c. Puesto que el módulo plástico de la sección W_{pl} se define en la ecuación (3) como la relación M_{pl}/f_y, habrá un solo valor para ambas caras de la sección. Así, cuando se tome la capacidad de momento a la rotura, la condición de cálculo seguirá siendo la de la ecuación (4).

7. FLEXIÓN BIAXIAL

Las secciones bi y monosimétricas sometidas a momentos de flexión M_y y M_z en ambos ejes principales, pueden tratarse como la suma de dos problemas monoaxiales. Así, en cálculo elástico, debe satisfacerse la ecuación lineal de acción recíproca:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq f_d \qquad (6)$$

siendo W_y y W_z los módulos elásticos de la sección respecto a los ejes y y z, y

f_d la tensión de flexión normal limitante.

Esto se apoya en la idea de limitar al valor de cálculo la máxima tensión combinada. Ha de tenerse cuidado cuando se trata con secciones de tipo angular, cuyos ejes principales no están a escuadra.

Respecto a la resistencia plástica de la sección (que supone ubicar el eje plástico neutro), el análisis demuestra que la forma de la acción recíproca de los momentos depende de la geometría de la sección. Por ello el Eurocódigo 3 contiene aproximaciones con margen de seguridad a estos diagramas de acción recíproca que adoptan esta forma:

$$\left(\frac{M_y}{W_{ply}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{M_z}{Wpl_z}\right)^{\beta} \leq 1 \qquad (7)$$

siendo M_{ply} M_{plz} la capacidad de momento en los ejes y y z respectivamente y los valores de α y β dependen de la sección en particular que se estudie; los valores de seguridad son $\alpha = \beta = 1{,}0$.

8. FLEXIÓN Y TORSIÓN

Las cargas que no actúan sobre el centro de esfuerzos cortantes de la sección (ver Figura 8), también causan torsión (el centro cortante coincide con el centroide de las secciones bisimétricas y cae en el eje de simetría de las secciones monosimétricas). Esto induce esfuerzos cortantes debidos a la torsión, y en el caso de secciones abiertas, también puede producir tensiones adicionales longitudinales de importancia debido al efecto estructural llamado alabeo. Para considerar este tema como es debido hace falta entender la teoría de la torsión que se escapa de la materia de esta lección. En muchos casos se puede reducir el efecto de la torsión proyectando los detalles con cuidado de modo que las cargas se transmitan a los elementos de manera que se evite el alabeo.

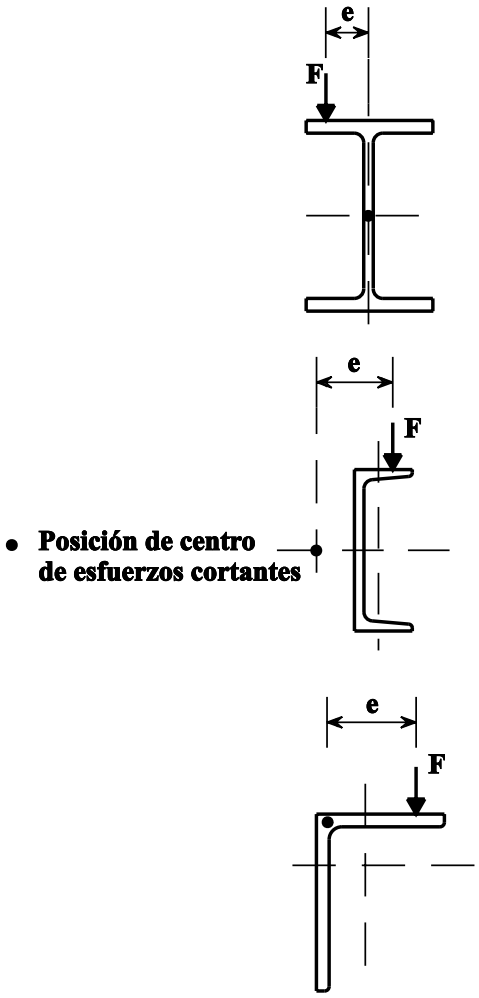


Figura 8 Ejemplos de vigas sometidas a flexión y torsión compuesta. Momento torsor = Fe en todos los casos

9. RESUMEN FINAL

1. La mayor exigencia en el proyecto y cálculo de vigas es que tengan suficiente resistencia a la flexión. Se indican los tipos de perfil que normalmente se utilizan para lograrlo. Se presentan medios para reconocer las vigas que se pueden calcular mediante principios estructurales relativamente sencillos.
2. El módulo de la sección, ya sea elástico o plástico, según la filosofía de cálculo que se adopte, es la propiedad que rige la elección de la sección adecuada.
3. En el cálculo simple de vigas debe verificarse también la capacidad de cizallamiento y la deflexión.
4. Se han comentado las situaciones en las que ocurre una reacción estructural más compleja que obligan a considerar la flexión biaxial, la torsión, etc.

10. BIBLIOGRAFÍA

1. Dowling, P.J., Owens, G.W. y Knowles, P., “Structural Steel Design”, Butterworths, 1988.

2. Petersen C., “Stahlbauten”, Vieweg Verlog Braunshweig, 1988.

3. Galambos, T.V., “Structural Members and Frames”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.

4. Narayanan, R., “Beams and Beam Columns - Stability and Strength”, Applied Science, Londres, 1983.

5. Salmon, C. G. y Johnson, J. E., “Steel Structures - Design and Behaviour”, Harper and Row, Nueva York, 1980.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.8.2: Vigas arriostradas II

OBJETIVO/CONTENIDO

Presentar y explicar los procedimientos para calcular vigas arriostradas, incluso el estudio de la redistribución de momentos de las secciones clase 1.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría elástica de la flexión mono y biaxial, combinada con esfuerzos cortantes.

Conocimientos básicos de la propiedades mecánicas del acero (parte de la Lección 3.3).

LECCIONES AFINES

Lección 9.2: Clasificación de secciones

Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Vigas-Columna

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.8: Vigas arriostradas lateralmente

RESUMEN

Se explica el mecanismo por el que se redistribuye el esfuerzo flector en una viga de acero después de alcanzar la primera fluencia. Se introduce la idea de que las vigas determinadas estáticamente se agotan al desarrollarse la plasticidad total en una sección, lo que conduce a los conceptos de módulo plástico de la sección y del factor de forma. Se demuestra que las vigas indeterminadas estáticamente pueden desarrollar varias de dichas regiones, llamadas rótulas plásticas, antes de formar un mecanismo y arruinarse. Se trata de la influencia de los esfuerzos cortantes desde el punto de vista del cálculo y el comportamiento de flexión por los dos ejes principales se estudia brevemente.

NOTACIÓN ADICIONAL

b	anchura
ε	deformación
ε_1 y ε_2	deformación de las fibras extremas
d	canto total de la sección
E_{st}	módulo de endurecimiento por deformación
ε_y	deformación por fluencia
ϕ	curvatura
F	carga aplicada
f_d	tensión límite del material
f_{ly}	tensión de fluencia inferior
f_p	límite de proporcionalidad
f_{uy}	tensión de fluencia superior
f_y	resistencia a la fluencia del material
L	vano
M	momento
M_{plr}	resistencia del momento plástico en presencia de una carga axial
M_{plv}	resistencia del momento plástico en presencia de una carga cortante
M_y	momento en la primera fluencia (f_yW)
N_{pl}	carga de aplastamiento (f_yA)
τ_y	tensión de fluencia cortante
s	factor de forma (W_{pl}/W)
f_{max}	tensión máxima en la fibra extrema
t_w	espesor del alma
V_{pw}	resistencia del alma al cizallamiento, en fluencia cortante
V_s	esfuerzo cortante aplicado
W	módulo elástico de la sección
W_{pl}	módulo plástico de la sección
σ	tensión normal
τ	tensión de cizalla (o cortante)

1. INTRODUCCIÓN

Cuando una viga empotrada de tipo “compacta” (ver Lección 9.8.1) se somete a cargas que producen flexión vertical, su reacción tiene varias fases. Primero se comporta elásticamente, con flechas verticales relacionadas linealmente con la carga aplicada. Al aumentar la carga, las regiones más tensadas desarrollan deformaciones que exceden de la fluencia, con el resultado de pérdida local de rigidez. Entonces las deflexiones empiezan a aumentar con cierta velocidad en el conjunto de la viga. Si se sigue cargando, el proceso continúa hasta que una sección llega a la plasticidad completa. En una viga simplemente apoyada, este punto corresponde a la carga máxima que puede portar sin endurecerse por deformación y también es el punto en que las deformaciones se hacen muy grandes. Por otra parte, en las estructuras continuas, se puede seguir aumentando la carga porque se producen momentos de redistribución.

El propósito de esta lección es explicar el concepto de plasticidad en tanto que influye en el cálculo de vigas, mostrando la manera de modificar los procedimientos básicos expuestos en la Lección 9.8.1 para permitir este comportamiento.

2. COMPORTAMIENTO DE LAS VIGAS DE ACERO EN FLEXIÓN

2.1 Vigas determinadas estáticamente

La Figura 1 presenta la relación entre la carga aplicada y la flecha central que resultaría del ensayo de una viga de acero solamente apoyada con proporciones de la clase 2 o mejores. Se pueden observar tres fases distintas:

- OA elástica, relación lineal entre la carga y la flecha.
- AB elastoplástica, las flechas aumentan a velocidad progresiva.

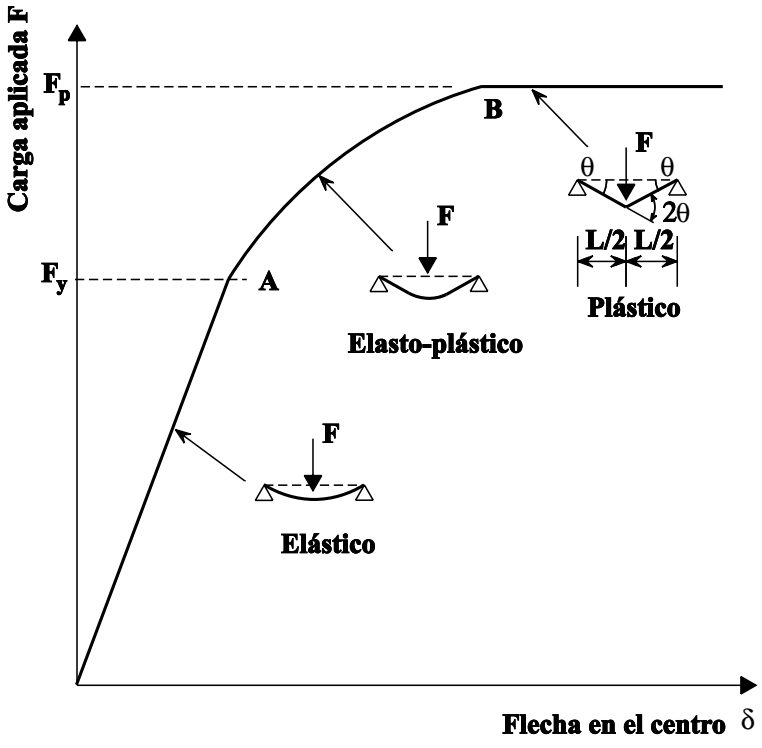


Figura 1 Comportamiento de una viga simplemente apoyada

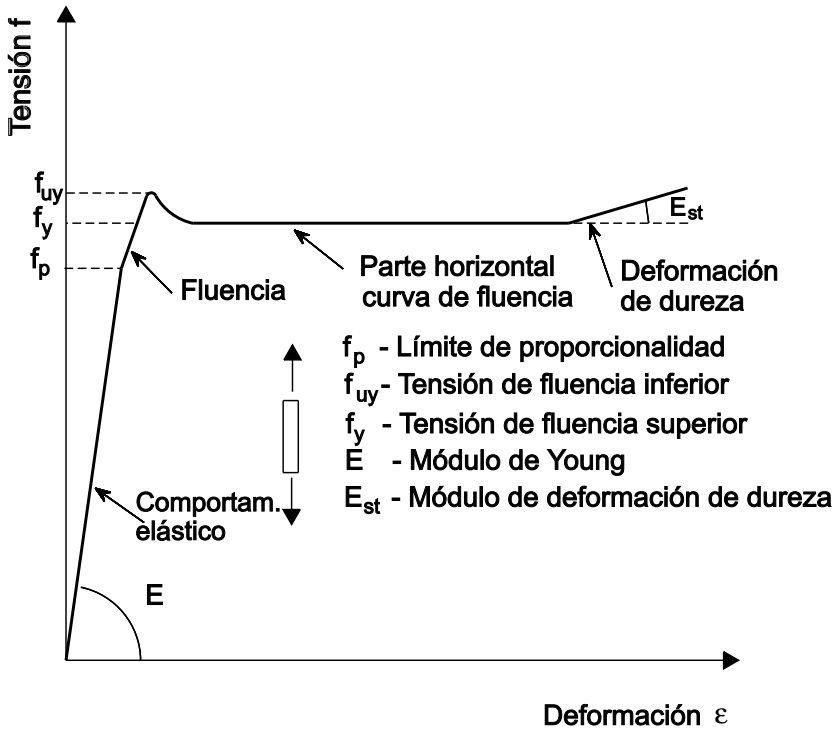


Figura 2 Curva típica de tensión-deformación obtenida de ensayos de tracción en muestra pequeña

- BC plástica, crecimiento de grandes flechas a carga razonablemente constante.

Dado que en las fases 2 y 3 se desarrolla la plasticidad en zonas de gran tensión, para entender totalmente la respuesta de la viga hay que conocer antes el comportamiento del propio material.

La Figura 2 presenta una curva de tensión-deformación del tipo que resultaría del ensayo de una probeta pequeña de acero. En vez de trabajar con ellas directamente, es bastante más sencillo sustituirlas por la respuesta idealizada bilineal de la Figura 3, que comprende un tramo elástico inicial seguido por un tramo horizontal perfectamente plástico. Así se desprecian aspectos tales como el punto de fluencia superior, endurecimiento por deformación, etc., que si se incluyesen sólo tendrían un efecto pequeño en el análisis resultante, a cambio de un aumento de la complejidad.

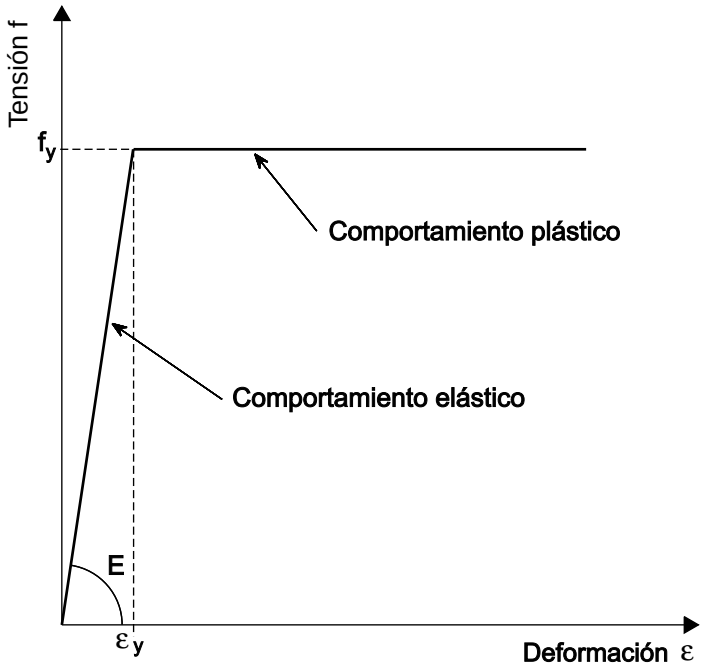


Figura 3 Idealización perfectamente elástico-plástico de curva tensión-deformación del acero

A partir de la Figura 3 se puede derivar la relación entre el momento (M) y la curvatura (ϕ) de una sección, considerando el reparto de tensión y deformación en varias fases, que se muestra en la Figura 4. Siempre que la deformación máxima de la fibra extrema (ε_1) esté por debajo de la tensión de fluencia (ε_y), el correspondiente reparto de tensiones es lineal, como se ven la Figura 4a. Suponiendo una viga de canto d, la curvatura viene dada por:

$$\phi = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{d} \qquad (1)$$

El momento de resistencia correspondiente se puede hallar tomando momentos del diagrama de tensiones por el eje neutro (yy). Suponiendo que la sección es rectangular con anchura b, tenemos:

$$M = \sigma\,(bd^2/6) \qquad (2)$$

siendo ($bd^2/6$) el llamado módulo elástico de la sección (W).

Una vez que ε_1 exceda de ε_y, puesto que σ no puede exceder de f_y, la forma del reparto de tensiones varía como se ve en la Figura 4b, con el resultado de que entonces ϕ cambia más rápidamente, es decir, la relación M-ϕ se hace alineal, como en la Figura 5. ϕ aún puede hallarse por la ecuación 1, en tanto que M se puede calcular como antes por medio de la Figura 4b. A la larga se aproximará a la condición de la Figura 4c (sustituir el reparto real de tensiones por dos bloques de tensión rectangulares es, desde luego, una aproximación que simplifica mucho el cálculo con una pérdida de exactitud despreciable) en la que M viene dada por:

$$M = f_y\,(bd^2/4) \qquad (3)$$

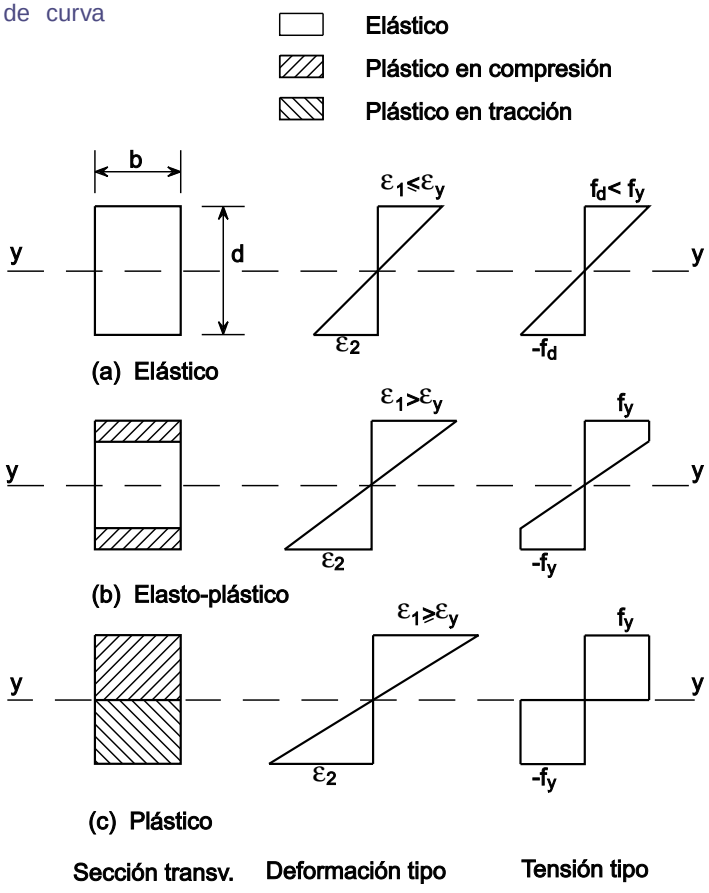


Figura 4 Transición de estado elástico a plástico de una sección transversal en flexión

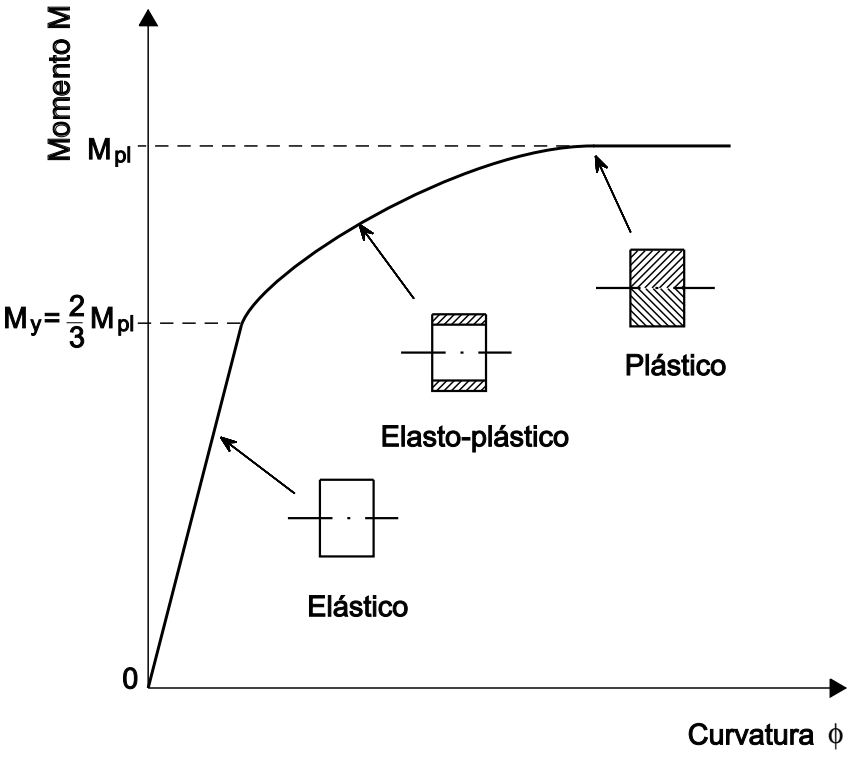


Figura 5 Relación momento-curvatura (M-ϕ) para una sección transversal rectangular en flexión

Esto se llama el momento completamente plástico (M_{pl}) de la sección, que representa el límite superior teórico de resistencia del momento basado en el comportamiento de tensión-deformación de la Figura 3. La cantidad $W_{pl} = bd^2/4$ se denomina módulo plástico de la sección, y la relación W_{pl}/W, que es una medida del momento adicional que se puede soportar más allá de la primera fluencia, es el factor de forma. En una sección rectangular:

$$s = W_{pl}/W = (bd^2/4)/bd^2/6) \qquad (4)$$

Y por tanto $s = 1{,}50$

Los valores de W, W_{pl} y s de varias formas estructurales vienen en la Tabla 1.

Como la inclinación de la curva M-ϕ disminuye efectivamente a cero en M_{pl}, se dice que la sección forma una rótula plástica, pues la rigidez a la flexión en esta zona es cero; o sea, la viga actúa ahora como si contuviera una rótula real, con la diferencia de que el momento en esta rótula sigue siendo M_{pl}. En una viga simplemente apoyada, la formación de una rótula plástica, en vez de llegar a la primera fluencia, proporciona una estimación cercana de su máxima resistencia portante. Un método simple para hallar la carga a que esto ocurre, consiste en tratar los tramos elásticos de la viga como si fueran rígidos e igualar el trabajo realizado por las cargas externas a la energía disipada por la rótula plástica. Por ejemplo, en la Figura 1, esto arroja:

$$\frac{FL}{2}\theta = M_{pl} \cdot 2\theta \qquad (5)$$

$$F = 4M_{pl}/L$$

Este método se vale del concepto de que la estructura se transforma en un mecanismo en el momento de colapso.

2.2 Vigas indeterminadas estáticamente

Si la viga de acero es continua y de clase 1, la formación de la primera rótula plástica en el punto de momento máximo, hallado antes por análisis elástico, no marca el límite de su resistencia portante (ver Figura 6). Más bien significa un cambio del modo en que la viga reacciona a las siguientes cargas. En la viga de dos vanos de la Figura 6, la inserción de una rótula real en el apoyo central (B) hace que cada vano se comporte como si estuviera simplemente apoyado. Así, ambos vanos pueden soportar la carga sin agotarse hasta que esta carga haga que se forma una rótula plástica en el medio del vano. La formación de una rótula plástica en B produce una conducta cualitativamente similar. Así, las estructuras continuas no se agotan mientras no se forme tal número de rótulas plásticas que las

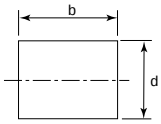
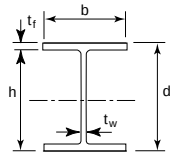
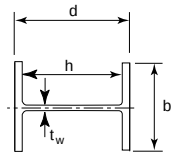
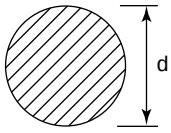
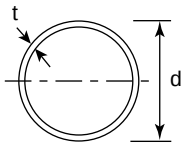
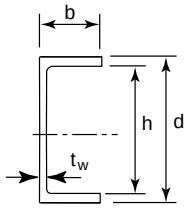
Sección	Módulo elástico de la sección W	Módulo plástico de la sección W_{pl}	Factor de formas
 Rectángulo	$bd^3/6$	$bd^3/4$	1,5
 I: eje mayor	$[bd^3-(b-t_w)h^3]/6d$	$bt_f(d-t_f) + t_w(d-2t_f)^2$	aprox. 1,15
 I: eje menor	$[dd^3-h(b-t_w)^3]/6d$	$b^2t_f/2 + (d-2t_f)t_w^2/4$	aprox. 1,67
 Sec. circular maciza	$\pi d^3/32$	$d^3/6$	1,7
 Sec. circular hueca	$\pi[d^4-(d-2t)^4]/32d$	$d^3\left[1-\left(1-\frac{2t}{d}\right)^3\right]/6$ Si t << d; td^2	para t = d/10; 1,4 para t << d; 1,27
 Sección en U	$[bd^3-(b-t_w)h^3]/bd$	$bt_f(d-t_f)$ $+ t_w(d-2t_f)^2$	aprox. 1,15

Tabla 1 Valores de W, W_{pl} y s para varias formas

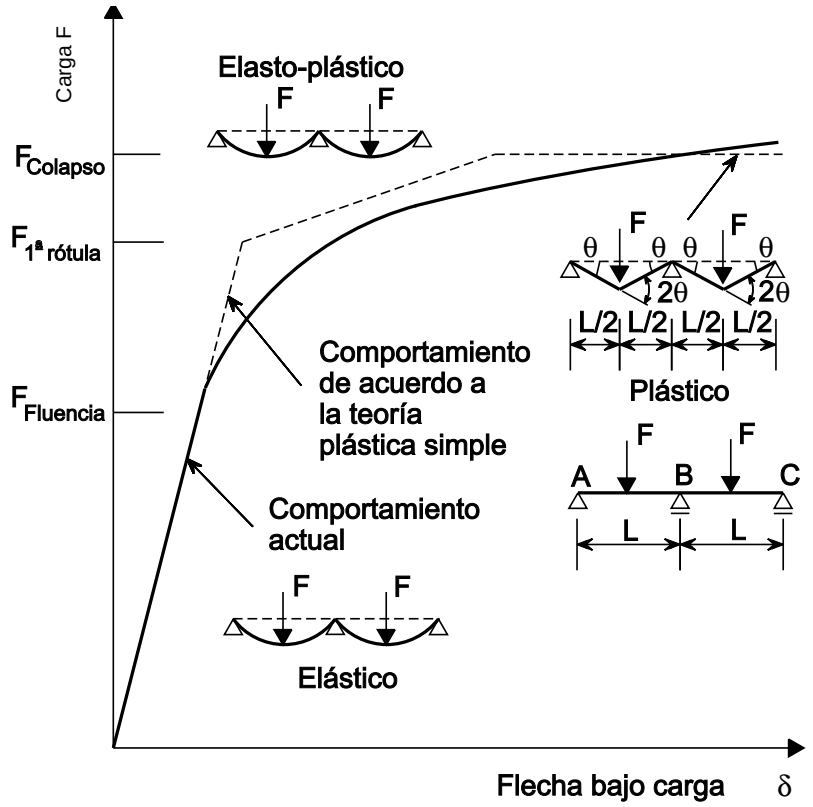


Figura 6 Curva carga-flecha para viga de acero estáticamente indeterminada

convierta en mecanismos. La viga al agotarse tiene el aspecto de la Figura 6; igualando el trabajo exterior y el interior como antes, este mecanismo de agotamiento arroja:

$$2F\frac{L}{2}\theta = M_{pl}(2\theta + 2\theta + 2\theta) \qquad (6)$$

$$F = 6M_{pl}/L$$

La Figura 6 presenta la curva de carga-flecha de esta viga de dos vanos obtenida por análisis elasto-plástico. Cada cambio de inclinación corresponde a la formación de una rótula plástica que producen "debilitamiento" gradual de la estructura. El agotamiento ocurre con la carga aplicada que da la ecuación (6), al haberse formado rótulas suficientes para transformar la viga en un mecanismo sin rigidez inherente, que corresponde al último tramo horizontal de la curva. Cuando se hace este tipo de análisis es normal suponer que las rótulas plásticas se forman de repente, que corresponde a considerar que la sección tiene un factor de forma unitario, $W_{pl} = W$. Comparando la curva de carga-flecha resultante con la obtenida en ensayos reales, más redondeada, se observa que despreciar la extensión de la plasticidad tiene relativamente poco efecto sobre el comportamiento general.

Aunque el análisis elasto-plástico de vigas indeterminadas estáticamente es bastante complejo, es relativamente sencillo hallar la carga de agotamiento de casi todos los tipos de viga continua estudiando el mecanismo de ruina. También es posible aplicar un método similar a las estructuras de pórtico calculadas plásticamente.

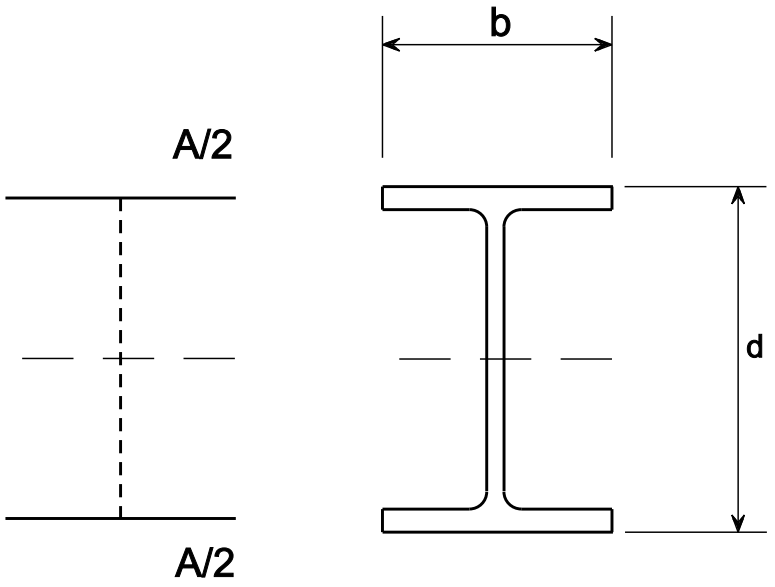


Figura 7 Secciones en I

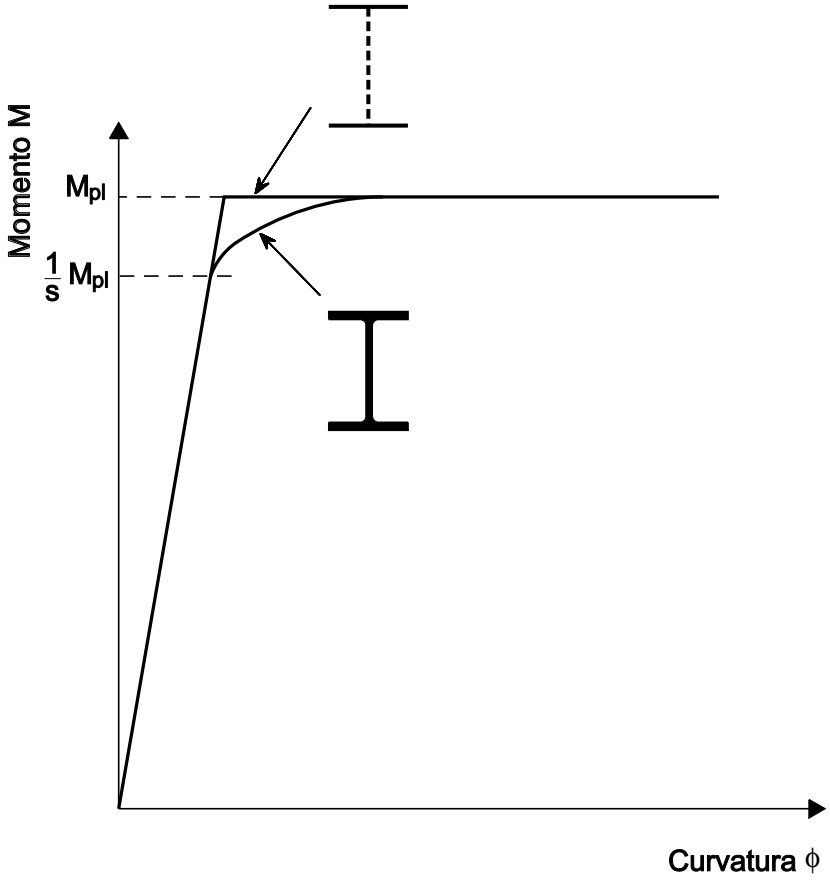


Figura 8 Comportamiento momento-curvatura (M-ϕ) de secciones en I

Debe señalarse que al pasar del estado elástico correspondiente a cargas de hasta $F_{fluencia}$ al estado plástico correspondiente a la carga $F_{colapso}$, la viga de la Figura 6 ha sufrido una redistribución del momento. Así, la forma del diagrama del momento plástico se diferencia de la del diagrama del momento elástico. En este caso, el primero corresponde a M_{pl} en las tres rótulas plásticas, y el último tiene un máximo en el apoyo central.

2.3 Flexión de secciones en I

Al aplicar la curva de tensión-deformación de la Figura 3 a la sección I ideal de la Figura 7a, flexionada por el eje yy, donde la mitad del área se supone concentrada en el centro del canto de cada ala, se llega a la curva bilineal M-ϕ de la Figura 8. Así, en esta sección hipotética, coinciden la plasticidad total y la primera fluencia y el factor de forma es la unidad.

La viga de proporciones más realistas con la forma de la Figura 7b produce una curva M-ϕ con el ángulo redondeado que indica la Figura 8. Como este redondeamiento corresponde a la extensión de la plasticidad, empieza en un momento igual a M_{pl}/s. Un valor tipo de s en una viga con sección en I es de 1,15 para la flexión del eje fuerte. En la flexión del eje débil de secciones en I s ≈ 1,5.

El análisis elastoplástico de una sección de cualquier forma flexionada por su eje de simetría, puede realizarse por el método descrito anteriormente para una sección rectangular. Si fuera preciso, puede hacerse una representación más exacta de la curva tensión-deformación del material, pero por supuesto, se complicaría la aritmética.

2.4 Flexión de secciones monosimétricas

El análisis elastoplástico de una sección que no se flexiona por un eje de simetría se complica por el cambio de posición del eje neutro que ocurre al desarrollarse la plasticidad. Al principio el eje neutro elástico pasa por el centroide, como se ve en la Figura 9a. Pero debido a la desigualdad de las tensiones en la cara superior e inferior de la sección, la fluencia se produce antes en un borde, como se ve en la Figura 9b. Así, la plasticidad se extiende hacia dentro de forma asimétrica, como se ve en la Figura 9c. Para que se equilibren las fuerzas axiales en todas esas fases intermedias, las fuerzas de tracción y compresión deben estar equilibradas. Para que esto se cumpla, la línea de tensión cero debe alejarse del acero en fluencia pues el esfuerzo aumenta menos rápi-

damente en esta parte de la sección. A la larga, al llegar a la plasticidad total que se ve en la Figura 9d, el eje neutro de la sección debe coincidir con el eje de igual área, es decir, la línea que la divide en dos mitades. El cálculo de M_{pl} de una sección asimétrica exige por lo tanto conocer la situación del eje de igual área, en vez del eje centroide cuando se trata de comportamiento elástico.

Las secciones monosimétricas tienen dos valores distintos del módulo elástico en cada cara de la sección debido a las diferentes distancias al eje neutro elástico. Sin embargo, estas secciones poseen un solo valor de módulo plástico de la sección igual a M_{pl}/f_y. Por lo tanto su factor de forma tiene dos valores, según la cara que se considere. En secciones extremas, como las T, esta diferencia puede ser amplia, siendo un valor inferior la unidad. Aunque, desde luego, esto no afecta a la relación de M y M_{pl}, puede ser motivo de confusión en situaciones que requieren estudiar en concreto la fluencia en compresión (o en tracción).

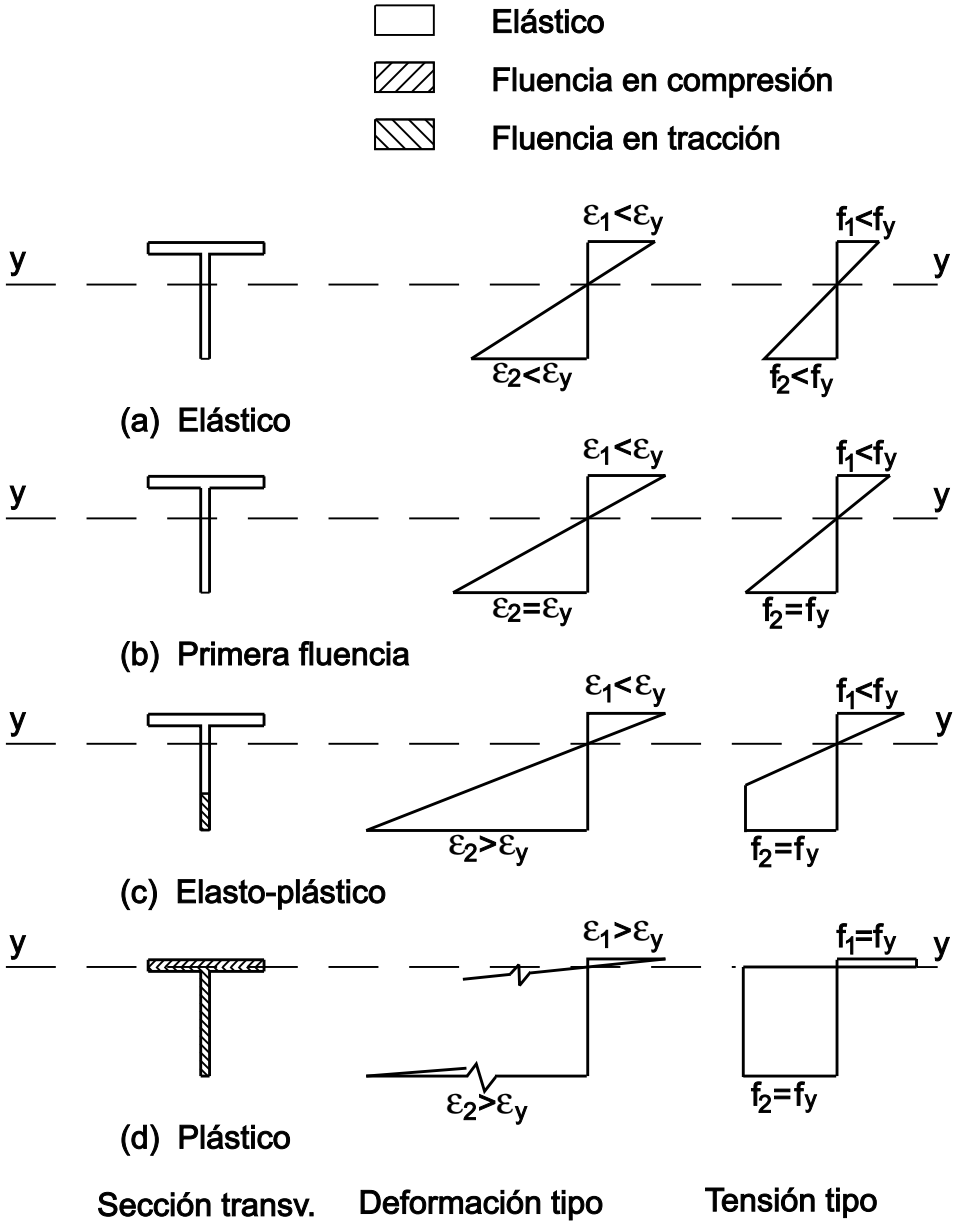


Figura 9 Fluencia de una sección asimétrica en flexión

3. EFECTO DEL ESFUERZO CORTANTE

El estudio del efecto del esfuerzo cortante en la resistencia del momento plástico, exige antes hipotetizar el modo en que hace fluencia el acero bajo la acción de la tensión directa y cortante. Esto se representa así:

$$\left(\frac{\sigma}{f_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_y}\right)^2 = 1 \qquad (7)$$

siendo τ_y = la resistencia a la fluencia cortante (tomada a $f_y/\sqrt{3}$ según el criterio de Von Mises) y redondeada a $0{,}6f_y$.

Aplicándolo a las formas plásticas de flexión y esfuerzo cortante de la sección rectangular, llegamos a la siguiente relación aproximada entre el esfuerzo cortante aplicado (V_s), el momento de resistencia plástica reducido (M_{plv}), el esfuerzo cortante necesario para la fluencia en corte (V_{pw}) y M_{pl}:

$$M_{plv} = \left\{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{V_s}{V_{pw}}\right)^2\right\} M_{pl} \qquad \text{para } \frac{V_s}{V_{pw}} > \frac{2}{3} \quad (8)$$

Aplicando la ecuación (7) a una sección I totalmente plástica (ver Figura 10), suponiendo que las tensiones cortantes en el alma son uniformes y que $V_{pw} = 0{,}6dt_w f_y$ ($\tau_y = 0{,}6\ f_y$), tenemos:

$$M_{plv} = \left\{1 - \left(2\frac{V_s}{V_{pw}} - 1\right)^2\right\} M_{pl}$$

$$\text{para } 0{,}5V_{pw} \le V_s \le V_{pw} \qquad (9)$$

$$M_{plv} = M_{pl} \text{ para } V_s \le 0{,}5V_{pw}$$

Así, en las secciones I flexionadas en el plano del alma, los esfuerzos cortantes inferiores al 50% de la resistencia plástica del alma en fluencia, no tienen un efecto significativo en M_{pl}. La conducta en flexión por el eje menor es igual a la de una sección rectangular descrita en la ecuación (8).

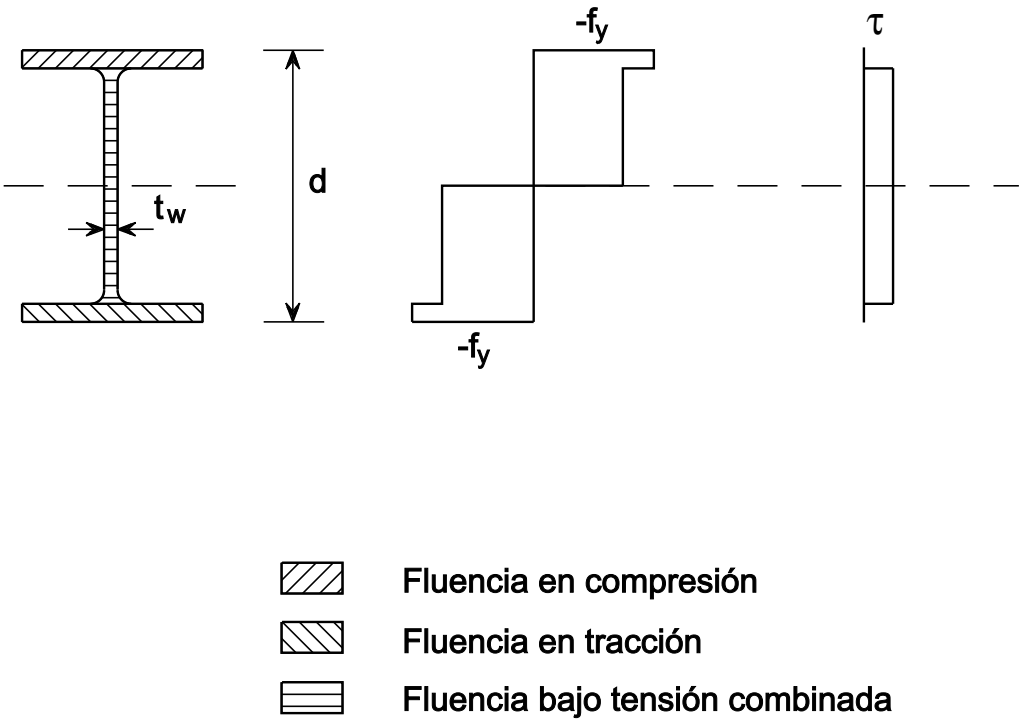


Figura 10 Modelo de flexión y esfuerzo cortante asumido en comportamiento totalmente plástico de secciones en I

4. COMPORTAMIENTO PLÁSTICO CON CARGA GENERAL COMBINADA

Se han hecho análisis de resistencia de la sección con varias combinaciones de momento y cizallamiento, con distintas formas de estructura y variantes de la teoría de la plasticidad. A efectos del cálculo, los resultados se expresan normalmente mediante gráficos o fórmulas aproximadas de acción recíproca. En el caso de una sección I flexionada por el eje mayor, no es necesario reducir el M_{pl} si el cizallamiento es menos de la mitad de V_{pw}.

En una sección se flexiona por los dos ejes, el eje neutro plástico se inclina respecto a los ejes rectangulares en un grado que depende de la relación de los momentos aplicados y de la forma exacta de la sección. Suponiendo el reparto de tensiones y calculando los momentos de resistencia correspondientes, se obtiene la relación entre los momentos de resistencia

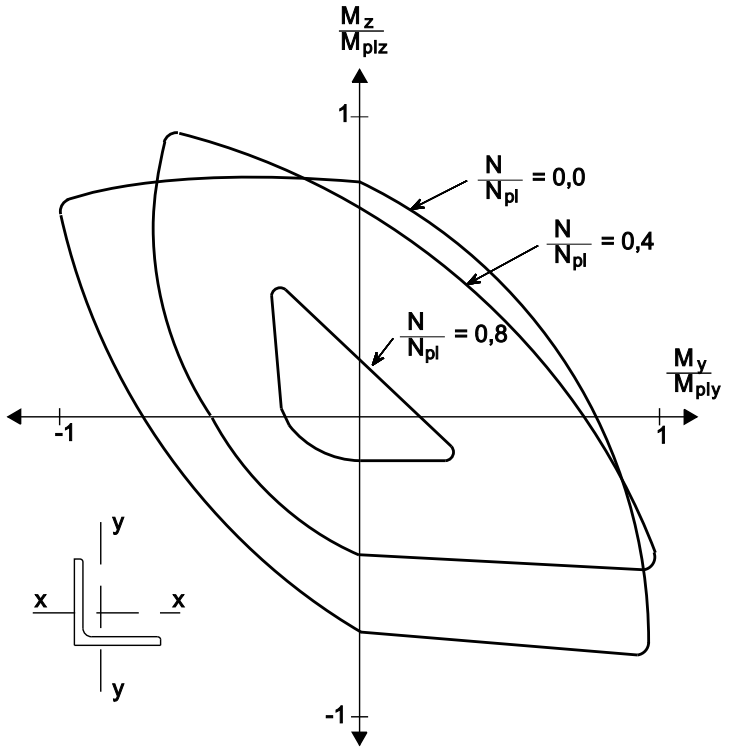


Figura 12 Curvas de interacción en modelo plástico para sección de angular bajo flexión biaxial

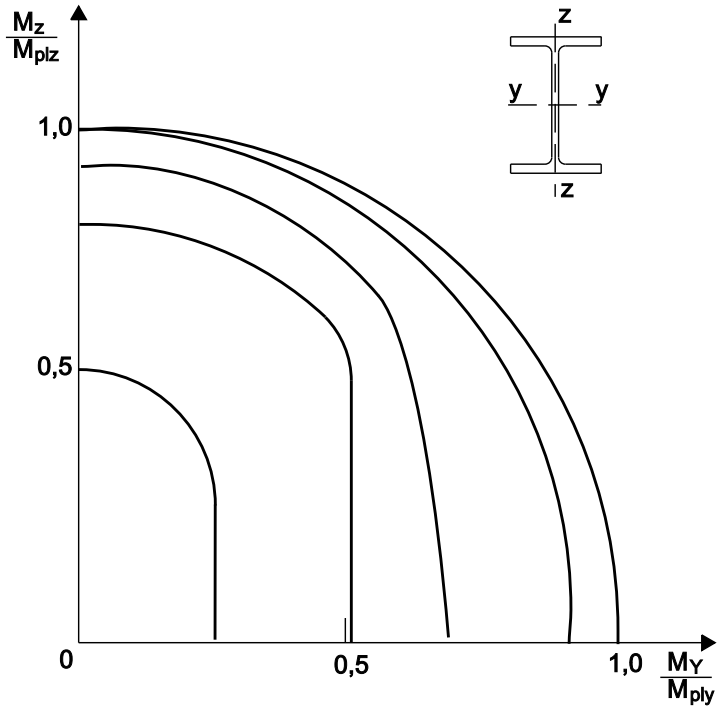


Figura 11 Curvas de interacción en modelo plástico de sección en I bajo flexión biaxial (el modelo se repite en cada cuadrante)

plástica reducidos (M_{plry} y M_{plrz}) y los momentos de resistencia plástica básicos (M_{ply} y M_{plz}). Si hiciera falta, se puede incluir en estos cálculos los efectos de la carga axial (N). Aunque son tediosos, se han efectuado con varias formas estructurales (ver Figuras 11 y 12), incluso secciones asimétricas, como las angulares. Una expresión adecuada de las formas I y H en flexión biaxial, que relaciona M_{plry} y M_{plrz}, es:

$$\left(\frac{M_{plry}}{M_{ply}}\right)^2 + \left(\frac{M_{plrz}}{M_{plz}}\right) = 1 \qquad (10)$$

Cuando la sección tenga al menos un eje de simetría y si el problema se resuelve en términos de los ejes principales, siempre es más seguro aplicar el equivalente lineal de la ecuación (10), a saber:

$$\frac{M_{plry}}{M_{ply}} + \frac{M_{plrz}}{M_{plz}} = 1 \qquad (11)$$

5. RESUMEN FINAL

1. Siempre que no ocurran efectos de inestabilidad, las vigas de acero pueden soportar momentos superiores a los que sólo causan fluencia. La redistribución de tensiones en la sección permite el desarrollo de toda la gama de tensiones flectoras, para las que el momento de resistencia es completamente plástico M_{pl}.
2. Las vigas estáticamente indeterminadas sólo se agotan cuando se forman suficientes zonas de plasticidad local, llamadas "rótulas plásticas", para convertir la "estructura" en un mecanismo.
3. El valor de M_{pl} resulta del producto de la tensión de fluencia (f_y) y una propiedad geométrica de la sección llamada "módulo plástico de la sección", W_{pl}; la relación W_{pl}/W se llama "factor de forma".
4. El M_{pl} se reduce si también está presente el cizallamiento, aunque en casi todas las situaciones reales, la reducción debida al cizallamiento se puede despreciar.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Dowling, P.J., Owens, G.W. y Knowles, P., "Structural Steel Design", Butterworths, 1988.

2. Ballio, G., and Mazzolani, F., "Theory and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, Nueva York, 1983.

3. Salmon, C.G. y Johnson, J.E., "Steel Structures - Design and Behaviour", Harper and Row, Nueva York, 1980.

4. Trohair, N.S. y Bradford, M.A., "The Behaviour and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, 1988.

5. McGinley, T.J. y Ang, T.C., "Structural Steelwork Design to Limit State Theory", Butterworths, 1987.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.8(i), (ii) y (iii): Vigas arriostradas lateralmente

CONTENIDO

Problema resuelto 9.8(i): Comprobación de la flexión vertical, el cizallamiento y la deflexión de una sección I simplemente apoyada.

Problema resuelto 9.8(ii): Comprobación de la flexión biaxial y deflexión de una ménsula RHS.

Problema resuelto 9.8(iii): Viga compuesta monosimétrica para puente grúa.

Cuando procede, los cálculos se han realizado de conformidad con el Eurocódigo 3 [1].

[1] Eurocódigo 3: “Cálculo de Estructuras de Acero”: ENV 1993-1-1: Parte 1.1: Reglas Generales para Edificios, CEN, 1992.

PROBLEMA 9.8(i)

Notación

f_y	=	Resistencia nominal a la fluencia
f_{yd}	=	Valor de cálculo de la resistencia a la fluencia
γ_M	=	Factor de seguridad parcial
M_{Sd}	=	Valor de cálculo de momento flector
$M_{c.Rd}$	=	Momento de resistencia de cálculo de la sección
$M_{pl.Rd}$	=	Momento de resistencia plástica de cálculo de la sección bruta
W_{pl}	=	Módulo plástico
V_{Sd}	=	Valor de cálculo del esfuerzo cortante en cada sección
$V_{pl.Rd}$	=	Resistencia plástica de cálculo al cizallamiento
A_v	=	Área de cizallamiento
$M_{Ny.Rd}$	=	Resistencia reducida al momento plástico en el eje mayor debida a una carga axial
$M_{Nz.Rd}$	=	Resistencia reducida al momento plástico en el eje menor debida a una carga axial

Referencia en Eurocódigo 3

Problema

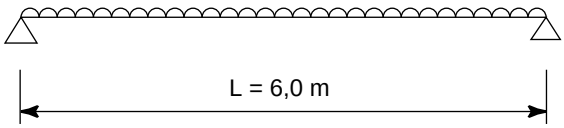
Escoger una sección IPE para soportar una sobrecarga de 245 kN repartida uniformemente en un vano de 6 m simplemente apoyado.

EC3 Tabla 5.31

Supóngase que el peso propio de la viga es 5 kN

El acero es Fe 360

2.2.3.2



Carga total sin factorizar = 250 kN

Valor de cálculo de la resistencia del material

Suponiendo	t	$\leq$	40 mm		
	γ_M	=	1,1		
	f_{yd}	=	f_y/γ_M		
	f_{yd}	=	235/1,1	=	213,5 N/mm^2

Tabla 3.1)

5.1.1

Valores característicos de las acciones:

Permanente:	G_k	=	5 kN
Variable:	Q_k	=	245 kN

Estos valores se combinan en el estado límite último y arrojan el valor de:

F_d	=	$G_d + Q_d$
	=	$\gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k$
	=	$1,35\ G_k + 1,5\ Q_k$
	=	$1,35 \times 5 + 1,5 \times 245$ kN
	$\approx$	375 kN

2.3.2.2
2.3.3.1
Tabla 2.2

1) Flexión

Con carga distribuida uniformemente

$M_{Sd} = F_d\ L/8$
$= 375 \times 6/8 = 281{,}25$ kNm

Se requiere un momento de resistencia de cálculo $M_{c.Rd}$ para que:

$M_{c.Rd} \geq M_{Sd}$

Suponiendo que la sección es de Clase 1, tomando:

$M_{c.Rd} = M_{pl.Rd} = W_{pl.y}\ f_{yd}$

a se requiere $W_{pl.y} = \dfrac{281{,}25 \times 10^3}{213{,}5} = 1317{,}3\ cm^3$

Elíjase una sección (IPE 400 O) de 404 x 182 x 75,7 cuyo W_{pl} es de 1502 cm^3

Las propiedades son:

Canto total	h	=	404 mm
Anchura total	b	=	182 mm
Canto entre cordones	d	=	331 mm
Espesor del ala	t_f	=	15,5 mm
Espesor del alma	t_w	=	9,7 mm
Radio de la raíz	r	=	21 mm
Momento de inercia	I_{yy}	=	1564 cm^4
	I_{xx}	=	26750 cm^4
Área	A	=	96,4 cm^2

Compruébese el peso propio:

$G_k = 96{,}4 \times 10^{-4} \times 78{,}5 \times 6 = 4{,}54$ kN

Valor supuesto previamente, G_k = 5 kN

Referencia en Eurocódigo 3

$\therefore$ Vale

Compruébese la clasificación de la sección

Tabla 5.3.1

$\varepsilon = 1$ para $f_y = 235\ N/mm^2$

$$\text{Ala } c/t_f = \frac{182/2}{15,5} = 5,87 \leq 10\,\varepsilon$$

$$\text{Alma } d/t_w = \frac{331}{9,7} = 34,12 \leq 72\,\varepsilon$$

La sección está dentro de los límites de Clase 1 y tiene suficiente momento de resistencia.

También $t_f < 40$ mm (por lo tanto, $f_y = 235\ N/mm^2$)

2) Cizallamiento

El valor de cálculo del esfuerzo cortante en el apoyo es:

$$V_{Sd} = 375/2 = 187,5\ kN$$

Se requiere una resistencia plástica de cálculo al cizallamiento $V_{pl.Rd}$ para que:

$$V_{pl.Rd} \geq V_{Sd}$$

5.4.6

$$V_{pl.Rd} = A_v\,(f_y / \sqrt{3})/\gamma_M$$

$$= [A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f]\,(f_y / \sqrt{3})/\gamma_M$$

$$= [96,4\times10^2 - 2\times182\times15,5 + (9,7+2\times21)15,5]\,(235/\sqrt{3})/1,1$$

$$= 592 \times 10^3\ N = 592\ kN$$

$\therefore$ la sección vale en cizallamiento

3) Deflexiones

Compruébense las flechas con cargas de servicio:

Referencia en Eurocódigo 3

Póngase $\gamma_f = 1,0$

$E = 210\ 000\ N/mm^2$

2.3.4(6)

La flecha total δ_{max} es:

$$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_o$$

3.2.5

siendo:

4.2.2

δ_0 causada por la curvatura previa

δ_1 causada por la carga permanente

δ_2 causada por la carga variable

En este caso $\delta_0 = 0$

Las limitaciones del Eurocódigo 3 son:

$\delta_2 \leq L / 300$

$\delta_{max} \leq L / 250$

Tabla 4.1

(Nota: Si $\delta_{max} \leq L / 300$, ambas condiciones se cumplen).

El valor de cálculo de δ_{max} es:

$F_d = G_k + Q_k = 250\ kN$

2.3.4(5)

Eqn. 2.17

$$\delta_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{F_d \cdot L^3}{EI}$$

$$= \frac{5}{384} \quad \frac{250 \times 6^3 \times 10^{12}}{2,1 \times 10^5 \times 26750 \times 10^9} = 12,5\ mm$$

$L/300 = 6 \times 10^3 / 300 = 20\ mm$

$\therefore \quad \delta_{max} \leq L / 250$

y $\quad \delta_2 \leq L / 300$

La viga vale por flecha

Por lo tanto, adóptese $404 \times 182 \times 75,7$ (IPE 400 O)

Referencia en Eurocódigo 3

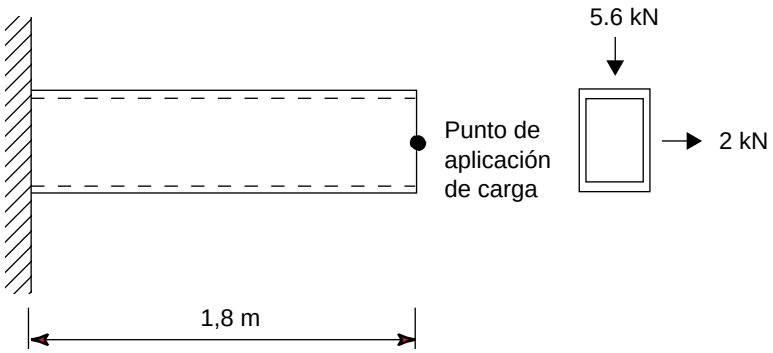
PROBLEMA 9.8(ii)

Problema

Escoger un RHS que sirva para ménsula con voladizo de 1,8 m que soporte en el extremo cargas concentradas de 5,6 kN en vertical y 2 kN en horizontal.

Supóngase un peso propio de 0,4 kN

El acero es Fe 360



2.2.3.2

Valor de cálculo de la resistencia del material:

$f_{yd} = f_y / \gamma_M$

Tabla 3.1

Suponiendo que t ≤ 40 mm:

5.1.1

$\gamma_M = 1,1$

$f_{yd} = 235/1,1 = 213,5 \text{ N/mm}^2$

Los valores característicos de las acciones son:

Permanente:		G_k	=	0,4 kN	(UDL)
Variable:	Vertical	Q_k	=	5,6 kN	(concentrado)
	Horizontal	Q_k	=	2 kN	(concentrado)

Con los mismos valores parciales de seguridad que en el problema anterior, se obtienen los valores de las acciones con la combinación del estado límite último:

$G_d = 1,35\, G_k = 0,54 \text{ kN}$

Referencia en Eurocódigo 3

Q_d=1,5 Q_k=8,4 kN Vertical

y 3 kN Horizontal

1) Flexión

$M_{y.Sd} = 0{,}54 \times \frac{1{,}8}{2} + 8{,}4 \times 1{,}8 = 0{,}486 + 15{,}12 = 15{,}6$ kNm

$M_{z.Sd} = 3 \times 1{,}8 = 5{,}4$ kNm

$V_{y.Sd} = 0{,}54 \times 1{,}8 + 8.4 = 9{,}372$ kN

Puesto que la sección debe cumplir la condición de acción recíproca, escójase una sección de prueba y compruébese su resistencia. *5.4.8.1*

Probar 120 × 80 × 6,3 RHS (EN 10210-2)

Propiedades

$W_{pl.y}$	=	91,3 cm^3	$W_{pl.z}$	=	68,2 cm^3
h	=	120 mm	b	=	80 mm
t	=	6,3 mm	I_y	=	440 cm^4
			A	=	23,2 cm^2

EN (10210-2)

Compruébese el peso propio:

$G_k = 23{,}2 \times 10^{-4} \times 78{,}5 \times 1{,}8 = 0{,}33$ kN

Clasificación de la sección:

Tabla 5.3.1

$\varepsilon = 1$ para $f_y = 235$ N/mm^2

$d/t_w = \frac{h - 3t}{t} = \frac{120 - 3 - 6{,}3}{6{,}3} = 16 \leq 72\,\varepsilon$

$(b - 3t)/t = \frac{80 - 3 - 6{,}3}{6{,}3} = 9{,}7 \leq 33\,\varepsilon$

La sección está dentro de los límites de la Clase 1.

Supóngase el cizallamiento V_{Sd} ≯50% de la resistencia disponible $V_{pl.Rd}$ para poder aplicar los valores completos $M_{c.Rd}$ *5.4.7*

Referencia en Eurocódigo 3

Véase si:

$$\left[\frac{M_{y.Sd}}{M_{Ny.Rd}}\right]^{\alpha}+\left[\frac{M_{z.Sd}}{M_{Nz.Rd}}\right]^{\beta} \leq 1$$ *5.4.8.1(11)*

siendo $$\alpha=\beta=\frac{1,66}{1-1,13\,n^2} \leq 6$$

Como no hay una carga axial $n = 0$

y $\alpha = \beta = 1,66$

$$\left[\frac{M_{y.Sd}}{M_{Ny.Rd}}\right]^{\alpha}+\left[\frac{M_{z.Sd}}{M_{Nz.Rd}}\right]^{\beta}$$

$$= \left[\frac{15,6\times10^6}{91,3\times10^3\times235/1,1}\right]^{1,66}+\left[\frac{5,4\times10^6}{68,2\times10^3\times235/1,1}\right]^{1,66}$$

$= 0,690 + 0,192 = 0,882 \leq 1$

∴ la sección vale en flexión siempre que la carga de cizallamiento sea baja como se ha supuesto antes. Ahora vamos a comprobarlo.

2) Cizallamiento

Para carga vertical *5.4.6*

$V_{pl.Rd} = [Ah/(b + h)]\ (f_y / \sqrt{3})/\gamma_M$

$= [23,2 \times 10^2 \times 120/(80 + 120)]\ (235/\sqrt{3})/1,1$

$= 173,7$ kN

Claramente $V_{Sd} \leq V_{pl.Rd}$ tanto en carga horizontal como vertical

3) Deflexiones con carga práctica

Se comprueban en condiciones de servicio.

Estudiese primero sólo la flecha vertical

Referencia en Eurocódigo 3

δ_{max} = $\delta_1 + \delta_2$ (sin curvatura previa)

$$\delta_1 = \frac{G_k L^3}{8EI} = \frac{0,4}{8} \times \frac{1,8^3 \times 10^{12}}{2,1 \times 440 \times 10^9} = 0,3 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{Q_k L^3}{3EI} = \frac{5,6}{3} \times \frac{1,8^3 \times 10^{12}}{2,1 \times 440 \times 10^9} = 11,8 \text{ mm}$$

F.2.2(5)

δ_{max} = 0,3 + 11,8 = 12,1 mm

Tómese L de la Tabla 4.2.2(2) de ménsulas, al doble de la longitud en voladizo: supóngase los límites de la Tabla 4.1 para 'Forjados en general'.

Tabla 4.1
4.2.2(2)

$\therefore$ límite en $\delta_{max} = 2 \times 1,8 \times 10^3/250 = 14,4$ mm

límite en $\delta_2 = 2 \times 1,8 \times 10^3/300 = 12,0$ mm

$\therefore$ la viga vale por deflexión

Adóptese 120 × 80 × 6,3 RHS (EN 10210-2)

Referencia en Eurocódigo 3

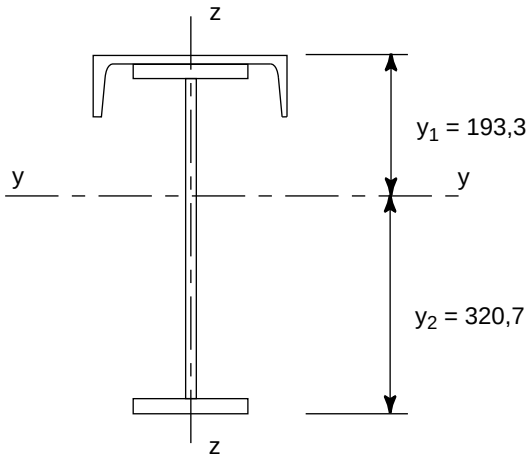
PROBLEMA 9.8(iii)

Problema

Comprobar la capacidad de una viga compuesta para puente grúa, formada con un perfil IPE de $500 \times 200 \times 90{,}7$ y un perfil en U de $260 \times 90 \times 37{,}9$ en el ala superior, de resistir un momento vertical de 267 kNm que actúe al mismo tiempo que un momento horizontal en el nivel de alas superiores de 20,6 kNm.

El acero es Fe 360

Nota: En realidad, esta viga debería calcularse sin arriostramiento lateral en los tramos entre puntos de restricción efectiva lateral y a la torsión. Se ha puesto aquí para demostrar los procedimientos que se siguen para hallar el momento de resistencia de las secciones monosimétricas. En el problema 9.9(ii) se dan los cálculos adicionales necesarios para estudiar el pandeo lateral con torsión.



Especificación del perfil U:			Especificación UB (IPE 500)		
h_c	=	260 mm	h_B	=	500 mm
t_{fc}	=	10 mm	b	=	200 mm
t_{wc}	=	14 mm	t_{wB}	=	10,2 mm
y_c	=	2,36 cm	t_{fB}	=	16 mm
A_c	=	48,3 cm^2	A_B	=	116 cm^2
I_{zzc}	=	317 cm^4	I_{yyB}	=	48200 cm^4

Referencia en Eurocódigo 3

I_{yyc} = 4820 cm^4 I_{zzB} = 2142 cm^4

f_y = 235 N/mm^2 para Fe 360

γ_M = 1,1 *3.2.21*

5.1.1(1)

$$\bar{y} = \frac{A_c \times y_c + A_B\left(t_{wc} + \frac{h_B}{2}\right)}{(A_c + A_B)}$$

$$= \frac{48{,}3 \times 2{,}36 + 116 \times \left(14 \times 10^{-1} + \frac{500 \times 10^{-1}}{2}\right)}{(48{,}3 + 116)}$$

= 19,33 = 193,3 mm (desde la parte superior)

$$I_{yy}\ (\text{sección}) = I_{zzc} + A_c \times \bar{y} - y_c)^2 + I_{yyB} + A_B\left(t_{wc} + \frac{h_B}{2} - \bar{y}\right)^2 -$$

$$= 317 + 48{,}3 \times (19{,}33\text{-}2{,}36)^2 + 48200 + 116\left(1{,}4 + \frac{50}{2} - 19{,}33\right)^2$$

= 68225 cm^4

$$W_{el.yc} = \frac{I_{yy}}{\bar{y}} = \frac{68225}{19{,}33}$$

= 3529 cm^3

$$W_{el.yt} = \frac{I_{yy}}{(h_B + t_{wc} - \bar{y})}$$

$$= \frac{53460{,}34}{514 \times 10^{-1} - 19{,}33} = 2127\ cm^3$$

Referencia en Eurocódigo 3

$$W_{el.z\ (arriba)} = \frac{I_{yyc} + \frac{1}{2} \times I_{zzB}}{\left(\frac{h_c}{2}\right)}$$

$$= \frac{4820 + \frac{2142}{2}}{(260 \times 10^{-10}/2)} = 453{,}15\ cm^3$$

Momento de flexión:

$M_{c.Rd} = W_{el}\, f_y / \gamma_M$ *5.4.5.1*

Para el ala en compresión:

$M_{cy.Rd} = 3{,}529 \times 235/(1{,}1 \times 10^3) = 754$ kNm

Para el ala en tracción:

$M_{cy.Rd} = 2127 \times 235/(1{,}1 \times 10^{-3}) = 454$ kNm

Para la flexión horizontal del ala en compresión:

$M_{cz.Rd} = 453{,}15 \times 235/(1{,}1 \times 10^3) = 96{,}8$ kNm

5.4.8.2

Para la flexión del ala superior, tomar:

$$\frac{M_{y.Sd}}{W_{el.y}\, f_{yd}} + \frac{M_{z.Sd}}{W_{el.z}\, f_{yd}} \leq 1$$

(Nota $N_{Sd} = 0$)

$$\frac{267 \times 10^6}{3{,}529 \times 10^3 \times 235/1{,}1} + \frac{20{,}6 \times 10^6}{453 \times 10^3 \times 235/1{,}1} \leq 1$$

$$0{,}354 + 0{,}213 \leq 1$$

$$0{,}567 \leq 1$$

Sólo para la flexión vertical M_{Sd} de 267 kNm es inferior el momento de resistencia que el ala en tracción gobierna a 454 kNm.

Adóptese la sección elegida

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.9.1: Vigas no arriostradas I

OBJETIVO/CONTENIDO

Desarrollar la comprensión del fenómeno de la inestabilidad por torsión lateral; señalar los parámetros que la rigen y mostrar cómo se combinan teoría, experimentación y juicio para crear un método de cálculo práctico. El procedimiento de cálculo del Eurocódigo 3 sirve para ilustrar ese método.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1: Definición de equilibrio elástico estable e inestable

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales

Lecciones 9.8.1 y 9.8.2: Vigas arriostradas

LECCIONES AFINES:

Lección 9.9.2: Vigas no arriostradas

Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Viga-Columna

RESUMEN

Esta lección empieza con una introducción no matemática al fenómeno del pandeo lateral por torsión. Presenta una simple analogía entre el comportamiento del ala de compresión y el pandeo por flexión de un puntal. Resume los factores que influyen principalmente en la estabilidad lateral y describe brevemente el papel del arriostramiento para conseguirlo.

Se explican brevemente las razones por las que hay se requiere modificar la teoría elástica, tratada en la Lección 9-9-2, para que sirva de base de las reglas de cálculo de vigas sin arriostrar. También se presenta un resumen de los antecedentes del Eurocódigo 3.

NOTACIÓN

C	coeficiente para introducir el tipo de carga
d	canto total
EI_z	rigidez a la flexión por el eje menor
f_d	resistencia de cálculo del material
f_y	resistencia del material
i_z	radio de giro del eje menor
k	coeficiente para introducir las condiciones del apoyo lateral
L	vano
M_{bRd}	momento de resistencia al pandeo
M_{cr}	momento de pandeo elástico crítico
M_{pl}	momento plástico de la sección
M_{Rd}	momento de resistencia de la sección
t_f	espesor del ala
u	deflexión lateral
α_{LT}	parámetro de la formula de cálculo, ver ecuación 2
χ_{LT}	factor de reducción del pandeo lateral por torsión
$\bar{\lambda}_{LT}$	esbeltez de la viga
λ_{LT}	esbeltez básica
λ_1	parámetro con que se halla $\bar{\lambda}_{LT}$, ver ecuación (4)
ϕ	alabeo
ϕ_{LT}	parámetro con que se halla χ_{LT}, ver ecuación (2)
ψ	relación de momentos, ver ecuación (5)

1. PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE LAS SECCIONES PARA VIGAS

Cuando se calcula una viga de acero se suele pensar antes en la necesidad de darle suficiente resistencia y rigidez contra la flexión vertical. Esto lleva naturalmente a una sección mucho más rígida en el plano vertical que en el plano horizontal. Las secciones que se destinan normalmente a vigas tienen la mayor parte del material concentrado en las alas, que son relativamente estrechas para impedir el pandeo local. La necesidad de unirlas a otros elementos con facilidad, normalmente sugiere una sección abierta, cuya rigidez a la torsión es comparativamente baja. La Figura 1, donde se comparan las propiedades de cuatro secciones de la misma área, indica que la fuerte resistencia a la flexión vertical se obtiene a costa de la rigidez a la flexión horizontal y a la torsión.

Tipo de sección	Plano	Sección H (Típica)	Sección I (Típica)	S. tubular hueca (Típica)
Propiedades de sección				
A área	1	1	1	1
I_y (Carga vertical)	1	0,35	1	0,2
I_z (Carga horizontal)	0,2	3,5	1	3,5
J (Torsión)	1	1	1	100

Figura 1 Secciones tipo utilizadas como vigas con indicación de valores relativos de propiedades de sección

2. RESPUESTA DE LAS VIGAS ESBELTAS A LA CARGA VERTICAL

Sabemos, porque comprendemos la conducta de los puntales, que siempre que se carga un elemento estructural esbelto por su plano rígido (axialmente en el caso de un puntal), tiene la tendencia a agotarse por pandeo en el plano más flexible (por flecha lateral en el caso del puntal). La figura 2 muestra cómo reacciona una viga ménsula esbelta a una carga vertical en el extremo; este fenómeno se llama pandeo lateral por torsión. Aunque consiste en una flecha lateral (u) y torsión por el eje vertical del alma (ϕ), como se ve en la Figura 3, este tipo de inestabilidad es muy parecida al simple pandeo por flexión de un puntal comprimido por carga axial. La carga de la viga por su plano más rígido (el del alma) ha provocado la ruina por pandeo en la dirección menos rígida (por flecha lateral y torsión).

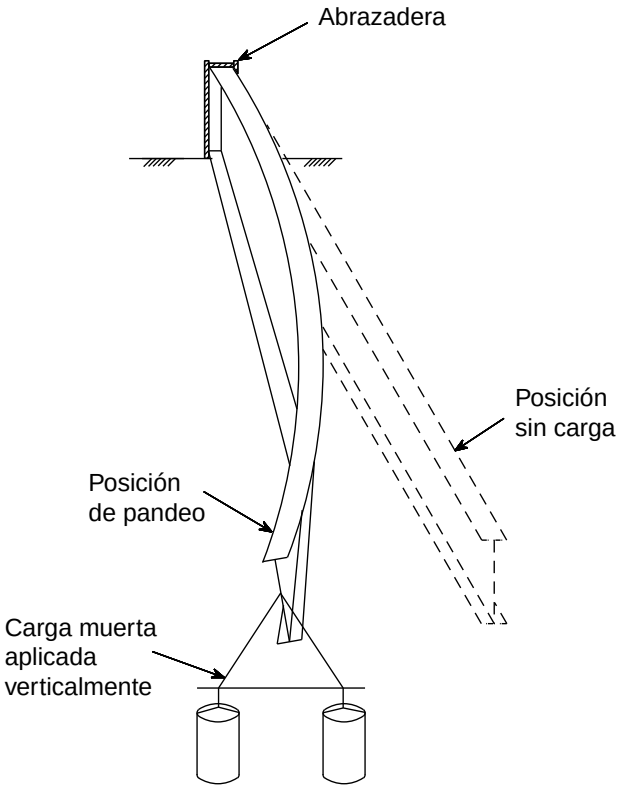


Figura 2 Respuesta de viga esbelta en voladizo sometida a carga vertical: pandeo por torsión lateral

Desde luego, muchos tipos de construcción impiden efectivamente este tipo de pandeo

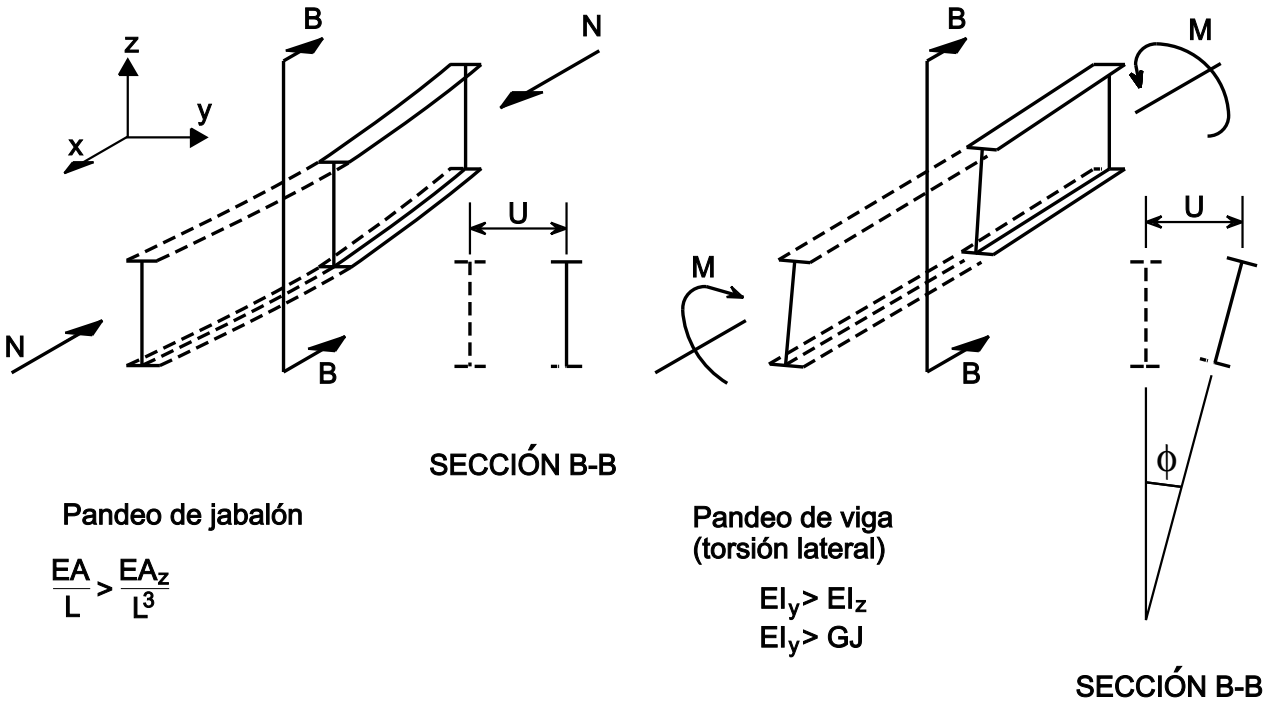


Figura 3 Similitud entre pandeo de jabalón y de viga

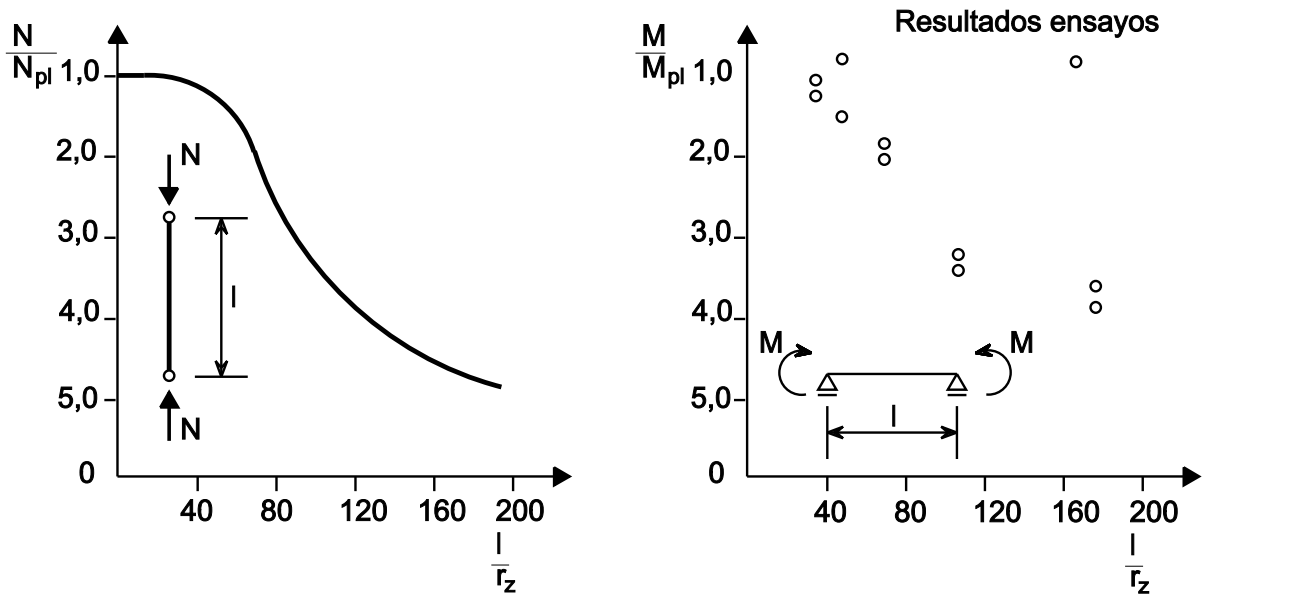


Figura 4 Dependencia de esfuerzos en viga de longitud no restringida y analogía con esfuerzos en pilar

y permiten así proyectar la viga totalmente empotrada, que es más eficaz (ver Lección 9.8.1). A este respecto importa recordar que durante el montaje de la estructura, algunas vigas pueden tener mucho menos apoyo del que tendrán cuando están montados los forjados, tableros, riostras, etc., así que también es necesario verificar la estabilidad en esta fase.

La inestabilidad lateral por torsión influye en el cálculo de vigas sin arriostramiento lateral de manera muy parecida a la que el pandeo por flexión influye en el cálculo de pilares. Así, la resistencia a la flexión no esta en función de la esbeltez de la viga, como lo indica la Figura 4, exigiendo hacer un cálculo iterativo similar a las curvas de pilares en el cálculo de puntales. Pero el análisis del pandeo lateral por torsión, debido a las acciones estructurales que intervienen, es bastante más complejo. Esto se refleja en que el método de cálculo requiere más operaciones.

3. MODELO FÍSICO SIMPLE

Antes de entrar en el análisis del problema, es útil intentar entender el comportamiento físico estudiando un modelo simplificado. Dado que lo que resiste principalmente la flexión de una sección en I son las fuerzas de tracción y compresión que se desarrollan en las dos alas, como vemos en la Figura 5, el ala en compresión puede considerarse un puntal. Los elementos en compresión muestran tendencia a pandear en la dirección más débil, que en este caso es hacia abajo. Pero la presencia del alma lo impide, y por tanto el ala está forzada a pandear hacia un lado, lo que ocasiona cierto grado de torsión porque el alma también tiene que deformarse. Aunque este planteamiento desprecia la influencia real de la torsión y el comportamiento del ala en tracción, sin embargo, se acerca al comportamiento de las jácenas de mucho canto o de las celosías y viguetas de alma calada. De hecho, los primeros intentos de analizar el pandeo lateral por torsión empezaron por este planteamiento.

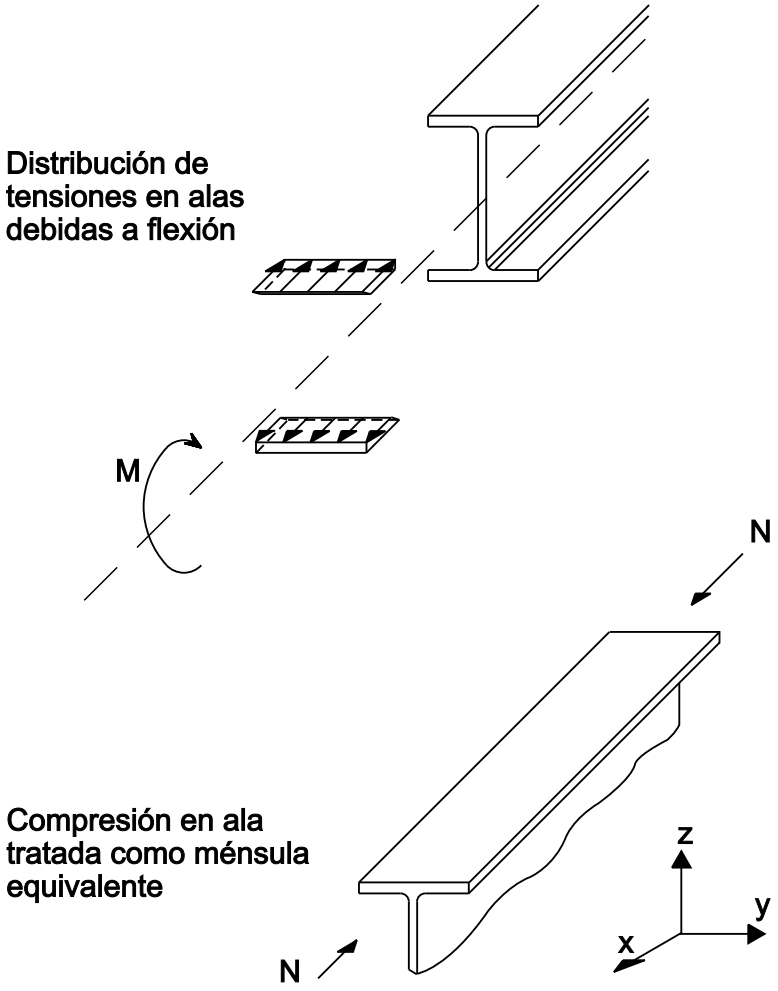


Figura 5 Aproximación al problema del pandeo de viga como un problema de ménsula

4. FACTORES QUE INFLUYEN EN LA ESTABILIDAD LATERAL

La analogía entre la compresión del ala y el puntal que hicimos en el apartado anterior, también sirve para entender lo siguiente:

1. La carga de pandeo de la viga es probable que dependa del vano sin arriostrar, es decir, de las distancia entre los puntos en que se impide la flecha lateral, y de su rigidez a la flexión lateral (ELz), debido a la resistencia de puntal α ELz/L^2.

2. Es de esperar que la forma de la sección tenga cierta influencia, teniendo más importancia el alma y el ala en tracción en las secciones con relativamente poco canto. En el primer caso, la cercanía del ala estable en tracción al ala inestable en compresión aumenta la estabilidad y produce además mayor torsión de la sección. Esta conducta torsional adquiere más importancia.

3. En vigas cuyo momento no es uniforme, la fuerza del ala en compresión deja de ser constante, como vemos en la Figura 6, así que puede pensarse razonablemente que esos elementos sean más estables que otros iguales con un esquema de momentos más uniforme.

4. El empotramiento de un extremo que impide que se forme la forma de pandeo, como en la Figura 3, es probable que aumente la estabilidad de la viga. El estudio de las deformaciones de pandeo debe dejar claro que esto se refiere a la restricción del giro en planta, es decir, por el eje z (véanse las figuras 5 y 3). El impedimento del giro en el plano vertical afecta al sistema de momentos de la viga (y podría así

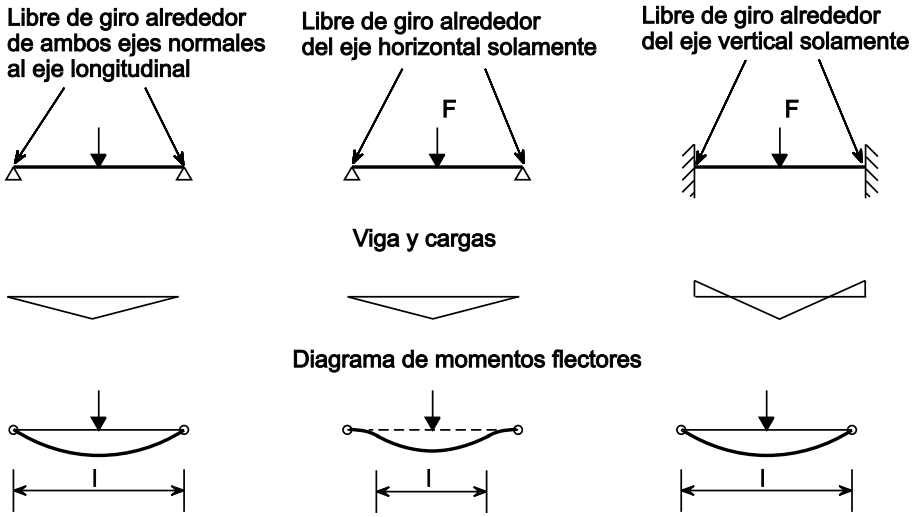


Figura 7 Efecto de restricción en extremo en planta o alzado en caso de pandeo lateral-torsional

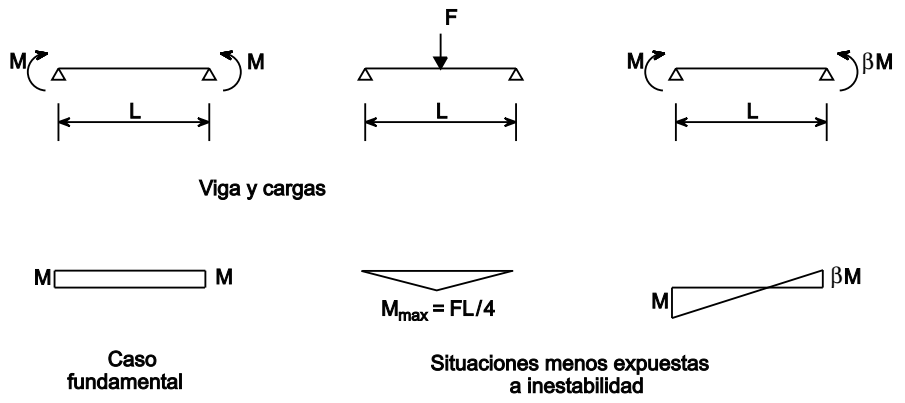


Figura 6 Efecto de momento no uniforme en el pandeo lateral-torsional

causar mayor estabilidad) pero no altera directamente la forma del pandeo, como se ve en la Figura 7.

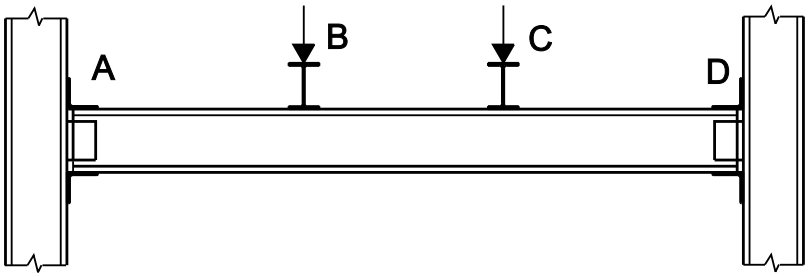
La lección 9.9.2 presenta un análisis más que riguroso que corrobora los cuatro puntos anteriores. Esta lección se ocupa también del alabeo de la sección y de la influencia de la cantidad de carga aplicada sobre la estabilidad, factores que no aparecen en el modelo simplificado aquí expuesto.

5. EL ARRIOSTRAMIENTO COMO MEDIO DE MEJORA DEL COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS

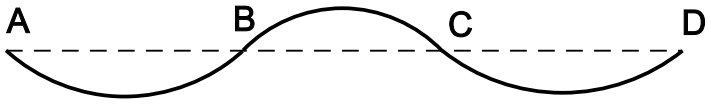
Se puede recurrir al arriostramiento para aumentar la resistencia de una viga susceptible de inestabilidad lateral por torsión. Deben cumplirse dos condiciones:

1. El arriostramiento debe tener rigidez suficiente para evitar eficazmente el movimiento lateral del punto arriostrado (que se consigue normalmente sin dificultad).

2. El arriostramiento debe tener la fuerza suficiente para resistir los esfuerzos que le transmiten los elementos principales (estos esfuerzos son normalmente un porcentaje de la fuerza que actúa sobre el ala en compresión del elemento arriostrado).



Viga cargada por vigas transversales que prové soporte lateral a los puntos B y C



Vista en planta de forma pandeada

Figura 8 Pandeo de vigas con arriostramiento lateral

Si se cumplen estas dos condiciones, la viga puede desarrollar la resistencia total en plano mediante riostras a las debidas distancias. La Figura 8, que presenta la forma de pandeo de vigas con riostras intermedias, muestra cómo afecta el pandeo a toda la viga. En teoría, el arriostramiento debe impedir que ocurra el desplazamiento lateral o por torsión. En la práctica, el estudio de la forma de pandeo de la sección de la vida de la Figura 3, indica que el arriostramiento puede tener la máxima efectividad cuando se pone para resistir los mayores componentes de la deformación, es decir, una riostra lateral unida al ala superior probablemente tenga más efecto que una similar unida al ala inferior.

6. APLICACIÓN AL CÁLCULO

No es apropiado aplicar directamente la teoría de inestabilidad lateral por torsión, porque:

- Las fórmulas son demasiado complejas para su aplicación habitual, p.ej.: la ecuación (17) de la Lección 9.9.2.
- Existen diferencias significativas entre las hipótesis que fundamentan la base de la teoría y las características de las vigas reales. Al presumir la teoría una conducta elástica, pone un límite superior a la resistencia verdadera (este punto se trata en términos generales en la Lección 8.6.2).

En la Figura 9 se compara una serie de datos de ensayos de pandeo lateral con torsión, hechos con perfiles reales laminados en caliente; la ecuación (17) de la Lección 9.9.2 da los momentos elásticos críticos teóricos.

La Figura 9a sólo muestra un conjunto de datos de la sección de una viga con alas estrechas. El formato adimensional $\bar{\lambda}_{LT}$ de la Figura 9b tiene la ventaja de permitir comparar directamente los resultados de varias series de ensayos (con secciones distintas y diferente resistencia del material). En las dos figuras se pueden observar tres regiones de comportamiento:

- Vigas rechonchas capaces de llegar a M_{pl}, con valores de $\bar{\lambda}_{LT}$ alrededor de 0,4 más bajos en la Figura 9b.
- Vigas esbeltas que se agotan a momentos cercanos a M_{cr}, con valores de $\bar{\lambda}_{LT}$ por encima de 1,2 en la Figura 9b.
- Vigas de esbeltez media que no alcanzan M_{pl} ni M_{cr}, con $0,4 < \bar{\lambda}_{LT} < 1,2$ en la Figura 9b.

Solamente en el caso de las vigas en la región 1, la inestabilidad lateral no influye en el cálculo; las vigas se pueden calcular por los métodos de la Lección 9.8.1. Las vigas de la región 2, que abarca gran parte de las que no tienen arriostramiento lateral, el cálculo debe hacerse considerando el pandeo inelástico, debidamente modificado para incluir las imperfecciones geométricas, las tensiones remanentes, etc.,

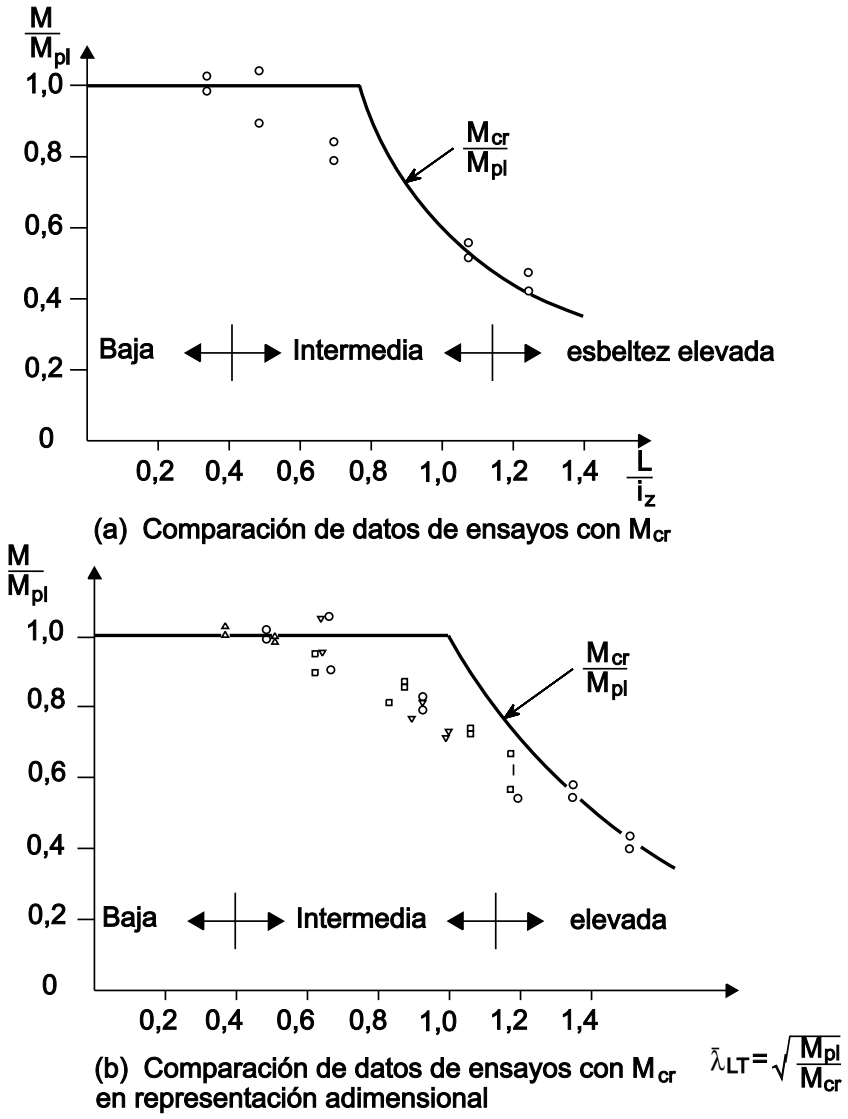


Figura 9 Comparación de datos de ensayo con momentos elásticos críticos teóricos

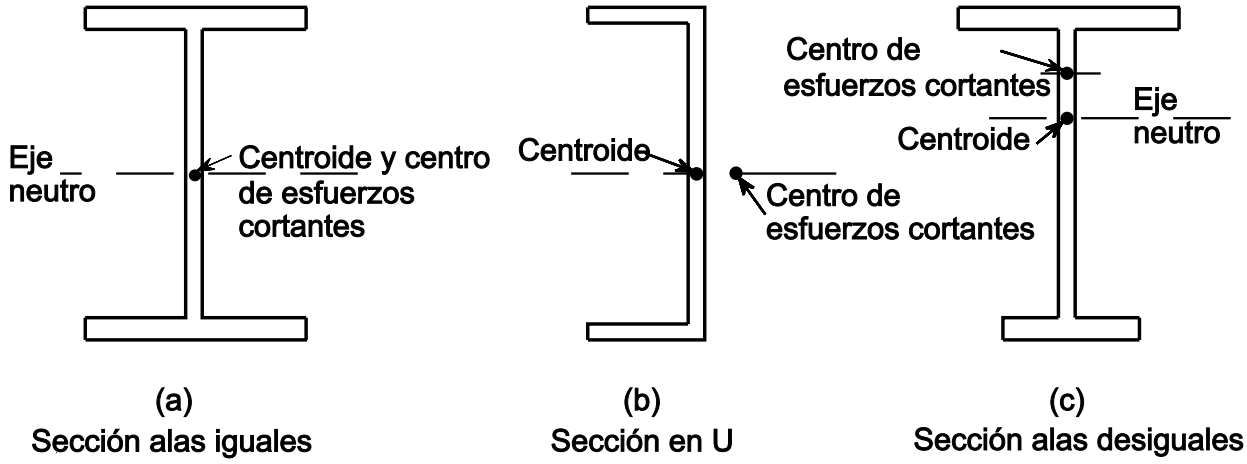


Figura 10 Sección de alas iguales y ejemplos de secciones con un eje de simetría

(ver Lección 8.1). Así, deben entrar en juego tanto la teoría como los ensayos, siendo tal complejidad inherente del problema que las reglas de cálculo definitivas es probable que contengan cierto grado de empirismo.

El apartado 7 esboza las disposiciones del Eurocódigo 3 respecto al cálculo de vigas, suponiendo las secciones tipo que aparecen en la Figura 10a y 10b. Debe notarse que las secciones del tipo que muestra la Figura 10b, con eje de simetría, p.ej.: en U, sólo pueden incluirse si se flexionan por el eje de simetría, o sea, aplicando la carga en el centro de cizallamiento paralelo al alma de la U. La secciones monosimétricas flexionadas en otro plano, p.ej.: una sección I con alas desiguales flexionadas por el eje mayor, como se ve en la Figura 10c, sólo puede tratarse como una versión ampliada de la teoría de la Lección 9.9.2, principalmente porque la sección de cizallamiento de la sección ya no cae en el eje neutro.

7. EL MÉTODO DEL EUROCÓDIGO 3

El momento de resistencia al pandeo viene dado por:

$$M_{bRd} = \chi_{LT} M_{Rd} \qquad (1)$$

siendo M_{Rd} el momento de resistencia de la sección

χ_{LT} el factor de reducción de pandeo lateral con torsión

Desde luego, para hallar M_{Rd} debe notarse la clasificación de la sección y aplicar el módulo correspondiente a la sección, junto con la resistencia de cálculo del material f_d. El valor de χ_{LT} depende de la esbeltez de la viga $\bar{\lambda}_{LT}$ y viene dado por:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \left[\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2\right]^{1/2}} \qquad (2)$$

siendo $\phi_{LT} = 0,5\left[1 + \alpha_{LT}\left(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2\right) + \bar{\lambda}_{LT}^2\right]$

y $\alpha_{LT} = 0,21$ para perfiles laminados

$\alpha_{LT} = 0,49$ para perfiles soldados

La Figura 11 ilustra la relación entre χ_{LT} y , y se ve que sigue la pauta de conducta que muestran los datos de ensayos de la Figura 9. Cuando $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$, el valor de χ_{LT} están tan cerca de la unidad que el cálculo debe fundarse en el momento de resistencia M_{Rd} total.

La esbeltez $\bar{\lambda}_{LT}$, que es una medida del grado en que el pandeo lateral con torsión reduce la resistencia portante de la viga, está en función de M_{Rd} y M_{cr}. M_{cr} es el momento de pandeo elástico crítico, una cantidad similar en concepto a la carga en punta de Euler, puesto que se deriva de una teoría (ver Lección 9.9.2) que presume una conducta "perfecta", o sea, un elemento inicialmente recto, respuesta elástica, carga sin desalinear, etc.

Así, $\bar{\lambda}_{LT}$ se toma como:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \left[M_{Rd} / M_{cr}\right]^{1/2} \qquad (3)$$

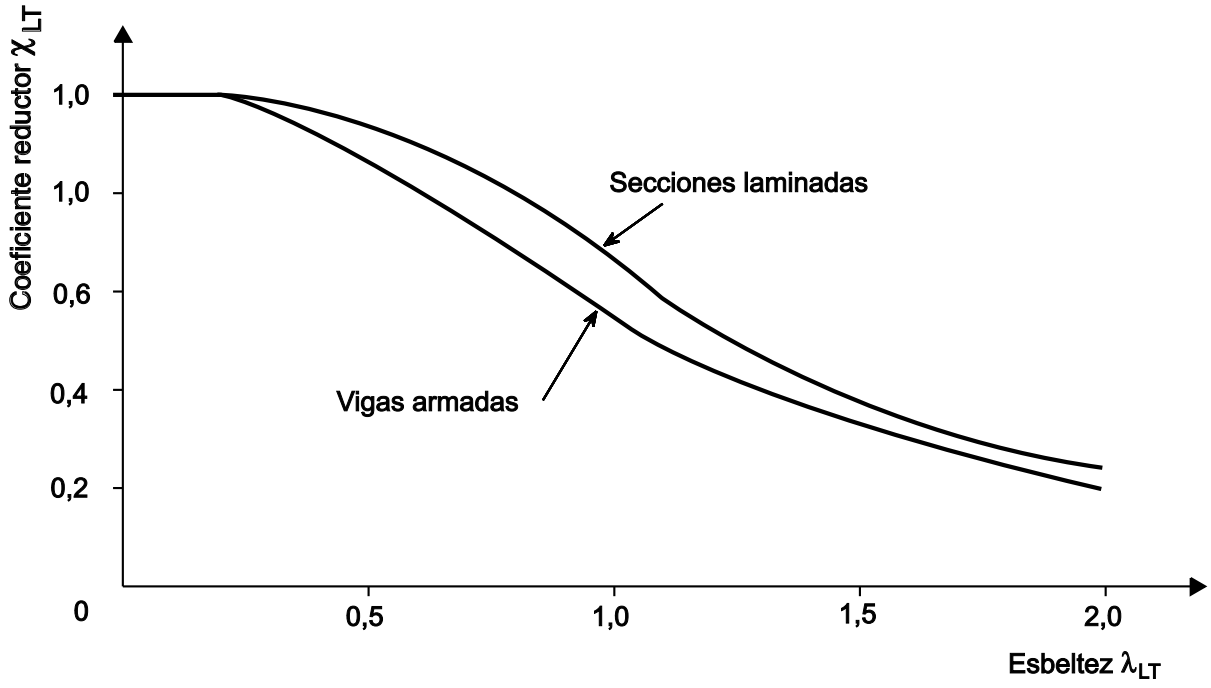


Figura 11 Coeficiente reductor de pandeo lateral-torsional

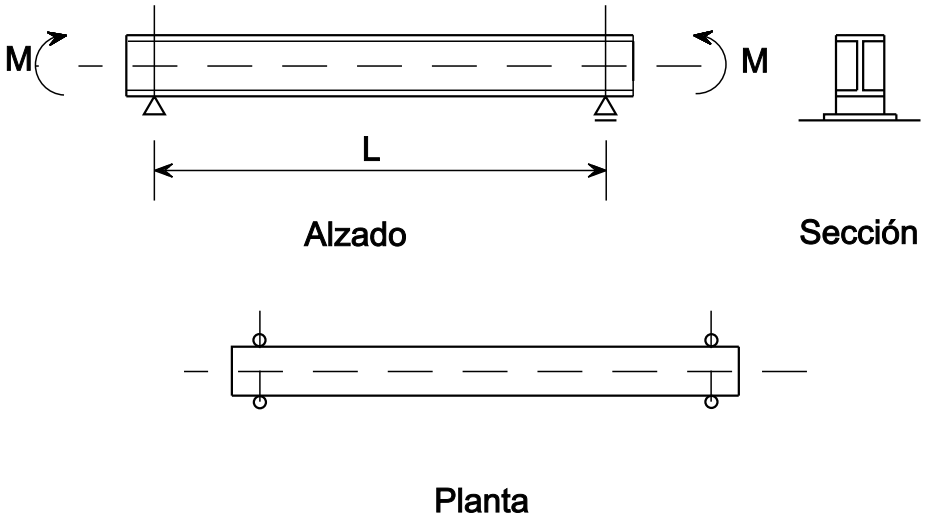


Figura 12 Definición del problema básico de pandeo lateral-torsional

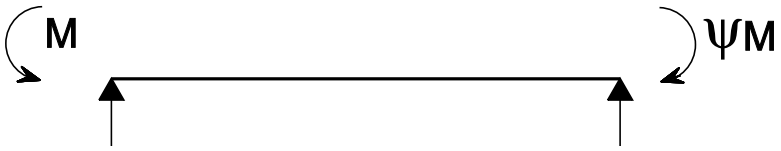


Figura 13 Gradiante de carga de momentos sobre viga de vano L

A efectos del cálculo, la ecuación (3) se puede reformular así:

$$\bar{\lambda}_{LT} = [\lambda_{LT} / \lambda_1] \qquad (4)$$

siendo $\lambda_1 = \pi [E / f_y]^{1/2}$

$$= 93,9 [235 / f_y]^{1/2}$$

y

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_z}{\left[1 + \frac{1}{20}\left(\frac{L / i_z}{dt_f}\right)^2\right]^{1/4}}$$

Esta expresión representa una aproximación moderada para cualquier perfil en I o H con alas iguales; ver el Apéndice.

La expresión anterior de λLT vale para las cargas que den un momento uniforme en un vano cuyos extremos no puedan deflectar lateralmente ni torsionarse por un eje vertical que pase por el alma. Este es el caso básico de estabilidad lateral (Figura 12) para el que la lección 9.9.2 presenta un tratamiento teórico completo. Pueden incluirse variaciones de las condiciones de carga y de apoyo lateral introduciendo factores modificadores en las expresiones de λ_{LT} o M_{cr}.

Por ejemplo, si hubiera un gradiente de momentos entre puntos de arriostramiento lateral, λ_{LT} se calcula así:

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_z}{[C_1]^{1/2}\left[1 + \frac{1}{20}\left(\frac{L / i_z}{dt_f}\right)^2\right]^{1/4}} \qquad (5)$$

siendo $C_1 = 1,75 - 1,05\ \psi + 0,3\ \psi^2 \leq 2,35$

y ψ la razón del momento del extremo definida en la Figura 13.

Tomando como ejemplo el último vano de una viga continua en la que $\psi = 0$ dé $C_1 = 1,75$ y así λ_{LT} se reduzca a 0,76 $\left(= 1/\sqrt{1,75}\right)$ del valor del momento uniforme, conduce al aumento de χ_{LT} y por tanto de M_{bRd}.

Las variaciones de las condiciones de arriostramiento lateral se pueden tratar introduciendo coeficientes de k para cambiar la longitud geométrica L en kL, cuando se despeja M_{cr}. En

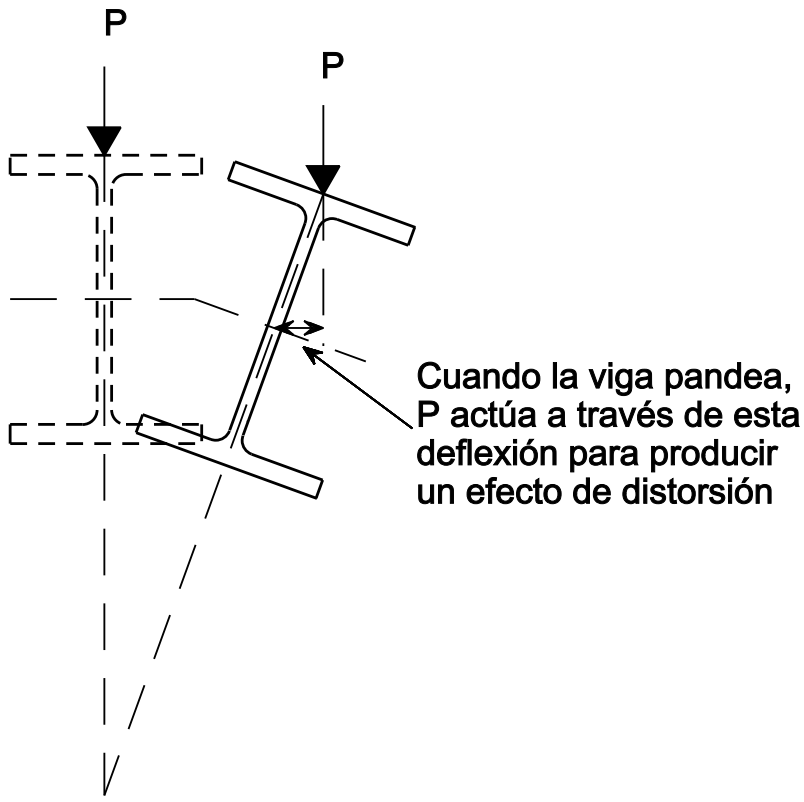


Figura 14 Carga desestabilizadora

condiciones de mayor arriostramiento son apropiados los valores de k < 1,0, que hacen aumentar M_{cr} y así, por la reducción de, $\overline{\lambda}_{LT}$ a aumentar χ_{LT} y M_{bRd}.

Igualmente, puede acudirse directamente a coeficientes de C para hallar M_{cr} y proporcionar valores de $\overline{\lambda}_{LT}$ apropiados para gran variedad de tipos de carga. En particular, con este método debe calcularse el M_{cr} reducido adecuado para las cargas desestabilizadoras, que son las que actúan por encima del centro de cizallamiento de la viga y puede moverse libremente hacia los lados de la viga al pandear, como vemos en la Figura 14.

En las secciones del tipo ilustrado en la Figura 9c, cuyo centro de cizallamiento y centroide no caen en el mismo eje horizontal, la evaluación de M_{cr} es más compleja y lo trata el Anexo F del Eurocódigo 3.

8. RESUMEN FINAL

1. Las vigas sin arriostrar a lo largo y flexionadas por el eje fuerte son susceptibles de pandeo lateral con torsión.

2. Los principales factores que influyen en la resistencia al pandeo son el vano sin arriostrar, la esbeltez lateral (L/i_z), la forma de la sección, la distribución de momentos y el empotramiento.

3. Se pueden poner riostras de suficiente rigidez y resistencia que se opongan a la deformación por torsión o lateral.

4. Aunque la teoría de la carga elástica crítica ofrece la base para entender el comportamiento de las vigas sin arriostramiento lateral, requiere simplificaciones y modificaciones empíricas para que sea una base adecuada de un método de cálculo.

5. Debe hallarse la esbeltez efectiva $\overline{\lambda}_{LT}$ de una sección de prueba antes de verificar su resistencia al pandeo lateral.

6. En el proceso de cálculo se pueden añadir variaciones de las condiciones de apoyo lateral o de la forma de la carga aplicada mediante coeficientes k y C, para modificar bien la esbeltez básica λ_{LT} o el momento elástico crítico básico M_{cr}.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Narayanan, R., Editor, “Beams and Beam Columns: Stability and Strength”, Applied Science Publishers 1983. Los capítulos 1 - 3 tratan de varios aspectos de la conducta y el cálculo de vigas sin arriostrar lateralmente.

2. Chen, W. F. y Atsuta, T. “Theory of Beam Columns Volume 2, Space Behaviour and Design”, McGraw Hill 1977. El capítulo 3 trata de las vigas sin arriostramiento lateral.

3. Timoshenko, S. P. y Gere, J. M., “Theory of Elastic Stability” Segundaedición, McGraw Hill 1961. El capítulo 6 presenta las derivaciones básicas del momento elástico crítico de varios problemas de vigas.

4. Bleich, F., “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw Hill 1952. El capítulo 4 presenta la teoría básica del pandeo lateral de vigas.

5. Galambos, T. V., “Structural Members and Frames”, Prentiss Hall 1968. El capítulo 2 trata de los elementos del comportamiento elástico y el capítulo 3 del comportamiento elástico e inelástico y del cálculo de vigas sin arriostramiento lateral.

6. Trahair, N. S. y Bradford, M. A., “The Behaviour and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, Segunda edición, 1988. Las vigas sin arriostrar lateralmente se tratan en el capítulo 6.

APÉNDICE

Desviación de λ_{LT}

El momento elástico básico crítico M_{cr} se puede expresar así:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2}\left[\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 G I_t}{\pi^2 E I_z}\right]^{1/2}$$

Definiendo $\bar{\lambda}_{LT} = [M_{Rd} / M_{cr}]^{1/2} = [\lambda_{LT} / \lambda_1]$

siendo $\lambda_1 = \pi\left[E / f_y\right]^{1/2}$

Entonces λ_{LT} se puede expresar así:

$$\lambda_{LT} = [\pi^2 E W_{pl.y} / M_{cr}]^{1/2}$$

$$= \frac{L\left[W_{pl.y}^2 / I_z I_w\right]^{1/4}}{\left[1 + L^2 G I_t / \pi^2 E I_w\right]^{1/4}}$$

Definiendo $a_{LT} = (I_w / I_t)^{1/2}$

$$i_{LT} = \left(I_z I_w / W_{pl.y}^2\right)^{1/4}$$

y observando que

$$I_w = I_z h_s^2 / 4$$

siendo $h_s = h - t_f$

permite aproximarse a i_{LT} mediante:

$$i_{LT} = [I_z /(A^{-1/2} t_w h_s)]^{1/2}$$

y aproximarse a λ_{LT} mediante:

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_{LT}}{\left[1 + 1/20\left[\frac{L / i_{LT}}{h / t_f}\right]^2\right]^{1/4}}$$

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.9.2: Vigas no arriostradas II

OBJETIVO/CONTENIDO

Derivar la teoría básica del pandeo lateral con torsión y explicar el significado físico de las expresiones resultantes.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría de la flexión simple

Teoría de la torsión simple

Lección 8.4: Métodos generales para la determinación de cargas críticas

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Pilares

Lección 9.9.1: Vigas no arriostradas

LECCIONES AFINES

Lecciones 9.10.1 y 9.10.2: Vigas-Columna

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.9: Vigas no arriostradas lateralmente

RESUMEN

Esta lección presenta la teoría elástica básica de pandeo lateral con torsión de las vigas, empezando por el caso de una viga simplemente apoyada con momento uniforme. Se comentan las variaciones de la configuración de la carga, nivel de carga y arriostramiento del extremo. La derivaciones teóricas están separadas en dos apéndices, reduciéndose el texto principal a tratar las hipótesis de partida y el significado físico de las expresiones derivadas.

NOTACIÓN

b	anchura del ala
C_1	coeficiente para incluir el tipo de carga
h_f	distancia entre centroides del ala
EI_w	rigidez al alabeo
EI_z	rigidez a la flexión del eje menor
E	módulo de Young
F	carga aplicada
F_{cr}	carga elástica crítica de pandeo
GI_t	rigidez a la torsión
d	canto total de la sección
L	vano
M	momento
M_{cr}	momento elástico de pandeo crítico aplicado
t_f	espesor del ala
t_w	espesor del alma

1. INTRODUCCIÓN

El modelo básico que ilustra la teoría de pandeo lateral con torsión aparece en la Figura 1. Supone lo siguiente:

- viga inicialmente recta
- comportamiento elástico
- sección I de alas uniformes iguales
- extremos apoyados simplemente en el plano lateral (impedida la torsión y la flecha lateral, sin restricción al giro en planta)
- cargada con momentos iguales y opuestos en el plano del alma.

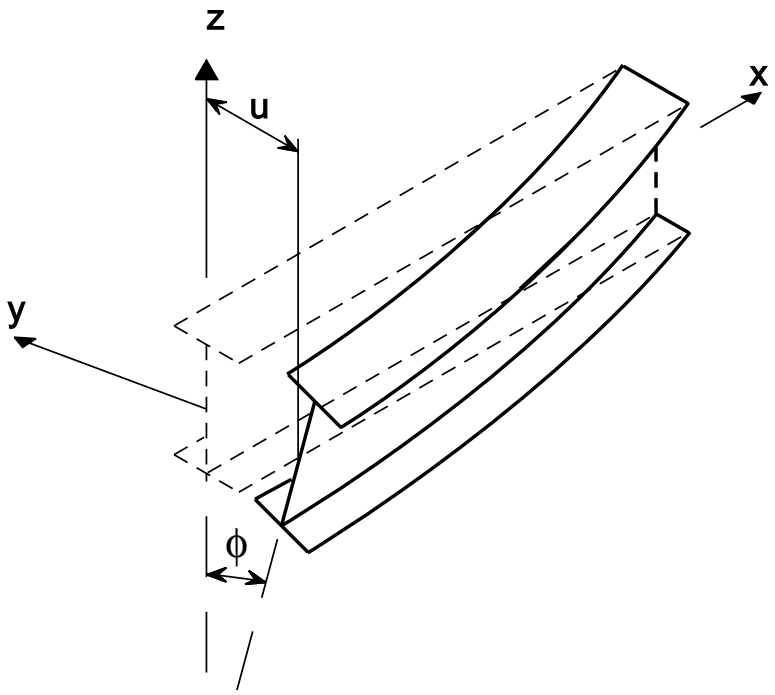


Figura 2 Posición de viga pandeada

Este problema puede considerarse análogo al del puntal biarticulado de Euler.

La viga se pone en posición pandeada, como en la Figura 2 y la magnitud de la carga aplicada es la necesaria para sostenerla en ese lugar, hallada igualando el efecto perturbador de los momentos en los extremos, que actúan por medio de las deformaciones de pandeo sobre la

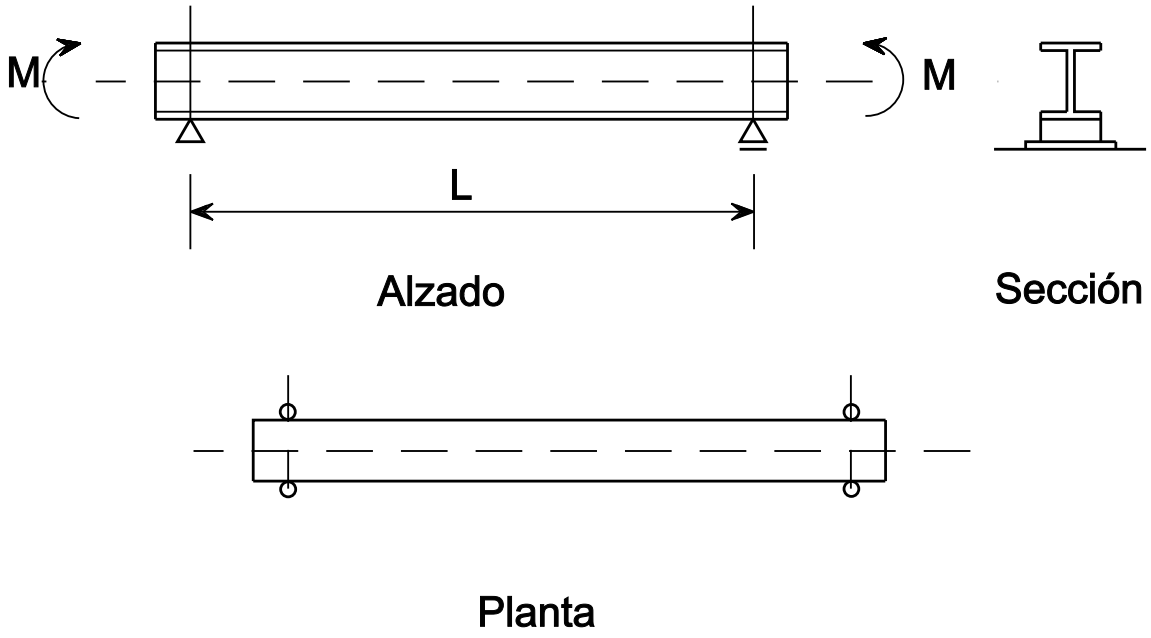


Figura 1 Definición del problema básico de pandeo lateral-torsional

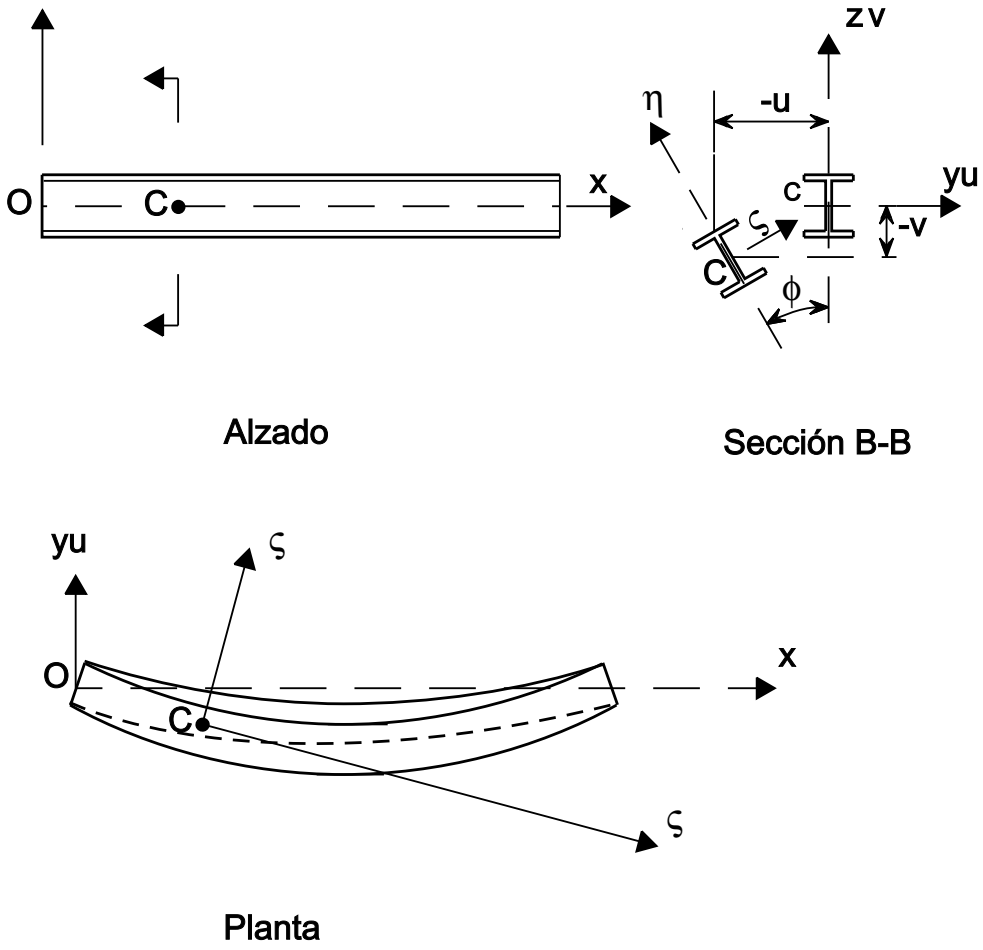


Figura 3 Deformaciones de la viga

resistencia (a la flexión y a la torsión) de la sección.

El Apéndice 1 presenta la derivación y despeje de las ecuaciones que arrojan el valor crítico de los momentos de los extremos (M_{cr}) a los que la viga empieza a ser inestable. Los apartados 2 y 3 siguientes tratan del significado físico de la solución y su aplicación en casos en que no se aplican las hipótesis anteriores.

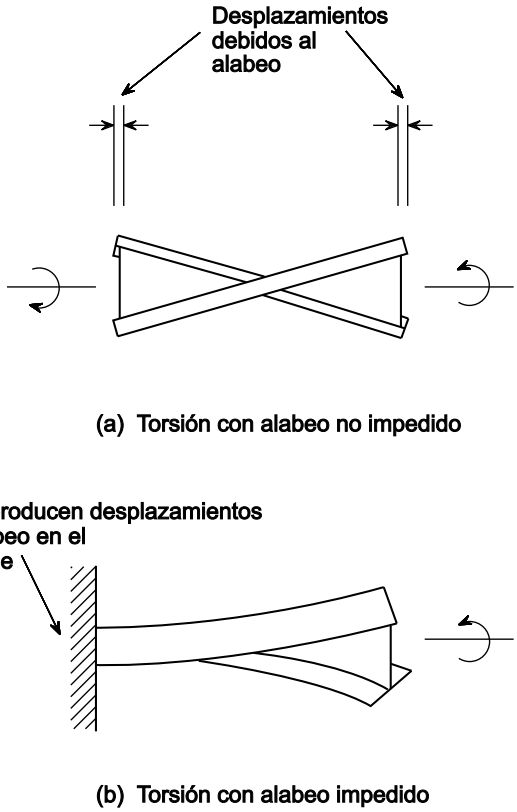


Figura 4

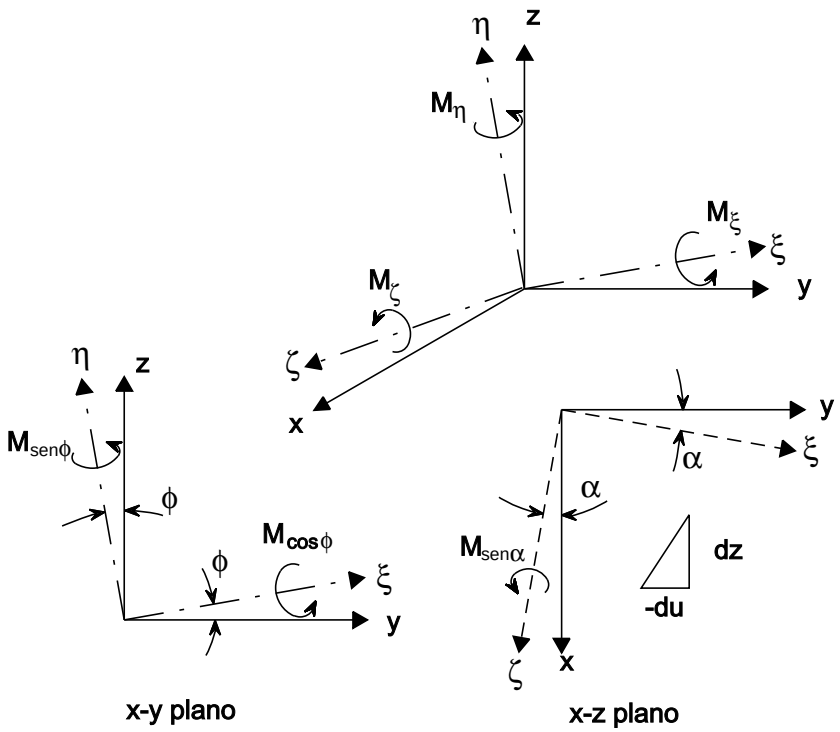


Figura 5 Solución al momento extremo descompuesto en sus componentes alrededor de los ejes deformados

2. SIGNIFICADO FÍSICO DE LA SOLUCIÓN

La forma pandeada de la viga, Figura 2, se compara ahora con la expresión del momento elástico crítico de la ecuación (17) (Apéndice 1):

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_z GI_t}\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (17)$$

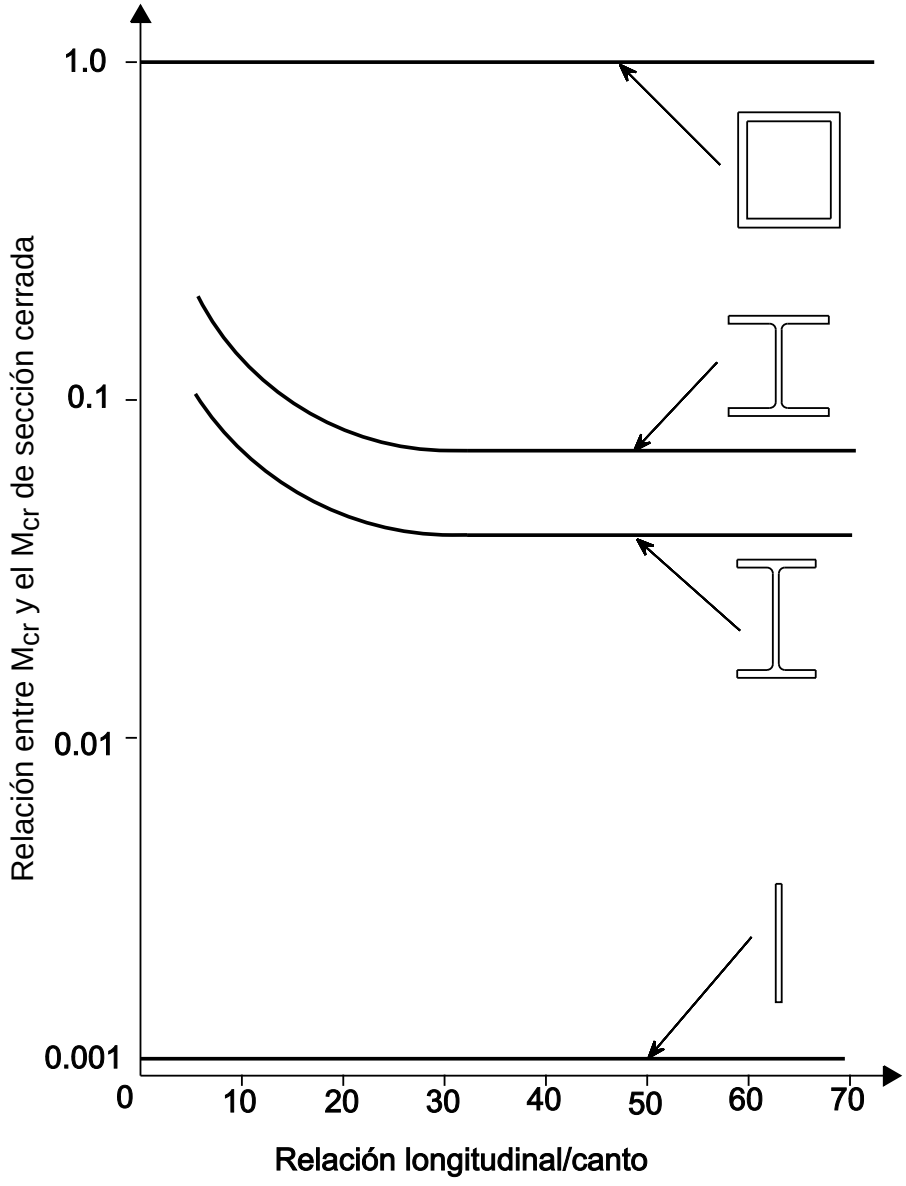
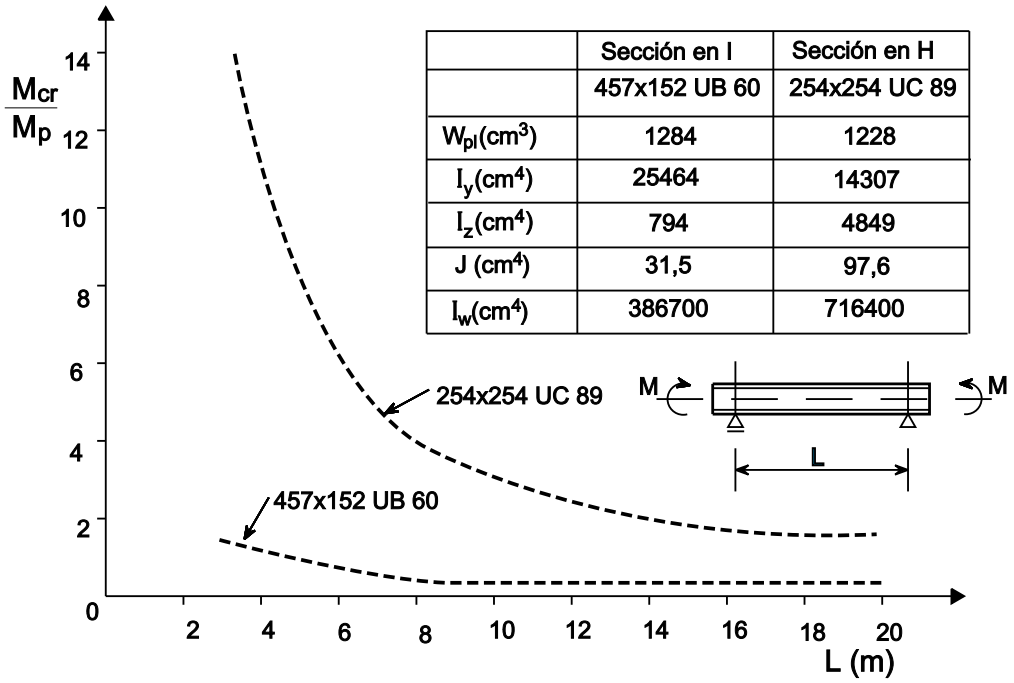


Figura 6 Efecto del tipo de sección transversal sobre el momento elástico crítico teórico

La presencia en la ecuación de rigidez a la flexión (EI_z) y a la torsión (GI_t y EI_w) del elemento es consecuencia directa de las componentes lateral y de torsión de las deformaciones de pandeo. La importancia relativa de los dos mecanismos que resisten la torsión se refleja en el segundo término de raíz cuadrada. La longitud también es importante y entra directa e indirectamente por medio del término $\pi^2 EI_w/L^2 GI_t$. No se puede simplificar la ecuación (17) omitiendo términos sin imponer límites al campo de aplicación de la ecuación (17) a los distintos tipos de sección ya definidos en la Lección 9.8.1. La región de las curvas de ambas secciones en I con baja relación longitud/canto corresponde a la situación en la que el segundo término de raíz cuadrada de la ecuación (17) adopta un valor significativamente mayor que la unidad. Dado que los efectos de alabeo (ver Apéndice 1) son más importantes en las secciones de mucho canto compuesta por chapas delgadas, se sigue que el término $\pi^2\ EI_w/L^2 GI_t$ tiende, en general, a ser grande en vigas cortas de mucho canto y pequeño en vigas largas de poco canto.

La Figura 7 da alguna indicación cuantitativa del efecto de la forma de la sección de vigas I estructurales, comparando los valores de M_{cr} de una viga (I) y un pilar (H) con aproximadamente igual capacidad de momento plástico en un plano. Está claro que el pandeo lateral con torsión puede tener mayor significación en el cálculo

de la sección de una viga que sea mucho menos rígida lateralmente.



	Sección en I	Sección en H
	457x152 UB 60	254x254 UC 89
$W_{pl}(cm^3)$	1284	1228
$I_y(cm^4)$	25464	14307
$I_z(cm^4)$	794	4849
J (cm^4)	31,5	97,6
$I_w(cm^4)$	386700	716400

Figura 7 Comparación de momentos elásticos críticos en secciones en I y en H producidas por esfuerzos de flexión similares en el plano

3. AMPLIACIÓN A OTROS CASOS

3.1 Configuración de la carga

Se puede redactar y resolver un equivalente de la ecuación (8) (Apéndice 1) para varios casos de carga. Por estar ahora el momento aplicado en cualquier punto del vano en función de x, las operaciones son más complejas. Por ejemplo, veamos la viga de la Figura 8 sometida a una carga central que incide al nivel del eje del centroide, cuyo análisis se esboza en el Apéndice 2.

Puede ser conveniente comparar la solución de este ejemplo con el caso básico en cuanto a los momentos críticos de ambos, es decir, el momento máximo cuando la viga está a punto de pandear.

Caso básico:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_z GI_t}\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (17)$$

Carga central:

$$M_{cr} = \frac{4{,}24}{L}\sqrt{EI_z GI_t}\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (21)$$

La relación de las dos constantes $\pi/4{,}24 = 0{,}74$ es la recíproca del coeficiente C_1 introducido en la Lección 9.9.1. Su valor es una medida directa de la intensidad de un esquema de momentos determinado respecto al caso básico.

La Figura 9, que da factores de C_1 para varias configuraciones de carga, indica cómo aumenta generalmente la estabilidad lateral a medida que el esquema de carga es menos uniforme.

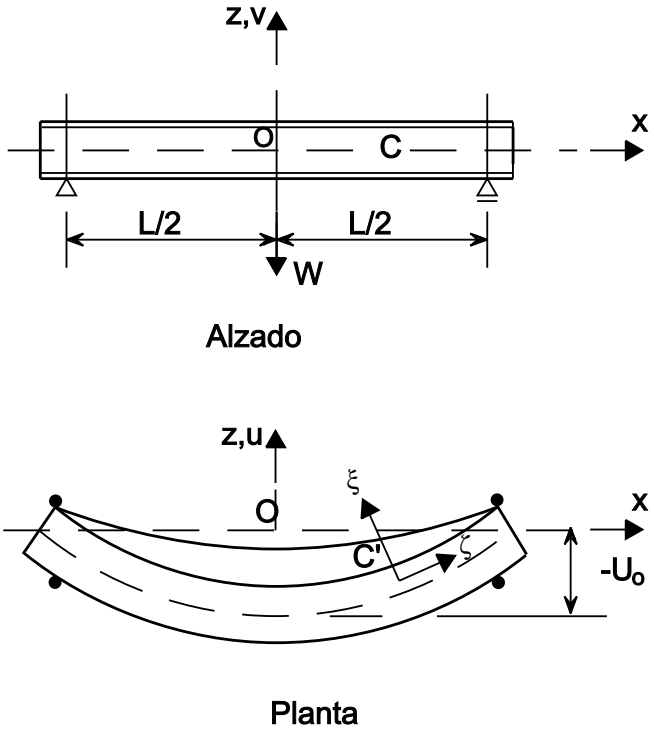


Figura 8 Pandeo de una viga con una carga transversal en el centro de vano

3.2 Nivel de la carga

El nivel de aplicación de la carga (respecto al centroide) es importante en las cargas transversales que tienen libertad de moverse lateralmente con la viga al pandear. La solución de una carga aplicada puntual a cualquier nivel respecto al eje centroide de la viga, se puede hallar fácilmente por el método de la energía descrito en el Apéndice 2. Cuando la carga se aplica bien al ala superior a la inferior, p.ej. por el carril de un puente grúa, sigue siendo útil la solución de la ecuación (21), siempre que la constante numérica se sustituya por una variable, cuyo valor depende de la relación L^2GI_t/EI_w, como en la Figura 10. La razón por la que cargar el ala superior o la inferior tiene menos intensidad que cargar el centroide, se aprecia en los croquis de la Figura 10, que muestran los efectos estabilizadores y desestabilizadores. Sin duda es de esperar que adquieran importancia al aumentar el canto de la sección y/o al reducirse el vano, o sea, a medida que L^2GI_t/EI_w se hace más pequeño.

$$M_{cr} = \frac{1}{C_1}\frac{\pi}{L}\sqrt{EI\,GJ}\sqrt{1+\frac{p^2 EI_w}{L^2 GJ}}$$

Vigas y cargas	Momento flector	$M_{máx}$	C_1
M M		M	1,00
M		M	0,60
M -M		M	0,40
F		$\frac{FL}{4}$	0,74
F		$\frac{FL}{8}$	0,89
F F		$\frac{FL}{4}$	0,94
F		$\frac{3FL}{16}$	0,68

Figura 9 Factor equivalente de momento uniforme m, para vigas simplemente apoyadas

3.3 Condiciones del apoyo lateral

La Lección 9.9.1 ya ha sugerido que la disposición del apoyo lateral que impide el aumento de las deformaciones de pandeo mejoran la estabilidad lateral de la viga. Igualmente, las soluciones menos efectivas reducen la estabilidad. Siempre que se puedan incorporar las condiciones límite a los métodos de análisis de los Apéndices 1 y 2, se puede resolver cualquier disposición.

Un modo cómodo de incluir el efecto de las condiciones de apoyo es redefinir L en la ecuación (17) haciendo que l sea la longitud efectiva, dependiendo el valor exacto de l/L del grado de restricción a la flexión lateral y/o al alabeo que exista. El Eurocódigo 3 divide este método aplicando dos factores:

k referido al giro del extremo en planta.

k_w referido al alabeo en el extremo.

Se recomienda tomar k_w como la unidad, a menos que se tomen medidas especiales para fijar el alabeo; k puede variar desde 0,5 a la fijación total, pasando por 0,7 con un extremo fijo y otro libre, hasta 1,0 sin fijación del giro.

Un caso de interés práctico particular es la ménsula, para la que la Figura 11 presenta varios resultados. Estos indican que:

1. Las ménsulas con momento en el extremo son menos estables que las vigas similares simplemente apoyadas.

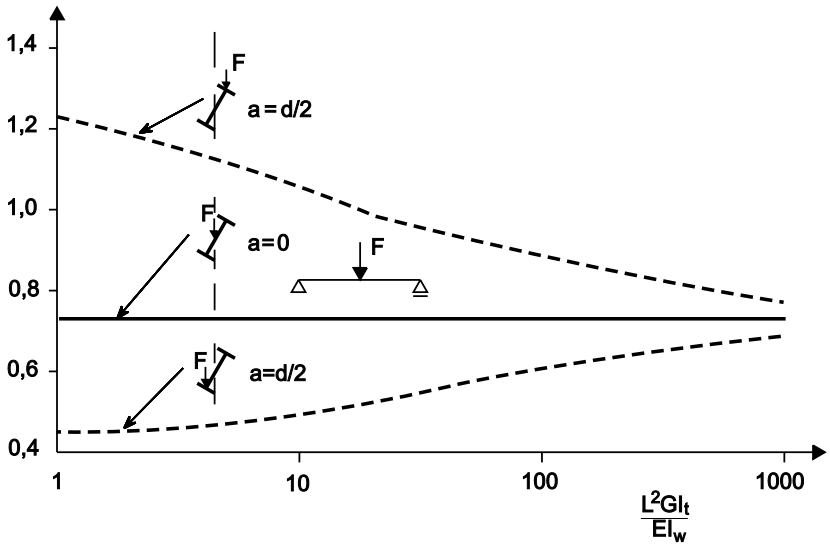


Figura 10 Efecto del nivel de carga sobre la estabilidad de la viga

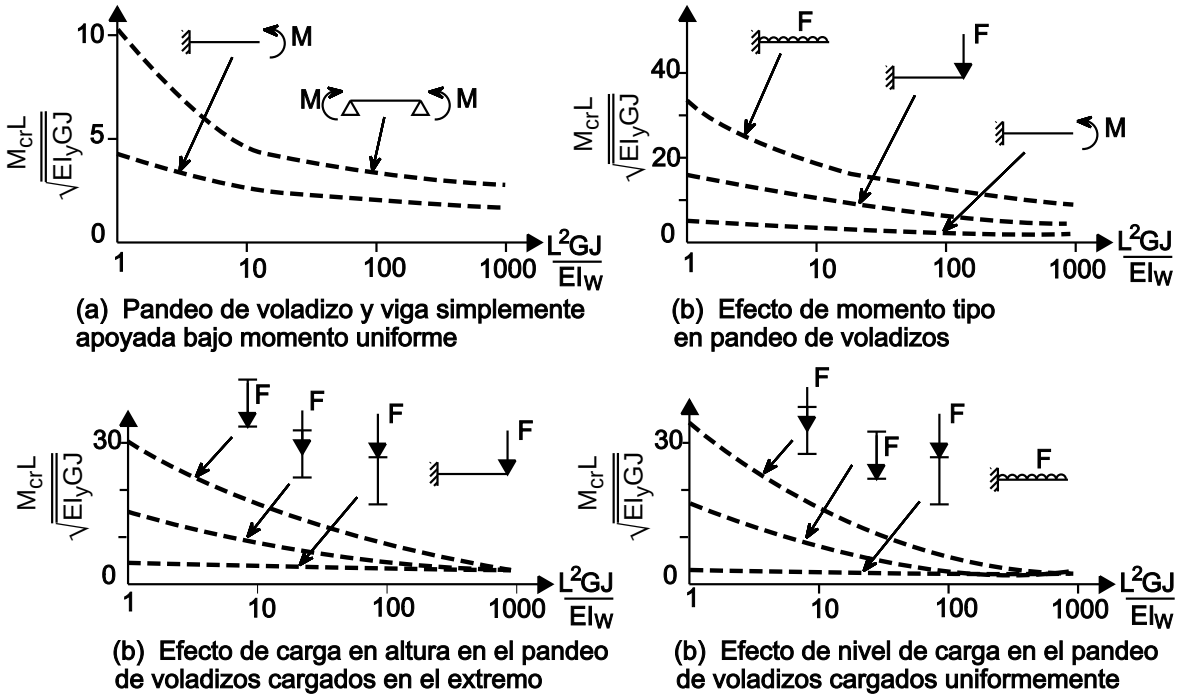


Figura 11 Pandeo de vigas en voladizo

2. Concentrar el momento próximo al apoyo, como sucede cuando la carga aplicada cambia de momento puro a carga en el extremo o a carga repartida, mejora la estabilidad lateral.

3. El efecto de la altura de la carga es más significativo en las ménsulas que en las vigas simplemente apoyadas.

3.4 Vigas continuas

La continuidad puede darse de dos formas:

1. En una viga de un solo vano en el plano vertical, pero subdividida por apoyos laterales intermedios, de modo que exhiba continuidad horizontal entre tramos contiguos, ver Figura 12a.

2. En el plano vertical, como se ve en la Figura 12b.

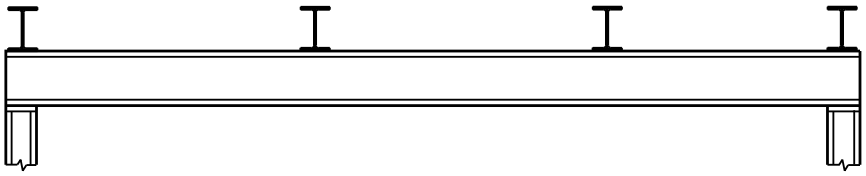
En el primer caso, el cálculo menos arriesgado sería tratar aisladamente el tramo más crítico y que sirva de base para calcular el resto de la viga. En el segundo caso habrá de tomarse en cuenta el diagrama de momentos real de cada vano, producido por la continuidad, aplicando el factor C_1. Si el ala superior puede considerarse empotrada por estar unida a una placa de hormigón, se prestará una atención especial a las regiones donde el ala inferior esté en compresión, p.ej.: la región o regiones de apoyo donde pueden existir cargas ascendentes.

3.5 Otras vigas que no sean secciones en I de doble simetría

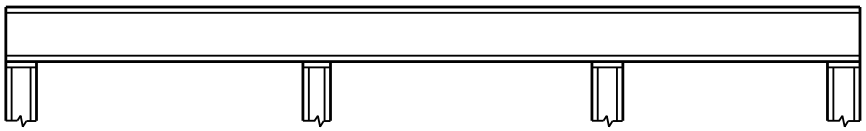
La solución teórica básica de la ecuación (17) es válida para la vigas simétricas por el eje horizontal, p.ej.: una U con el alma vertical, siempre que los momentos actúen en el centro de cizallamiento (que ahora coincide con el centroide). Sin embargo, las secciones simétricas solamente por el eje vertical, p.ej.: una I con alas

desiguales, requieren cierta modificación para admitir el llamado efecto de Wagner. Este efecto nace directamente de la separación vertical del centro de cizallamiento y el centroide que produce, bien el aumento o la disminución de la rigidez a la torsión. Así, la estabilidad lateral mejora cuando el ala menor está en compresión, respecto a las secciones de propiedades comparables, pero con alas iguales.

Las secciones sin eje de simetría no pandean realmente, sino que se deforman por flexión en los ejes principales y por torsión desde el momento que se cargan. Por lo tanto deben tratarse del mismo modo que las secciones simétricas con carga biaxial.



(a) Viga continua en plano horizontal



(b) Viga continua en plano vertical

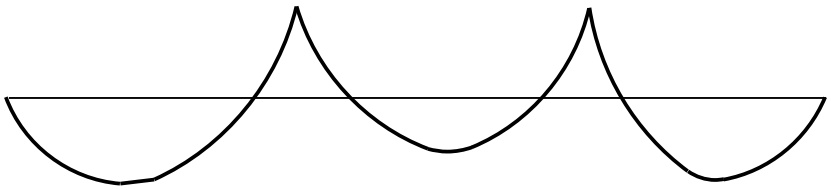


Figura 12 Dos formas diferentes de continuidad

3.6 Vigas arriostradas

El momento elástico crítico de una viga I bisimétrica, con arriostramiento elástico antitorsión de rigidez igual a K_ϕ, es:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_z GI_t}\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}+\frac{K_\phi L^2}{\pi^2 GI_t}}$$

Reorganizándolo vemos que la viga se comporta como si se aumentase la rigidez a la torsión a $(GI_t + K_\phi L^2/\pi^2)$, permitiendo así valorar fácilmente la eficacia del arriostramiento. Un ejemplo práctico importante de dicho arriostramiento es el que ofrece la rigidez a la flexión de la chapa de acero perfilada (que suele emplearse en la construcción de cubiertas) con las ondas perpendiculares respecto a la viga.

4. RESUMEN FINAL

1. El momento elástico crítico que causa el pandeo lateral por torsión de una viga esbelta se puede hallar mediante un análisis que tiene gran parecido con el que sirve para estudiar el pandeo de pilares.

2. El examen de la expresión del momento elástico crítico del problema básico permite conocer la influencia de la forma de la sección sobre la resistencia de la viga a la flexión lateral (EI_z), la torsión (I_t) y el alabeo (I_w); también prueba la importancia de la longitud del vano sin arriostrar.

3. Ampliando la teoría básica se pueden cuantificar los efectos del esquema de cargas, del arriostramiento del extremo y el nivel al que se aplica la carga desestabilizadora.

4. Las configuraciones de carga que producen un momento sin uniformidad son comparables con el caso básico de momento uniforme, aplicando el coeficiente C_1; como casi todos estos casos son menos extremos, los valores C_1 mayores de 1,0 son la norma.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Narayanan, R., Editor, “Beams and Beam Columns: Stability and Strength”, Applied Science Publishers 1983. Los capítulos 1 - 3 tratan de varios aspectos del comportamiento y cálculo de vigas sin arriostrar lateralmente.

2. Chen, W. F. y Atsuta, T. “Theory of Beam Columns Volume 2, Space Behaviour and Design”, McGraw Hill 1977. El capítulo 3 trata de las vigas sin arriostrar lateralmente.

3. Timoshenko, S. P. y Gere, J. M., “Theory of Elastic Stability” Segunfa edición, McGraw Hill 1961. El capítulo 6 ofrece derivaciones básicas del momento elástico crítico de varios problemas de vigas.

4. Bleich, F., “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw Hill 1952. El capítulo 4 presenta la teoría básica del pandeo lateral de vigas.

5. Galambos, T. V., “Structural Members and Frames”, Prentiss Hall 1968. El capítulo 2 trata del comportamiento elástico fundamental, y el capítulo 3 se ocupa del comportamiento elástico e inelástico y del cálculo de vigas sin arriostramiento lateral.

6. Trahair, N. S. y Bradford, M. A., “The Behaviour and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, Segunda edición, 1988. Las vigas sin arriostrar lateralmente se tratan en el capítulo 6.

APÉNDICE 1

ANÁLISIS DEL PANDEO LATERAL CON TORSIÓN

Derivación de las ecuaciones rectoras

El estado deformado de la viga se presenta en la Figura 3, señalando las flechas (u y v) y la torsión (ϕ). Ilustra también nuevo sistemas de coordenadas $\xi\eta\zeta$, que se deflectan con la viga. La flexión en los planos $\xi\zeta$ y $\eta\zeta$ y la torsión por el eje ζ son regidas por:

$$EI_y \frac{d^2y}{dx^2} = M\xi \qquad (1)$$

$$EI_z \frac{d^2u}{dx^2} = M\eta \qquad (2)$$

$$GI_t \frac{d\phi}{dx} - EI_w \frac{d^3\phi}{dx^3} = M\zeta \qquad (3)$$

Las rigideces a la flexión y curvaturas de las ecuaciones (1) y (2) en los planos $\xi\zeta$ y $\eta\zeta$ se han sustituido por los valores de los planos yz y zx, sobre la base de que ϕ es un ángulo pequeño. La ecuación (3) contiene los dos mecanismos de que dispone una sección de paredes delgadas para resistir la torsión; el primer término corresponde a la parte del par torsor aplicado que es resistido por la formación de tensiones cortantes, en tanto que el segundo término introduce la influencia del alabeo reprimido. Este último fenómeno nace como resultado directo del tipo de deformación axial del ala, ilustrado por la Figura 4a, que ocurre en una sección I sometida a pares torsores iguales y opuestos en los extremos. Las dos alas tienden a flexionarse en sentido opuesto por un eje vertical que atraviesa el alma, con el resultado de que los planos de la sección dejan de ser planos. Por otra parte, en la ménsula de la Figura 4b, está claro que las deformaciones por alabeo son reprimidas en alguna parte del vano, ya que eso no puede ocurrir en el extremo fijo. Esto origina otras tensiones axiales en las alas; los dos pares, o bimomento, debido a este sistema de tensiones adicional, aporta una parte de la resistencia a la tensión de la sección. En el caso de inestabilidad lateral, la oposición al alabeo es resultado de que las secciones adyacentes intentan alabearse en distinta cantidad. Las magnitudes relativas de la constante de alabeo I_w y de la constante de torsión I_t de una sección en I, son:

$$I_w = I_z \frac{hf^2}{4} \text{ e } I_t = \frac{2bt^3}{3} + \frac{dt_w{}^3}{3}$$

Se verán afectadas principalmente por el espesor de las chapas que componen la sección y por su canto. En las secciones de pilares tipo compacto, el primer término de la ecuación (3) tiende a ofrecer la máxima resistencia a la torsión, mientras que el segundo término tiende a ser dominante en las vigas de más canto.

Considerando las formas de pandeo de las Figuras 2, 3 y 5 se pueden hallar las componentes del momento aplicado en los planos $\xi\zeta$ y $\eta\zeta$ y alrededor del eje ζ, que se obtienen:

$$M\xi = M\cos\phi,\ M\eta = M\text{sen}\phi,\ M\zeta = M\text{sen}\alpha \qquad (4)$$

Dado que ϕ es pequeño, $\cos\phi \approx 1$ y $\text{sen}\phi \approx \phi$, y que la Figura 5 indica que $\text{sen}\alpha$ puede ser aproximado por $-\frac{du}{dx}$. Entonces la ecuaciones (1) - (3) se pueden expresar así:

$$EI_y \frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad (5)$$

$$EI_z \frac{d^2u}{dx^2} = M\phi \qquad (6)$$

$$GI_t \frac{d\phi}{dx} - EI_w \frac{d^3\phi}{dx^3} = M\frac{du}{dx} \qquad (7)$$

Puesto que la ecuación (5) sólo contiene la flecha vertical (v), es independiente de las otras dos y rige la respuesta en plano de la viga

descrita en la Lección 9.5.1. Las ecuaciones (6) y (7) se emparejan en u y ϕ, las deformaciones de pandeo; su solución arroja el valor del momento elástico crítico (M_{cr}) al que la viga se hace inestable. Combinándolas tenemos:

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z}\phi = 0 \qquad (8)$$

Solución

La solución de la ecuación (8) se hace muy simple si se presume que la rigidez al alabeo (I_w) es cero. Los resultados obtenidos son entonces directamente aplicables a vigas de sección rectangular estrecha, pero son moderados para la gama normal de secciones en I. La ecuación (8) por tanto se reduce a:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z GI_t}\phi = 0 \qquad (9)$$

Poniendo $\mu^2 = \frac{M^2}{EI_z GI_t}$ se puede redactar así la solución:

$$\phi = A\cos\mu x = B\,\mathrm{sen}\mu x \qquad (10)$$

Tomando las condiciones límite de ambos extremos, tenemos que

Cuando x = 0, ϕ = 0; entonces A = 0 (11)

Cuando x = L, ϕ = 0; entonces $B\,\mathrm{sen}\mu L = 0$

y B = 0, ó (12)

$\mathrm{sen}\mu L = 0$ (13)

La primera posibilidad da la posición sin pandeo mientras que la segunda da:

$\mu L = 0, \pi, 2\pi$ (14)

y la primera solución no trivial es:

$\mu L = \pi$ (15)

que da:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_z GI_t} \qquad (16)$$

Puesto que la forma de la ecuación (9) es idéntica a la de la ecuación básica para el puntal de Euler, se aplican las mismas razones a esta solución.

Volviendo a la ecuación (8) inicial, se puede despejar para que dé:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_z GI_t}\sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (17)$$

Por lo tanto, la inclusión de los efectos de alabeo mejora el valor de M_{cr} en una cantidad que depende de los valores relativos de EI_w y GI_t.

APÉNDICE 2

PANDEO DE UNA VIGA CARGADA EN EL CENTRO

Tomando el planteamiento del Apéndice 1 y observando que en la Figura 7 la carga vertical produce un momento de $\frac{W}{2}(u_o - u)$ en el eje x cuando la viga está en posición de pandeo, se pueden modificar así las ecuaciones 4:

$$M\xi = \frac{W}{2}(\frac{L}{2} - x)$$

$$M\eta = \frac{W}{2}(\frac{L}{s} - x)\,\text{sen}\,\phi \qquad (18)$$

$$M\zeta = \frac{W}{2}(\frac{L}{2} - x)\,\text{sen}\,\alpha + \frac{W}{2}(u_o - u)\cos\alpha$$

Cambiando las ecuaciones (5) - (7) por sus formas modificadas y eliminando u de la segunda y tercera de éstas, tenemos:

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{W^2}{4EI_z}(\frac{L}{2} - x)^2\,\phi = 0 \qquad (19)$$

que puede resolverse para W_{cr} en fluencia aproximadamente:

$$W_{cr} = 5{,}4\,\frac{\pi}{L^2}\sqrt{EI_z\,GI_t}\,\sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (20)$$

Entonces el momento en el medio del vano es:

$$M_{cr} = \frac{4{,}24}{L}\sqrt{EI_z\,GI_t}\,\sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \qquad (21)$$

Otro modo de hallar las cargas elásticas críticas es por el método de la energía, en él se iguala el trabajo realizado por la carga aplicada durante el pandeo con la energía de tensión que se acumula a resultas de las deformaciones de pandeo. Tomando un elemento de longitud dx del eje longitudinal de la viga en C, la flexión en el plano $\xi\zeta$ hace que el extremo B de la viga gire esto en el plano $\xi\zeta$:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(\frac{L}{2} - x)\,dx \qquad (22)$$

La componente vertical es:

$$\phi\frac{d^2u}{dx^2}(\frac{L}{2} - x)\,dx \qquad (23)$$

Sumando esto por todos los elementos entre x = 0 y x = L/2, tenemos el descenso de la carga W, de donde el trabajo es:

$$W\int_o^{L/2} \phi\frac{d^2u}{dx^2}(\frac{L}{2} - x)\,dx \qquad (24)$$

La energía de tensión acumulada a resultas de la flexión lateral, la torsión y el alabeo es:

$$\frac{EI_z}{2}\int_o^L [\frac{d^2u}{dx^2}]^2\,dx + \frac{EI_w}{2}\int_o^L [\frac{d^2\phi}{dx^2}]^2\,dx + \frac{GI_t}{2}\int_o^L [\frac{d\phi}{dx}]^2\,dx \qquad (25)$$

Suponiendo que la forma de pandeo es así:

$$\phi = a_1\cos\frac{\pi x}{L} + a_2\cos\frac{3\pi x}{L} \qquad (26)$$

e igualando las ecuaciones (24) y (25) se puede hallar el valor crítico de W.

Esta técnica permite examinar el caso en que la carga se aplica a otro nivel fuera del eje del centroide. Suponiendo que W actúa a una distancia vertical (a) del centroide, el trabajo adicional sería:

$$Wa\,(1 - \cos\phi_o) = Wa\,\phi_o^2/2$$

siendo ϕ_o el valor de ϕ en el punto cargado. Esto debe sumarse a la ecuación (24).

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.9(i), (ii) Y (iii): Vigas no arriostradas lateralmente

CONTENIDO

Problema resuelto 9.9(i): Sección I simplemente apoyada

Problema resuelto 9.9(ii): Viga compuesta monosimétrica para puente grúa

Problema resuelto 9.9(iii): Viga continua arriostrada lateralmente

Cuando procede, los cálculos se han hecho con arraglo al Eurocódigo 3 [1].

[1] Eurocódigo 3: Cálculo de Estructuras de Acero : ENV 1993-1-1: Parte 1.1: Regla General y Reglas para Edificios, CEN, 1992.

PROBLEMA 9.9(i)

Referencia en Eurocódigo 3

Problema

Comprobar la capacidad de una pieza de 500 x 200 x 90,7 (IPE) de acero Fe 360 para soportar una sobrecarga de 24 kN repartida uniformemente en un vano de 6 m. Los extremos están unidos por el alma a las alas de los pilares mediante ejiones dobles.



Con los extremos unidos de este modo, es razonable suponer que la viga trabaja como si estuviera solamente apoyada en al plano vertical y con restricción total contra la deflexión lateral y la torsión, sin sujeción contra el giro den los extremos. Para simplificar este primer problema, se presume que la carga incide a la altura del centro de cizallamiento (centroide). Puede incluirse carga en el ala superior para hallar λ_{LT}

Referencia en Eurocódigo 3

Clasificación de la sección:

$\varepsilon = 1$ para $f_y = 235\ N/mm^2$

EC3 Tabla 5.31

$$\text{Ala}\ \frac{c}{t_f} = \frac{(200/2)}{16} 6,25 \leq 10\,\varepsilon$$

$$\text{Alma}\ \frac{d}{t_w} = \frac{426}{10,2} = 41,76 \leq 72\,\varepsilon$$

La sección elegida es de la Clase 1

$h = 500\ mm$ $\qquad W_{p.y} = 2194\ cm^3$

$b = 200\ mm$ $\qquad i_z = 4,31\ cm$

$t_f = 16\ mm$ $\qquad d = 426\ mm$

$tw = 10,2\ mm$

Esbeltez:

$$\lambda_{LT} = \frac{0,9\,L/i_z}{[C_1]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{L/i_z}{h/t_f}\right]^2\right]^{1/4}}$$

App. F.2.2 (5)

Según la Tabla F.1.2 para carga repartida, viendo que no hay restricción presente en los extremos y que k = 1,0:

$C_1 = 1,132$

Tabla F.1.2

$$\therefore \lambda_{LT} = \frac{0,9 \times 6 \times 10^3 / 43,1}{[1,132]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{6 \times 10^3 / 43,1}{500/16}\right]^2\right]^{1/4}}$$

$= 99,1$

5.5.2

$\overline{\lambda}_{LT} = [\lambda_{LT} / \lambda_1]\,[\beta_w]^{1/2}$

Referencia en Eurocódigo 3

siendo $\lambda 1 = 93{,}0\ [235/f_y\ ]^{1/2} = 93{,}9$

$\beta_w = 1$ en las secciones Clase 1 ó 2

$\overline{\lambda}_{LT} = [99{,}1/93{,}9] = 1{,}05$

Curva a

5.5.2(4)
Tabla 5.5.2

$\chi_{LT} = 0{,}640$

y $M_{b.Rd} = \chi_{LT}\ \beta w\ W_{pl.y}\ f_y\ /\ \gamma_M$

$= 0{,}64 \times 1 \times 2194 \times 10^3 \times 235/1{,}1$

$= 299\ 979$ Nm

$= 300$ kNm

Para un vano de 6 m simplemente apoyado

$$M_{Sd} = \frac{24 \times 6^2}{8} = 108\ \text{kNm} < 300\,\text{kNm}$$

Como el momento de resistencia supera este valor, la sección vale.

Adóptese 500 x 200 x 90,7 (IPE)

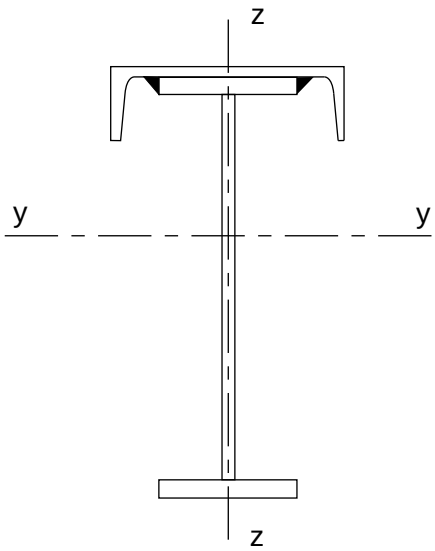
PROBLEMA 9.9(ii)

Referencia en Eurocódigo 3

Problema

Averiguar la estabilidad lateral de una viga de puente grúa formada por una sección de 750 x 222 x 222 (IPE) con un perfil en U de 400 x 110 x 71,8 unido al ala superior.

Los puntos de arriostramiento efectivo lateral y antitorsión están a intervalos de 10 m y el momento de rotura de cálculo es 2000 kNm. El acero es Fe 360.



Propiedades de las secciones:

		Sección U			Sección I
I_z	=	20350 cm^4	I_z	=	9604 cm^4
A	=	91,5 cm^2	A	=	283 cm^2
h	=	400 mm	h	=	778 mm
b	=	110 mm	b	=	269 mm
t_f	=	18 mm	t_f	=	29,5 mm
t_w	=	14 mm	t_w	=	17 mm
I_t	=	81,6 cm^4	I_t	=	605 cm^4
g_y	=	2,65 cm	$W_{pl.y}$	=	8225 cm^2

Sección compuesta

Referencia en Eurocódigo 3

$A = 283 + 91,5 = 374,5\ cm^2$

$I_z = 9604 + 20350 = 29954\ cm^4$

$i_z = [29954/374,5]^{0,5} = 8,94\ cm$

$I_{fc} = [20350 + 2,95 \times 26,9^3/12] = 25135,1\ cm^4$

$I_{ft} = [2,95 \times 26,9^3/12] = 4785,17\ cm^4$

$\beta_f = I_{fc}/(I_{fc} + I_{ft}) = 0,84$ — *App. F.1.4*

$I_w = \beta_f (1 - \beta_f) I_z h_s^2$

$I_w = 0,84 (1 - 0,84) \times 29954 \times (778 + 14 - 29,5)^2$

$= 2341 \times 106\ cm^6$

$Z_j = 0,8 (2\beta_f - 1) (1 + h_c/h) h_s/2$

$= 0,8 (2 \times 0,84 - 1)$

$$= 0,8\,(2 \times 0,84 - 1)\left(1 + \frac{110}{792}\right) \times \frac{762,5}{2} = 236,2\ \text{mm}$$

$I_t = I_{tc} + I_{tl}$

$= 81,6 + 605 = 686,6\ cm^4$

Para calcular λ_{LT} es necesario calcular antes el momento elástico crítico M_{cr}. Entonces, para un valor de $k_w = 1,0$ y $k = 1$;

$C_1 = 1,365$

$C_3 = 1,730$

(Nótese que C_2 no hace falta)

Tabla App. F.1.2 F.2.2 F.1.2

Referencia en Eurocódigo 3

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(kL)^2} \left\{ \left[\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(kL)^2 G I_t}{\pi^2 E I_z} + (0 - C_3 Z_j)^2 \right]^{1/2} - (0 - C_3 Z_j) \right\} =$$

$$= 1,365 \frac{\pi^2 \, 210 \times 10^3 \times 29954 \times 10^4}{12000^2}$$

$$\left\{ \left[(1)^2 \frac{2340,6 \times 10^{12}}{29954 \times 10^4} + \frac{12000^2 \times 81000 \times 686,6 \times 10^4}{\pi^2 \times 210000 \times 29954 \times 10^4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (0 - 1,73 \times 236,2)^2 \right]^{1/2} - (0 - 1,73 \times 236,2) \right\}$$

= 5884966,9 {[7813981,4 + 128996,35 + 166975,2]$^{1/2}$

+ 0 + 408,626}

= 1,9164 x 10^{10} Nmm

= 19164 kNm

$$\bar{y} = \frac{A_c \times g_y + A_B \times \left(t_{wc} + \frac{h_B}{2} \right)}{(A_c + A_B)} =$$

$$= \frac{91,5 \times 2,65 + 283 \left(1,4 + \frac{77,8}{2} \right)}{(91,5 + 283)}$$

= 31,1 cm = 311 mm

Puesto que el eje neutro plástico (PNA) está en la viga, el módulo plástico se puede calcular así:

Área total = $A_B + A_c$

= 283 + 91,5 = 374,5 cm^2

Área bajo el PNA = $\frac{A_B + A_c}{2} = \frac{374,5}{2} = 187,25$ cm^2

Referencia en Eurocódigo 3

Área bajo la línea central = $\frac{A_B}{2}$

= $\frac{283}{2} = 141,5\ cm^2$

Área sombreada del diagrama

(ver diagrama) = Área bajo el PNA – Área bajo línea central

= 187,25 – 141,5 = 45,75 cm^2

Por lo tanto:

$$\chi = \frac{45,75 \times 100}{17} = 269,2\ mm$$

Módulo plástico de la viga carril:

$\Rightarrow W_{pl.y}$ = $W_{pl.y.B} - \chi^2\ t_{w.B} + A_c \times L_a$

siendo L_a = $\frac{h_B}{2} + t_{wc} - g_y = \frac{778}{2} + 14 - 26,5 = 37,65\ cm$

= $8225 - 26,92^2 \times 1,7 + 91,5 \times 37,65$

$W_{pl.y}$ = $10438\ cm^3$

$\bar{\lambda}_{LT}$ = $[\lambda_{LT} / \lambda_1]\ [\beta_w]^{1/2}$ *F.2.1*

λ_{LT} = $[\pi^2 E\ W_{pl.y} / M_{cr}]^{1/2}$

= $[\pi^2 \times 210000 \times 10,438 \times 10^6 / (19164 \times 10^6)]^{1/2}$

= 33,6

$\bar{\lambda}_{LT}$ = [33,6/93,9] = 0,357

Aplicando la curva (a) Tabla 5.5.2 *Tabla 5.5.2*

χ_{LT} = 0,965

$M_{b.Rd}$ = 0,965 x 10,438 x 235/1.1

= 2151,9 kNm

Que supera el valor de M_{Sd} de 2000 kNm

Adóptese esta sección

PROBLEMA 9.9(iii)

Referencia en Eurocódigo 3

Problema

Una viga de 9,8 m de luz está cargada por vigas transversales situadas a 4,3 m y 6,6 m del extremo izquierdo. Ambos extremos de la viga y los dos puntos donde incide la carga pueden considerarse totalemente arriostrados lateralmente y contra la torsión.

La composición de momentos en la viga es:

A Extremo izquierdo – 130 kNm

B 1ª viga transversal 260 kNm

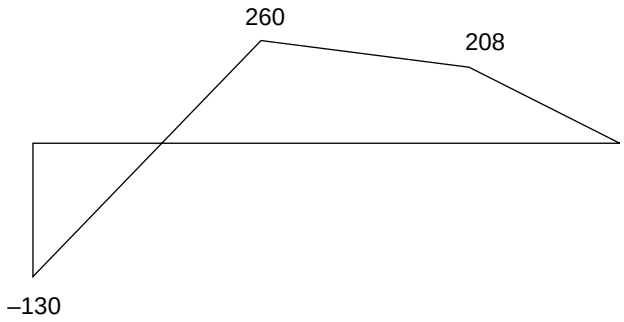
C 2ª viga transversal 208 kNm

D Extremo derecho 0 kNm

Comprobar si una sección de 500 x 200 x 90,7 (IPE) de acero Fe 360 sería idónea. Todos los momentos corresponden a la carga de rotura.

La viga y el diagrama de momentos se presenta debajo. Hay que comprobar la estabilidad lateral de los segmentos AB, BC y CD con el diagrama de momento correspondiente a cada uno.





Referencia en Eurocódigo 3

Propiedades de la sección

h	=	500 mm	$W_{pl.y}$	=	2194 cm^3
t_f	=	16 mm	i_z	=	4,31 cm
λ_1	=	93,9 $[235/f_y]^{1/2}$		=	93,9

$$\lambda_{LT} = \frac{0,9\,L/i_z}{[C_1]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{L/i_z}{h/t_f}\right]^2\right]^{1/4}}$$

F.2.2(5)

Según la Tabla F.1, notando que k = 1

AB	ψ	=	– 130/260	=	– 0,5
	C_1	=	2,704		
BC	ψ	=	208/260	=	0,80
	C_1	=	1,112		
CD	ψ	=	0/260	=	0,000
	C_1	=	1,879		

AB λ_{LT} =

$$\frac{4,3\times10^3/43,1}{[2,704]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{4,3\times10^3/43,1}{500/16}\right]^2\right]^{1/4}}$$

= 54,73

$\overline{\lambda}_{LT}$ = [54,73/93,9] = 0,5828

Aplicando la curva (a)

5.5.2
Tabla 5.5.2

χ_{LT}	=	0,8968	
$M_{b.Rd}$	=	0,8968 x 1 x 2194 x 10^3 x 235/(1,1 x 10^6)	
	=	420,35 kNm	

Referencia en Eurocódigo 3

BC $\lambda_{LT} = \dfrac{2,3 \times 10^3 / 43,1}{[1,112]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{2,3 \times 10^3 / 43,1}{500/16}\right]^2\right]^{1/4}}$

$= 48,91$

$\overline{\lambda}_{LT} = [48,91/93,9] = 0,52$

$\chi_{LT} = 0,9174$

$M_{b.Rd} = 0,9174 \times 1 \times 2194 \times 10^3 \times 235/(1,1 \times 10^6)$

$= 430$ kNm

CD $\lambda_{LT} = \dfrac{3,2 \times 10^3 / 43,1}{[1,879]^{1/2}\left[1+\frac{1}{20}\left[\frac{3,2 \times 10^3 / 43,1}{500/16}\right]^2\right]^{1/4}}$

$= 50,9$

$\overline{\lambda}_{LT} = [50,9/93,9] = 0,542$

$\chi_{LT} = 0,91$

$M_{b.Rd} = 0,91 \times 1 \times 2194 \times 10^3 \times 235/(1,1 \times 10^6)$

$= 426,53$ kNm

Segmento	M_{Sd} [kNm]	$M_{b.Rd}$ [kNm]
AB	260	420,35
BC	260	430,00
CD	208	426,53

Puesto que la resistencia al pandeo es mayor que el momento aplicado en cada segmento, adóptese la sección 500 x 200 x 90, 7 IPE.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.10.1: Vigas-columna I

OBJETIVO/CONTENIDO

Presentar los principios del comportamiento de viga-columna o pilar excéntrico por medio de los conceptos de acción recíproca de los componentes de compresión y flexión de la carga.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría de la flexión simple

Lección 9.2: Clasificación de secciones transversales

Lecciones 9.5.1 y 9.5.2: Pilares

Lecciones 9.8.1 y 9.8.2: Vigas arriostradas

LECCIONES AFINES

Lección 9.11: Pórticos

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.10: Vigas-columna

RESUMEN

Esta lección explica los conceptos básicos de la acción recíproca entre los efectos de flexión y compresión, concentrándose en la conducta uniaxial en un plano. De este modo se pueden explicar temas tales como la ampliación de momentos, las fórmulas de acción recíproca y la aplicación de la resistencia a la compresión y a la flexión, sin las complicaciones de considerar la torsión y la respuesta fuera del plano.

1. INTRODUCCIÓN

Las vigas-columna se definen como elementos sometidos a flexión y compresión combinados. En principio, todos los elementos de un pórtico son vigas-columna, siendo el caso de las vigas (F = 0) y de los pilares los dos extremos. Son posibles varios tipos de respuesta según el modo exacto en que se transmitan las cargas aplicadas a un elemento, la forma de apoyo dispuesta y la forma de la sección del elemento.

El más sencillo consiste en la flexión por un solo eje principal, siendo la reacción del elemento la de flexionarse solamente en el plano del momento aplicado. Este caso es el único que se tratará en esta lección; la Lección 9.10.2 se ocupa del comportamiento más complejo.

2. COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN

La Figura 1 presenta un punto en algún lugar del fuste de un pilar en H, donde la compresión aplicada y el momento en el eje y producen las tensiones uniformes y en varias distribuciones que muestran las Figuras 1a y 1b.

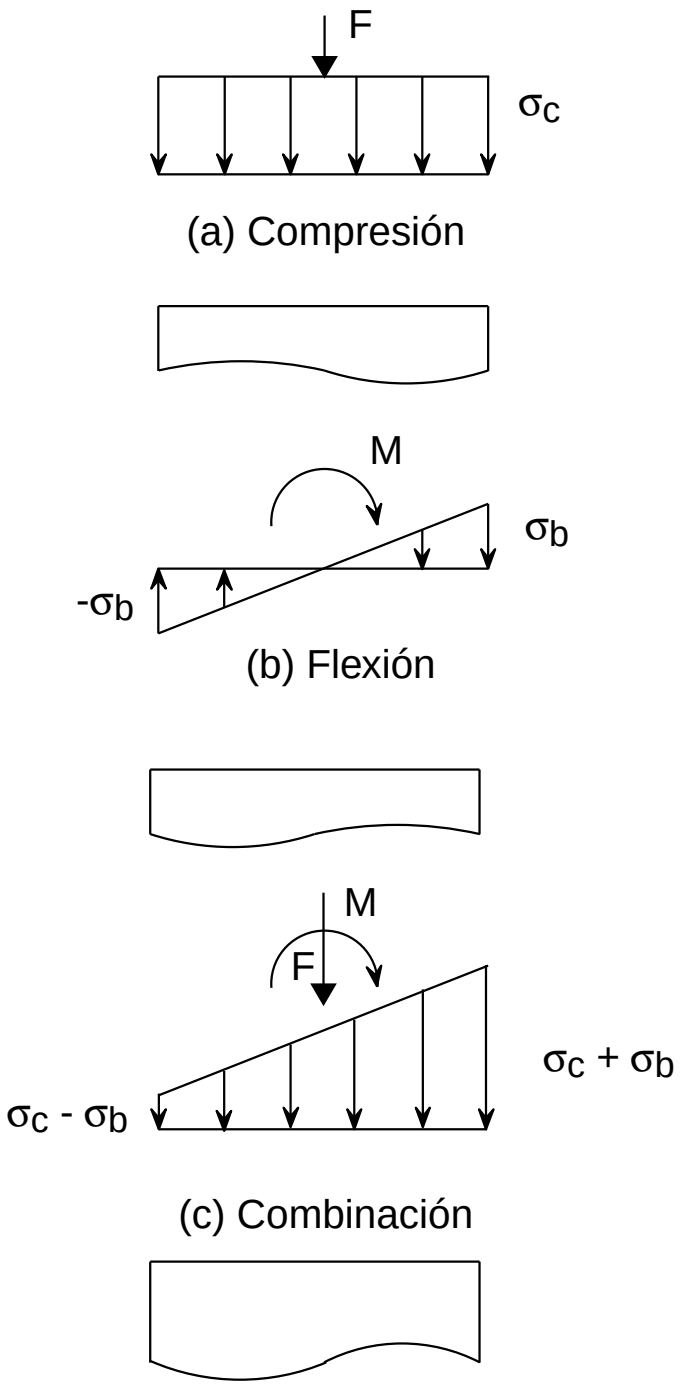


Figura 1 Comportamiento elástico de una sección transversal en compresión y en flexión

Cuando el comportamiento es elástico, los dos repartos de tensiones de la Figura 1c se pueden sumar simplemente por superposición. Por lo tanto, se formará la primera fluencia en el borde donde ocurre la máxima tensión de flexión por compresión, que corresponde a esta condición:

$$f_y = \sigma_c + \sigma_b \qquad (1)$$

siendo:

f_y la tensión de fluencia del material

$\sigma_c = N/A$ la tensión debida a la carga de compresión N

σ_b el $\frac{M\,h/2}{I}$ la tensión máxima de compresión

debida al momento M, h el canto total de la sección, e I el momento de inercia del área en el eje y.

O bien, si se permite llegar a la plasticidad total, el estado de agotamiento que muestra la Figura 2, y la combinación de carga axial y momento que provoca este estado serían:

a. Para $y_n \le (h-2t_f)/2$ eje neutro en el alma

$$N_M = 2f_y t_w y_n$$

$$M_N = f_y b t_f (h-t_f) + f_y \left[\left(\frac{h-2t}{2}\right)^2 - y_n^2\right] \qquad (2)$$

b. Para $y_n > (h-2t_f)/2$ eje neutro en el ala

$$N_M = f_y \left[t_w (h-2t_f) + 2b\left(t_f - \frac{h}{2} + y_n\right)\right]$$

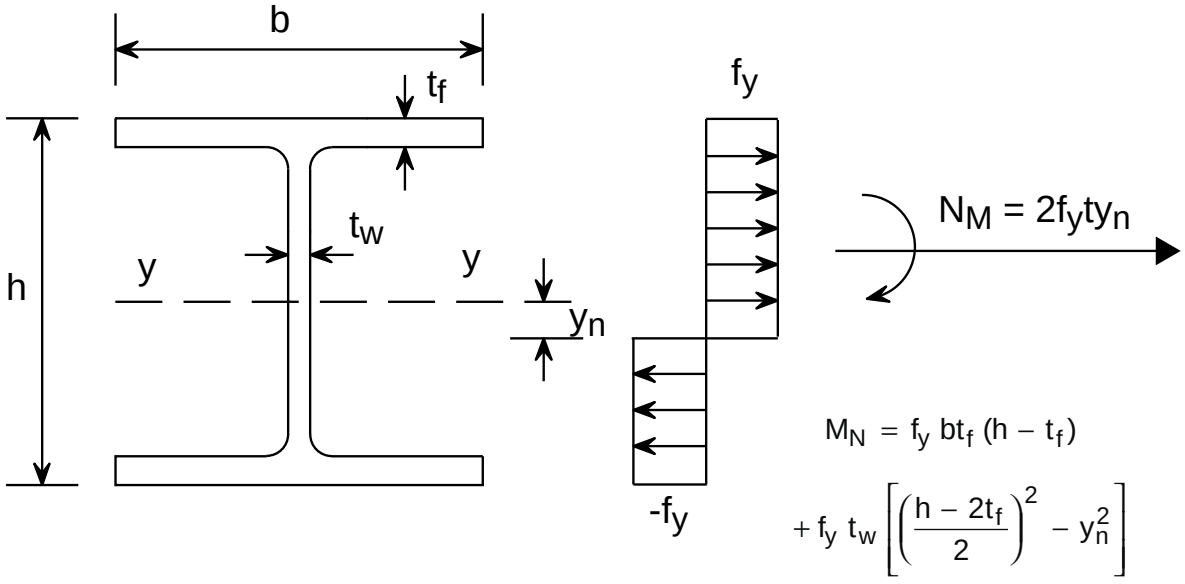
$$M_N = f_y b \left(\frac{h}{2} - y_n\right)\left(\frac{h}{2} + y_n\right) t_f \qquad (3)$$

En la Figura 3 se comparan las ecuaciones (2) y (3) con la aproximación que hace el Eurocódigo 3 de:

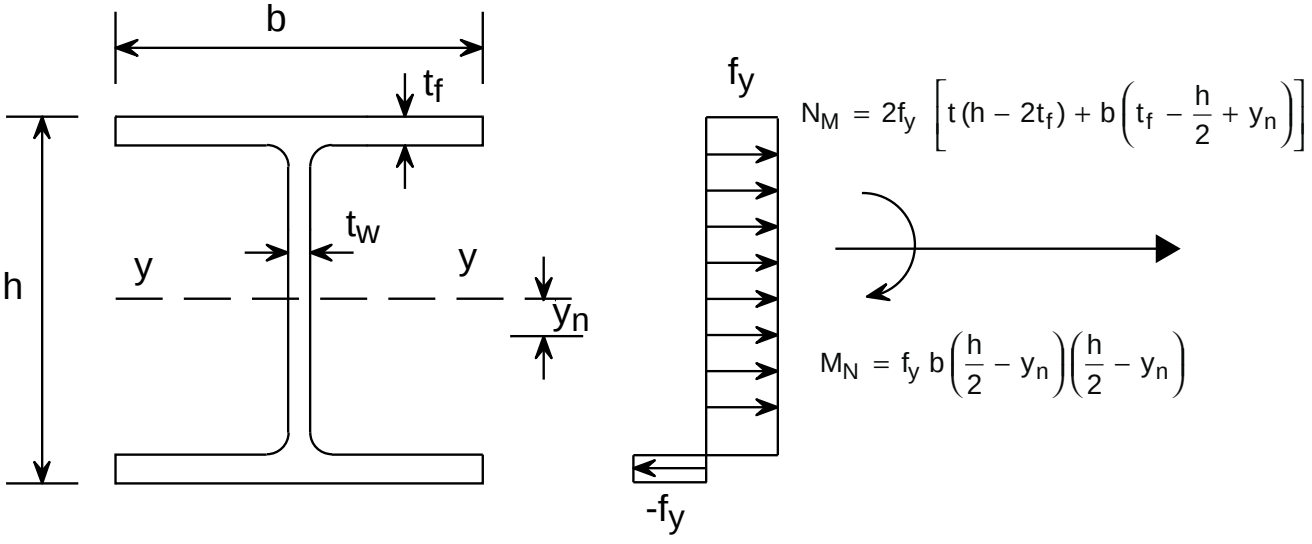
$$M_{Ny} = M_{pl.y} (1 - n) / (1 - 0{,}5a) \qquad (4)$$

siendo $n = N_{sd} / N_{pl.Rd}$ la relación entre la carga axial y la carga de aplastamiento (f_y A)

$a = (A - 2bt_f)/A \leq 0{,}5$



(a) $y_n < (h-2t_f)/2$



(b) $y_n > (h-2t_f)/2$

Figura 2 Plastificación completa bajo carga axial y momento

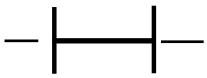
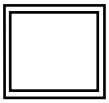
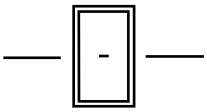
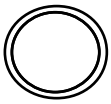
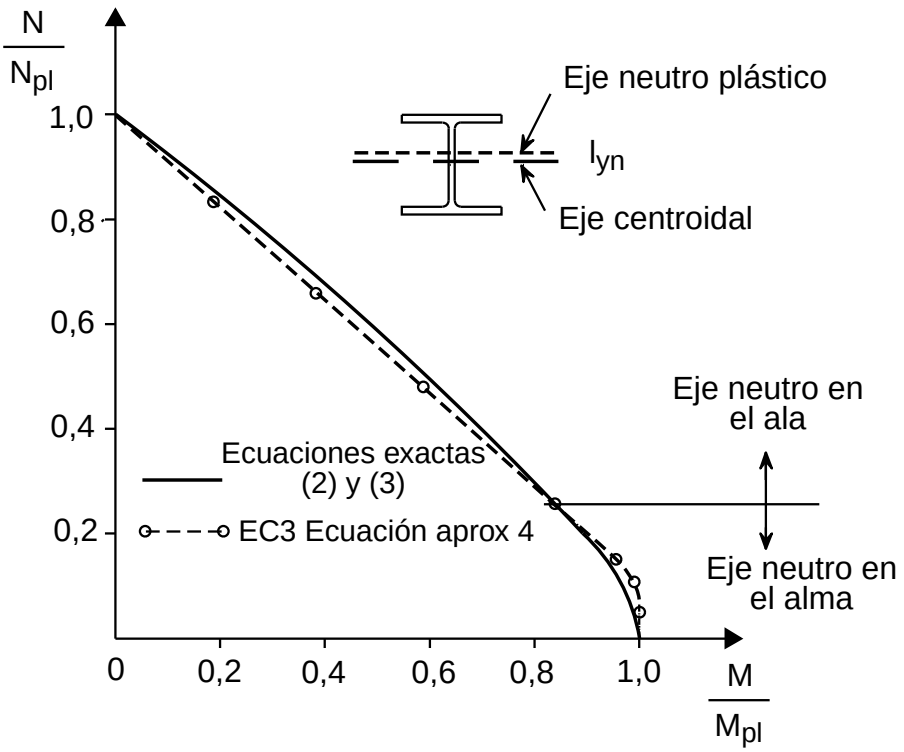
Sección transversal		Expresión para M_N
Perfil laminado I o H		$M_{N,y} = 1{,}11\ M_{pl.y}\ (1-n)$
		$M_{Nz} = 1{,}56 M_{pl.z}\ (1-n)(n+0{,}6)$
Sección cuadrada hueca		$M_N = 1{,}26 M_{pl}(1-n)$
Sección rectangular hueca		$M_{Ny} = 1{,}33 M_{pl.y}(1-n)$
		$M_{Nz} = M_{pl.z}(1-n)/(0{,}5 + ht/A)$
Sección circular hueca		$M_N = 1{,}04 M_{pl}(1-n^{1,7})$

Tabla 1 Expresiones del momento plástico resistente reducido MN



La Tabla 1 ofrece más simplificaciones y aproximaciones para una gama de secciones comunes. Por supuesto, el valor de M_N no debe superar en ningún caso el de M_{pl}.

Figura 3 Interacción completamente plástica - eje de flexión mayor de una HEA-450

3. ESTABILIDAD GENERAL

En el apartado anterior trata la conducta de la sección sin tener en cuenta cómo se genera exactamente el momento M en la sección que se considera. La Figura 4 muestra una viga-pilar experimentando una deflexión lateral a resultas de la combinación de compresión y de momentos iguales y opuestos aplicados en los extremos.

Es conveniente considerar que el momento en cualquier punto del fuste se compone de dos partes:

momento primario M

momento secundario Nv

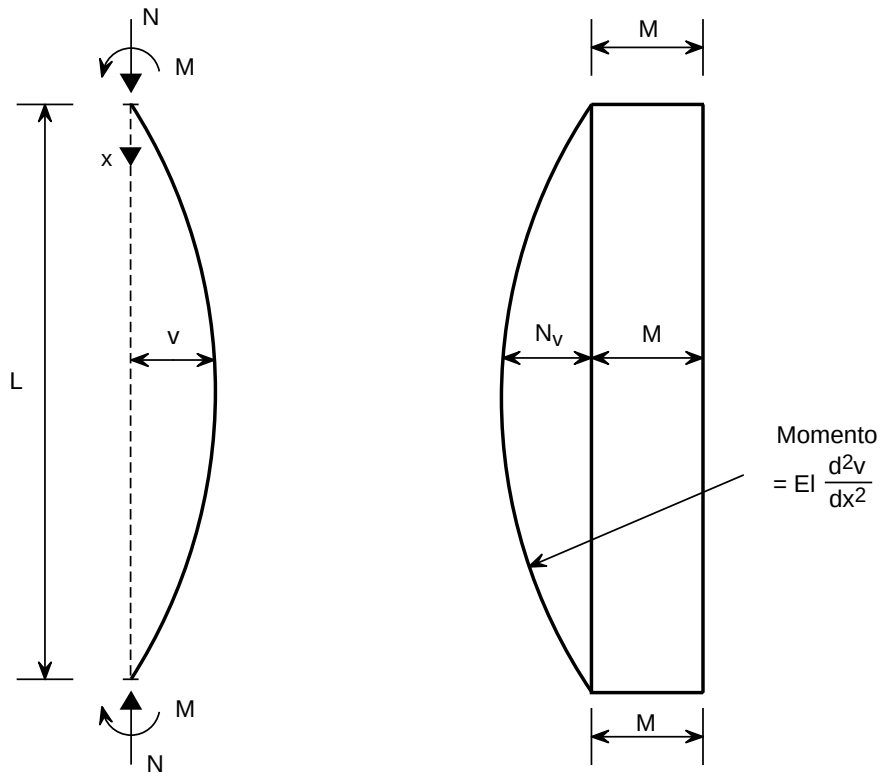


Figura 4 Momentos primarios y secundarios

El análisis elástico del problema, aplicando la teoría del puntal, arroja esta máxima deflexión en el centro:

$$v_{max} = \frac{M}{N}\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{N/P_{Ey}-1}\right) \quad (5)$$

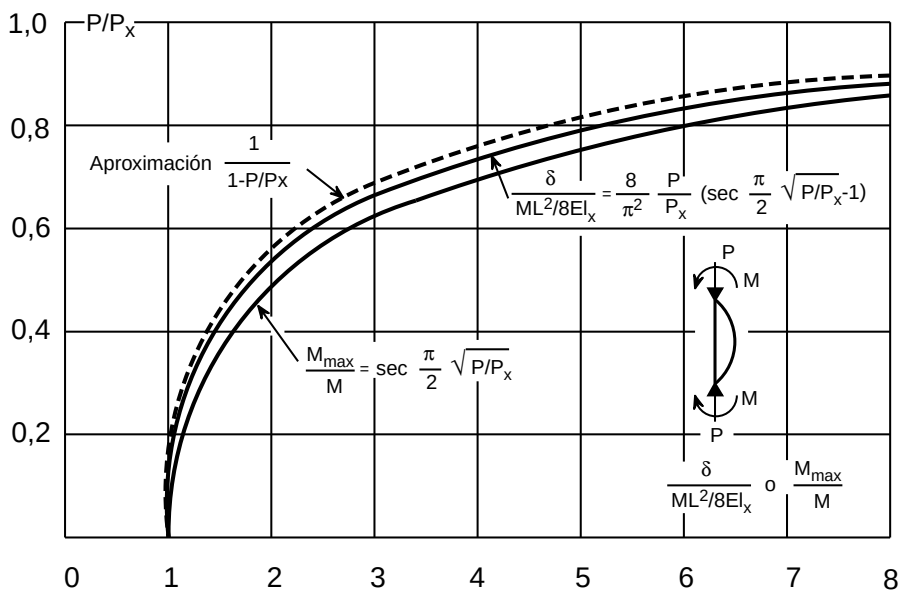


Figura 5 Máximos momentos y desplazamientos vigas-columnas con momentos iguales

siendo $P_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$

la carga de Euler del pandeo del eje mayor

y los máximos momentos son:

$$M_{max} = M\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{N/P_{Ey}} \quad (6)$$

En ambos casos el término de secante se puede cambiar, notando que la deflexión de primer orden (debida a que los momentos M de los extremos actúan solos) y el momento M de primer orden, hallado por la

teoría de la viga ordinaria los amplía aproximadamente el término:

$$1/(1 - N/P_{Ey}) \qquad (7)$$

como se ve en la Figura 5.

Entonces:

$$v_{max} = (ML^2/8\,EI_y)\left(\frac{1}{1 - N/P_{Ey}}\right) \qquad (8)$$

$$M_{max} = M\left(\frac{1}{1 - N/P_{Ey}}\right) \qquad (9)$$

Puesto que la tensión elástica máxima será:

$$\sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_b \frac{M_{max}}{M} \qquad (10)$$

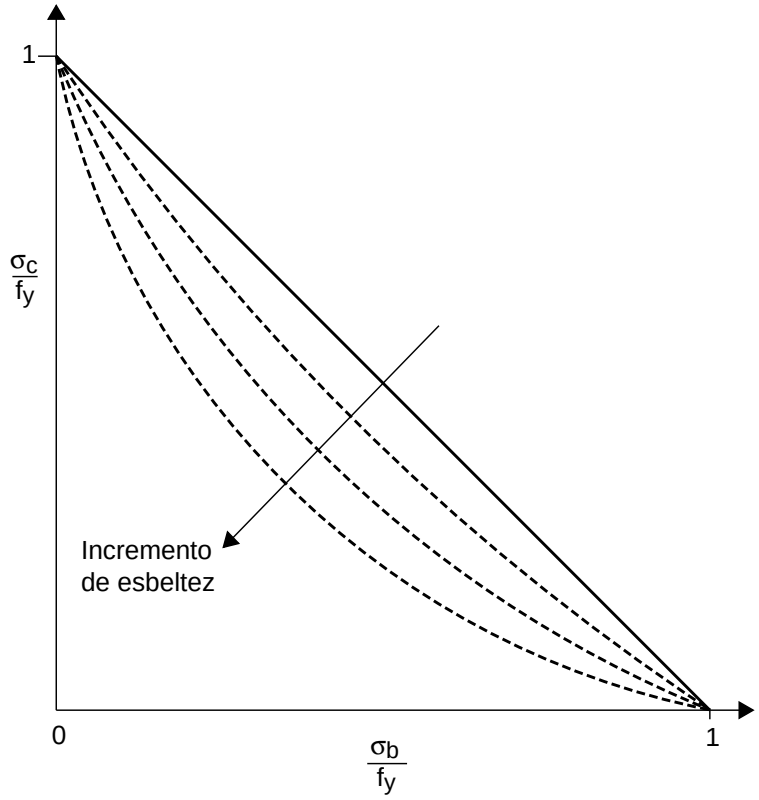


Figura 6 Forma de la ecuación (11)

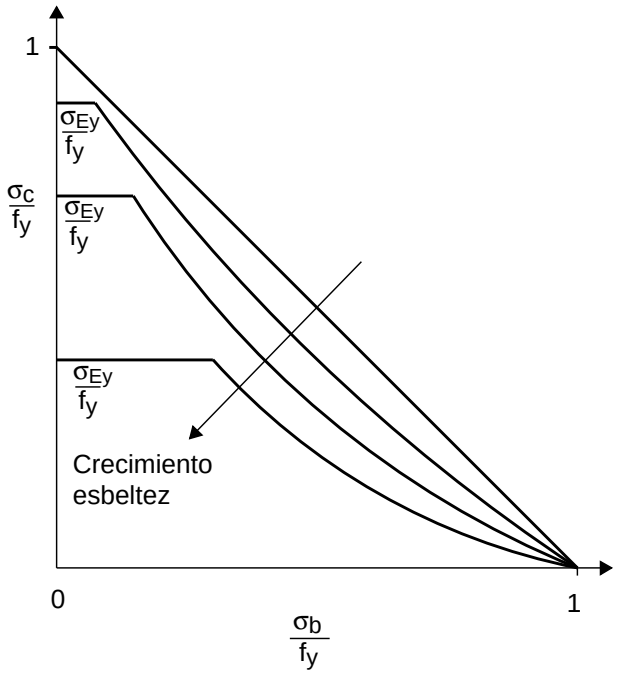


Figura 7 Combinación de las ecuaciones (11) y (12)

La ecuación (10) puede modificarse así:

$$\frac{\sigma_c}{f_y} + \frac{\sigma_b}{f_y(1 - N/P_{Ey})} = 1{,}0 \qquad (11)$$

Los valores de σ_c y σ_b de la ecuación (11), que sólo causan fluencia, se pueden despejar tomando distintos valores de P_{Ey} (que depende de la esbeltez L/r_y). Esto origina una serie de curvas, que se ven en la Figura 6, que indican que como $\sigma_b \rightarrow 0$, σ_c tiende hacia el valor de resistencia del material f_y. Así, la ecuación (11) no reconoce la posibilidad de pandeo bajo carga axial pura a una tensión σ_{Ey} dada por:

$$\sigma_{Ey} = P_{Ey} / A \qquad (12)$$

$$= \frac{\pi^2 EI_y}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} \qquad (13)$$

La aplicación de la ecuación (11) y (12) asegura la inclusión de ambas condiciones, como vemos en la Figura 7.

4. TRATAMIENTO EN LOS CÓDIGOS DE CÁLCULO

Las ecuaciones (11) y (12) están expresadas en términos de tensión y se originan del concepto de "agotamiento" que se define, bien como llegada a la primera fluencia, o como pandeo elástico del elemento perfecto. Los códigos de cálculo de estado límite toman normalmente la carga de rotura como criterio de cálculo para estudiar la resistencia bajo carga estática. Así, esas ecuaciones deben reformarse en términos de esfuerzos y momentos. Y al hacerlo, es preciso también hacer algo de sitio para esos efectos presentes en las estructuras de acero reales, que aún no se han incluido explícitamente, p.ej.: falta de rectitud inicial, tensiones remanentes, etc. Desde luego, para que el cálculo sea consecuente, es esencial que la ecuación de acciones recíprocas para cargas combinadas se reduzca al procedimiento de cálculo del pilar y la viga al reducirse a cero el momento y la carga axial respectivamente.

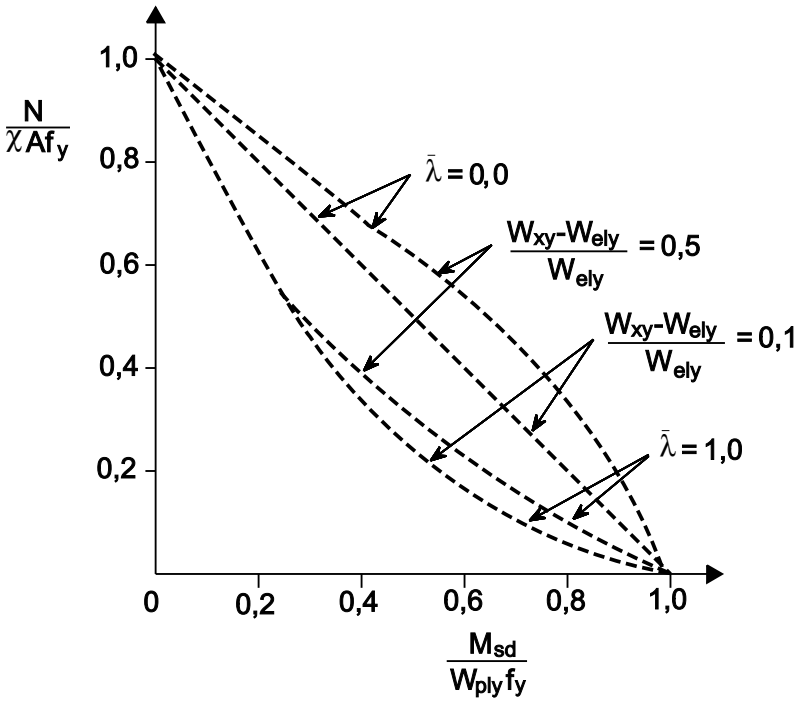


Figura 9 Fórmula de interacción: efecto de la forma de la sección transversal

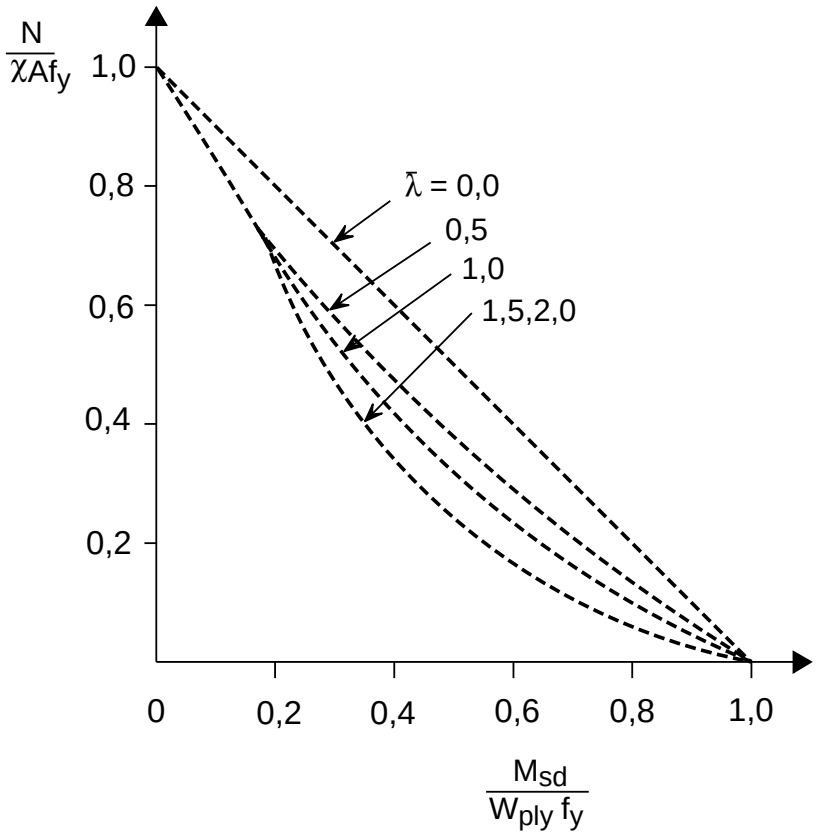


Figura 8 Fórmula de interacción: efecto de la esbeltez

El método del Eurocódigo 3 (suponiendo flexión por el eje y) consiste en poner:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_y A f_y} + \frac{k_y M_{y,sd}}{W_{pl,y} f_y} \leq 1 \qquad (14)$$

siendo χ_y el factor de reducción del pandeo del pilar

k_y un coeficiente

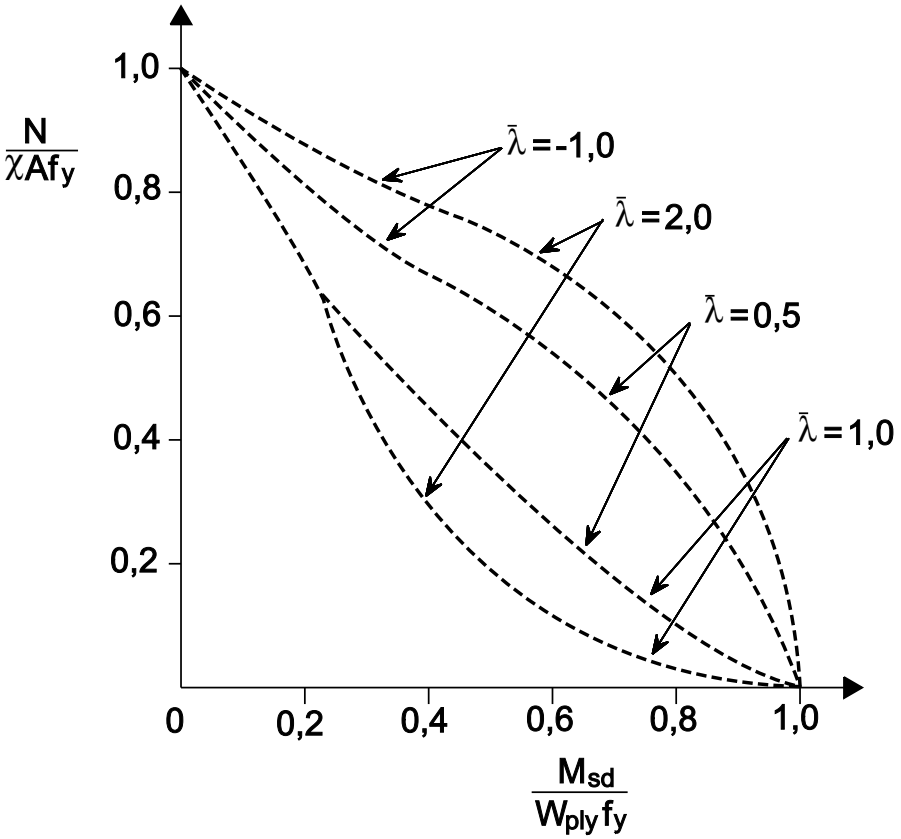


Figura 10 Fórmula de interacción: efecto del gradiente de momentos

El valor de k_y depende de manera bastante compleja de:

- el nivel de la carga axial medido por la relación $N_{sd}/\chi_y A f_y$.
- la esbeltez del elemento λ_y.
- del margen entre los módulos elástico y plástico de la sección (W_{pl} y W_{el}).
- del esquema de momentos primarios.

Cuando todo esto se combina del modo más desfavorable, el valor seguro de k_y es 1,5. La misión de k_y es permitir el efecto de flexión secundaria descrito antes, más los efectos del momento desuniforme y la propagación de la fluencia. Las figuras 8 - 10 muestran que, dependiendo del caso que se escoja, la forma de la acción recíproca cambia de cóncava a convexa. Estas figuras se han construido fundándose en la fórmula de cálculo de la cláusula 5.5.4(1) del Eurocódigo 3.

5. EFECTO DE LA FORMA DE LOS MOMENTOS PRIMARIOS

En la Figura 4 vimos que, en el caso particular de momentos iguales y opuestos en los extremos, los momentos primarios se amplían por efecto de la acción de la carga axial N a través de los desplazamientos laterales v. Cuando la configuración del momento primario es diferente, los dos efectos no son tan sumables directamente ya que los momentos primario y secundario máximos no ocurren necesariamente en el mismo sitio. La Figura 11 presenta la situación de los momentos de los extremos M y ψM, en la que ψ puede adoptar valores entre +1 (una curvatura uniforme) y -1 (doble curvatura). El caso presentado corresponde a un valor ψ ≈ -0,5.

En el caso indicado el momento máximo se produce en toda la longitud del elemento, pero la situación es menos desfavorable que la de la figura 4 asumiendo idénticas condiciones excepto para el valor de ψ. Es habitual considerar esto en el cálculo reduciendo la contribución del momento a la relación de interacción. Así en el Eurocódigo 3 "Ky" de la ecuación (14) depende de la relación ψ, como se muestra en la figura 10. La forma correcta de utilización se explica en el apartado 5.5.4 y en la figura 5.5.3 del Eurocódigo 3.

Ya que el caso del momento de una curvatura uniforme es el más desfavorable, se sigue que la simplificación segura es siempre el procedimiento de ψ = 1.0.

Volviendo a la Figura 11, es posible que el punto de máximo momento esté en el extremo donde se aplica el momento primario mayor. Esto suelo suceder si la carga axial es pequeña y/o la esbeltez no es mucha, de modo que los efectos de la flexión secundaria sean relativamente ligeros. En estos casos lo que rige el cálculo es la necesidad de darle resistencia a la sección en dicho extremo. Por lo tanto, debe aplicarse la fórmula de la Tabla 1 a la forma de la sección en particular que se elija. En los casos en que sólo se considere la configuración de momento uniforme (ψ = 1,0) el cálculo del pandeo general de la ecuación (14) es siempre más desfavorable (o igual en el límite) que el de la sección.

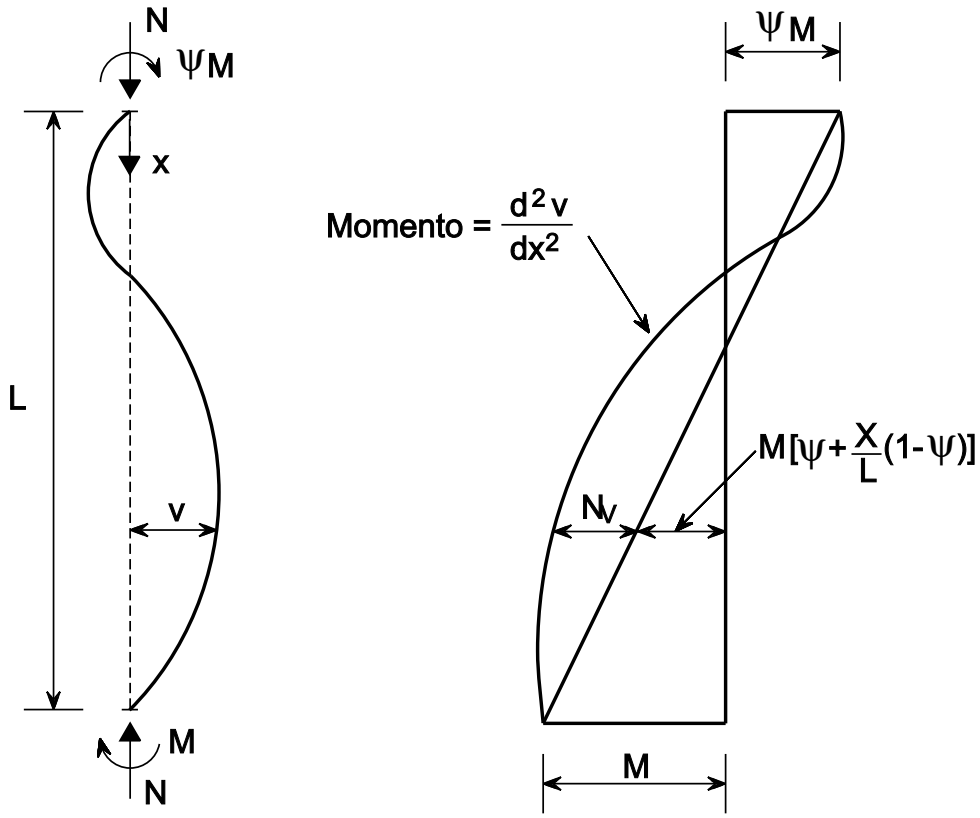


Figura 11 Caso de momentos no uniformes

6. RESUMEN FINAL

Se han presentado los aspectos principales del comportamiento y cálculo de las vigas-columna en el contexto de los elementos sometidos a flexión excéntrica, cuya respuesta es tal que la deformación sólo tiene lugar en el plano de los momentos aplicados. Los puntos a notar son:

- En la sección, pueden tratarse elásticamente la acción recíproca del esfuerzo normal y de la flexión, aplicando el principio de superposición,o plásticamente, por medio del equilibrio y el concepto de bloques de tensión.
- Cuando se estudia el elemento en su conjunto, deben incluirse los efectos de la flexión secundaria.
- El análisis de puntales puede ser la base para examinar la función de los parámetros rectores principales.
- El cálculo se funda normalmente en la ecuación de acción recíproca, uno de cuyos aspectos esenciales es la resistencia del elemento como viga y como pilar.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Chen, W. F. y Atsuta, T., “Theory of Beam-Columns” Vol. 1, McGraw-Hill, 1976. Tratamiento completo del problema de vigas-columna en el caso de un plano, con atención a los métodos de análisis para hallar la capacidad portante máxima.

2. Trahair, N. S. y Bradford, M. A., “Behaviour and Design of Steel Structures”, 2º edición, Chapman and Hall, 1988. El capítulo 7 se refiere a las vigas-columna e incluye una comparación del tratamiento del tema en tres códigos (excluido el Eurocódigo 3)

3. Ballio, G. y Mazzolani, F. M., “Theory and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, 1983. Da la base de los primeros planteamientos europeos de las fórmulas de acción recíproca, incluso derivaciones.

4. Galambos, T. V., “Guide to Stability Deign Criteria for Metal Structures”, 4ª edición, Wiley Interscience. El capítulo 8 hace una revista completa de las aportaciones teóricas, experimentales y de cálculo al asunto del comportamiento de las vigas-columna.

5. Dowling, P.J., Owens, G.W. and Knowles, P., “Structural Steel Design”, Butterworths, 1988. El capítulo 24 trata del comportamiento y cálculo de vigas-columna, incluyendo explicación del significado físico de los conceptos de interacción y esbeltez.

6. Nethercot, D. A., “Limit State Design of Structural Steelwork”, 2nd edition, Chapman and Hall, 1991. El capítulo 6 trata del comportamiento y cálculo de vigas-columna.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.10.2: Vigas-Columna II

OBJETIVO/CONTENIDO

Ampliar la presentación de la materia de las vigas-columna hecha en la Lección 9.10.1 para incluir el caso tridimensional completo.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teoría de la flexión y torsión simples

Lección 9.2:	Clasificación de secciones transversales
Lecciones 9.5.1 y 9.5.2:	Pilares
Lecciones 9.8.1 y 9.8.2:	Vigas arriostradas
Lecciones 9.9.1 y 9.9.2:	Vigas no arriostradas
Lección 9.10.1:	Vigas-columna

LECCIONES AFINES

Lección 9.11:	Pórticos

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.10:	Vigas-columna

RESUMEN

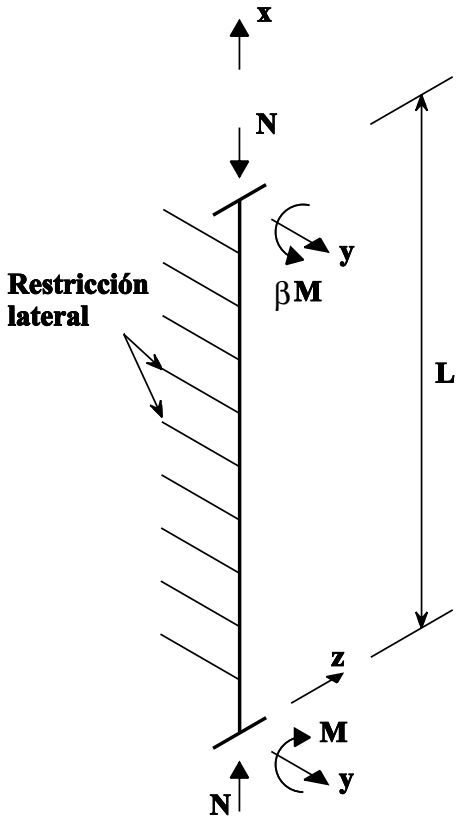
Esta lección amplía el tratamiento de las vigas-pilar dado en la lección 9.10.1, a los casos de pandeo fuera del plano y de flexión biaxial. Expone la base de las fórmulas de acción recíproca del Eurocódigo 3 y las relaciona con el comportamiento físico.

1. INTRODUCCIÓN

La Lección 9.10.1 introdujo todos los aspectos principales del comportamiento y el cálculo de las vigas-pilar relativos al caso unia-xial en el plano. Pero son posibles otras formas de respuesta más generales. Esta lección ensancha el campo al entrar en todos los casos principales.

2. FORMAS DE COMPORTAMIENTO

La Figura 1 presenta tres formas de comportamiento separadas de vigas-pilar.

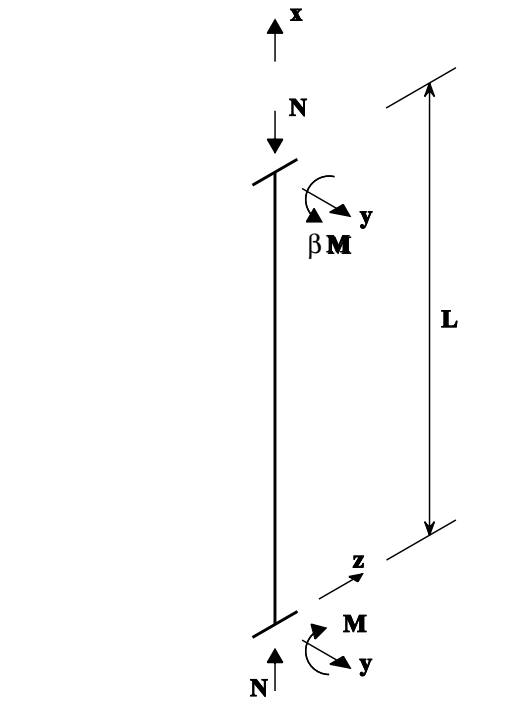


Pilar desplazándose sólo en el plano zx

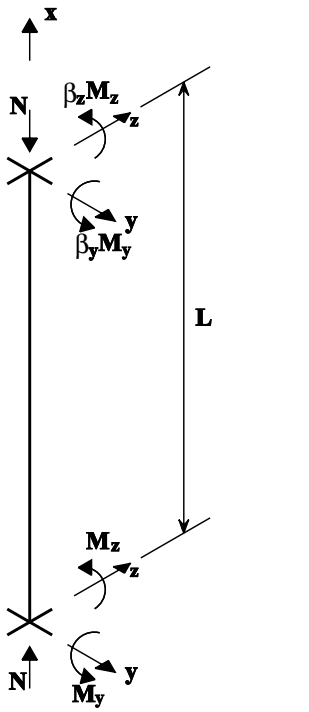
Figura 1a Comportamiento dentro del plano

Si el elemento se flexiona por su eje principal más débil, o si se le impide flexionar lateralmente cuando se flexiona por su eje principal más fuerte, como vemos en la Figura 1a, su reacción se produce en el plano de flexión. Este caso ha sido tratado en la Lección 9.10.1.

Si una viga-pilar de sección abierta sin arriostrar lateralmente se flexiona por su eje principal más fuerte, como en la Figura 1b, podría pandearse prematuramente fuera del plano de carga, haciendo una flecha lateral y torsionándose. Esta conducta es conceptual y matemáticamente muy parecida al pandeo lateral con tor-



Pilar desplazándose en el plano zx, entonces pandea desplazándose en el plano yx y rotando alrededor del plano x.



Pilar desplazándose en los planos zx y yx y rotando alrededor del eje x

Figura 1b Comportamiento flexo-lateral (arriba)
Figura 1c Flexión biaxial (abajo)

sión de vigas que se describe en las Lecciones 9.9.1 y 9.9.2.

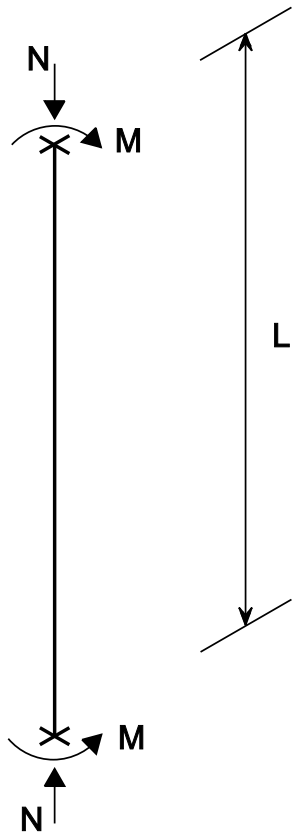
La situación más general se ilustra en la Figura 1c. Cuando la flexión se aplica por ambos ejes principales, la reacción del elemento es tridimensional por naturaleza, consistente en flexión biaxial y torsión.

En la Figura 1 el carácter de la acción recíproca de cada caso se indica en el pie de figura. Claramente la conducta más general es la de la Figura 1c, siendo la de las Figuras 1b y 1c más simples y en menos casos. Véase el caso de la Figura 1a tratado con todo detalle en la Lección 9.10.1.

3. PANDEO POR FLEXOTORSIÓN

Cuando una viga-pilar de sección I sin arriostramiento lateral se flexiona por el eje mayor, puede pandear con deflexión lateral y torsión con una carga significativamente menor que la máxima predicha en un análisis en plano. Suponiendo una conducta elástica, la disposición de la carga aplicada y las condiciones de apoyo de la Figura 2, la combinación crítica de N y M puede hallarse despejando:

$$\frac{M^2}{i_o^2 N_z N_o} = \left(1 - \frac{N}{N_z}\right)\left(1 - \frac{N}{N_o}\right) \qquad (1)$$



Los apoyos de los extremos evitan los desplazamientos y el giro pero no ofrecen resistencia a la rotación o al acortamiento

Figura 2 Caso básico de pandeo flexo-lateral

siendo $i_o = [(I_y + I_z)/A]^{1/2}$ el radio de giro polar

$N_z = \pi_2 EI_z/L^2$ la carga crítica en el eje menor

$N_o = (GJ/i_o^2)(1 + \pi^2 EI_w/GJL^2)$

la carga de pandeo por torsión

La ecuación (1) se reduce al pandeo de una viga cuando $N \rightarrow 0$, y al pandeo de un pilar por flexión (N_z) o por torsión (N_o) con $M \rightarrow 0$. En el primer caso el valor crítico de M viene dado por:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L}(E I_z G J)^{1/2}\left(1 + \frac{\pi^2 E I_w}{L^2 G J}\right)^{1/2} \qquad (2)$$

siendo EI_z la rigidez a la flexión del eje menor

GJ la rigidez a la torsión

EI_w la rigidez al alabeo

Al derivar la ecuación (1) no se ha tenido en cuenta que los momentos M en el plano se amplían por la acción de la carga axial a través de las deflexiones en el plano. Como lo explica la Lección 9.10.1, la aproximación puede ser $M/(1-N/N_y)$. Por tanto, la ecuación (1) se puede modificar así:

$$M_{cr} = \frac{M^2}{i_o^2 N_z N_o} = \left(1 - \frac{N}{N_y}\right)\left(1 - \frac{N}{N_z}\right)\left(1 - \frac{N}{N_o}\right) \quad 3)$$

Añadiendo las magnitudes relativas de N_y, N_z y N_o y reorganizando la ecuación, tenemos la siguiente aproximación:

$$\frac{N}{N_z} + \frac{1}{(1 - N/N_y)}\frac{M}{i_o (N_z N_o)^{1/2}} = 1 \qquad (4)$$

o bien

$$\frac{N}{N_z} + \frac{1}{(1 - N/N_y)}\frac{M}{M_{cr}} = 1 \qquad (5)$$

4. CÁLCULO

A efectos del cálculo, es preciso incluir efectos tales como falta de rectitud inicial, fluencia parcial, tensiones remanentes, etc., como se ha expuesto extensamente en lecciones anteriores respecto a las vigas y pilares. Así, es necesario modificar algo la ecuación (5) para adaptarla al cálculo. Los puntos extremos M = 0 y N = 0, en particular, deben cumplir los principios

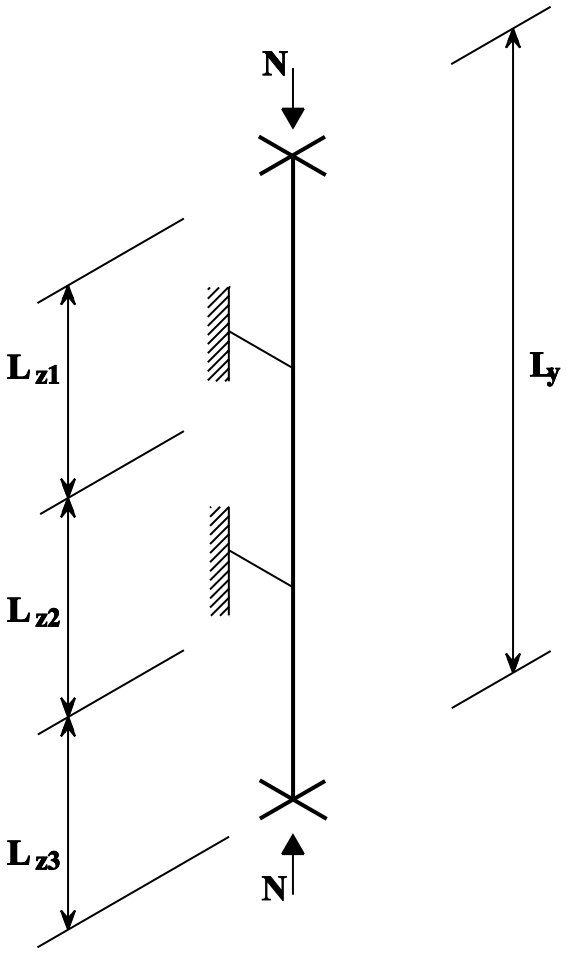


Figura 3 Pilar con diferentes condiciones de apoyo en los planos xy y xz

establecidos para pilares (Lecciones 9.5.1 y 9.5.2) y para vigas (Lecciones 9.9.1 y 9.9.2).

El Eurocódigo 3 aplica la ecuación de acción recíproca:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z A f_y} + \frac{k_{LT} M_{y\cdot sd}}{\chi_{LT} W_{pl\cdot y} f_y} \leq 1 \qquad (6)$$

siendo k_{LT} un coeficiente cuyo valor depende de:

- el nivel de la carga axial medido por la relación $N_{sd} / \chi_z A f_y$.
- la esbeltez del elemento $\overline{\lambda}_z$.
- el esquema de los momentos iniciales.

y χ_{LT} el factor de reducción del pandeo lateral con torsión de la viga.

En la combinación más desfavorable, k_{LT} adopta el valor de la unidad, que corresponde a la combinación de los términos de compresión y flexión. Lo que revela la escasa previsión de los efectos de ampliación en este caso, ya que el valor de N_{sd} no puede exceder de $\chi_z A f_y$, que a su vez es bastante inferior a la carga elástica crítica del pandeo en el plano N_y.

Por supuesto, también es necesario evitar la posibilidad de agotamiento en el plano causada por una flecha excesiva en el plano del alma con menos carga que la que arroja la ecuación (6), que podría ocurrir, por ejemplo, si las condiciones de arriostramiento y/o apoyo son diferentes en los ejes xy y xz, como vemos en la Figura 3. Estos casos deben resolverse, además de con la ecuación (6), con una ecuación del plano de esta forma:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} A f_y} + \frac{k_y M_{y\cdot sd}}{W_{pl\cdot y} f_y} \leq 1 \qquad (7)$$

En la que χ_{min} depende de las condiciones en el plano. Pero la ecuación (6) suele ser la que rige.

5. FLEXIÓN BIAXIAL

El análisis del caso tridimensional completo, incluso en la versión elástica simple, es sumamente complejo y no existen soluciones cerradas. En vez de empezar analíticamente, es más fácil enfocar la cuestión del método de cálculo adecuado estudiando el comportamiento y aplicando los métodos ya derivados de los casos más simples de las Figuras 1a y 1b.

La Figura 4 presenta en forma de diagrama las exigencias del cálculo. Los ejes N-M_z y N-M_y corresponden a los dos casos monoaxiales ya examinados. La acción recíproca de los momentos M_z y M_y ocurre en el plano horizontal. Cuando están presentes los tres componentes de la carga, N, M_z y M_y, la acción recíproca resultante ocurre en alguna parte del espacio tridimensional que representa el diagrama. Cualquier punto que caiga dentro de los límites corresponde a una combinación de cargas segura.

Suponiendo una carga proporcional, cualquier combinación de cargas se puede considerar una línea recta desde el origen, cuya orientación depende de la magnitud relativa de los tres componentes de la carga. El aumento de las cargas prolonga esta línea hasta llegar al límite y luego superarlo. Si la carga no fuese proporcional, correspondería a una serie de líneas.

Los ejes se han tomado en cada caso como la relación entre el componente aplicado y la resistencia del elemento bajo la componente de carga solamente, p.ej.: $N_{sd} / \chi_{min}\, Af_y$ en el caso de carga a compresión. Así, la Figura 3 representa realmente la situación de un ejemplo determinado con ciertos valores de las propiedades de la sección, esbeltez y disposición de la carga. Al cambiar algunas o todas ellas se altera la forma de la superficie de acción recíproca presentada, pero no varía el principio general.

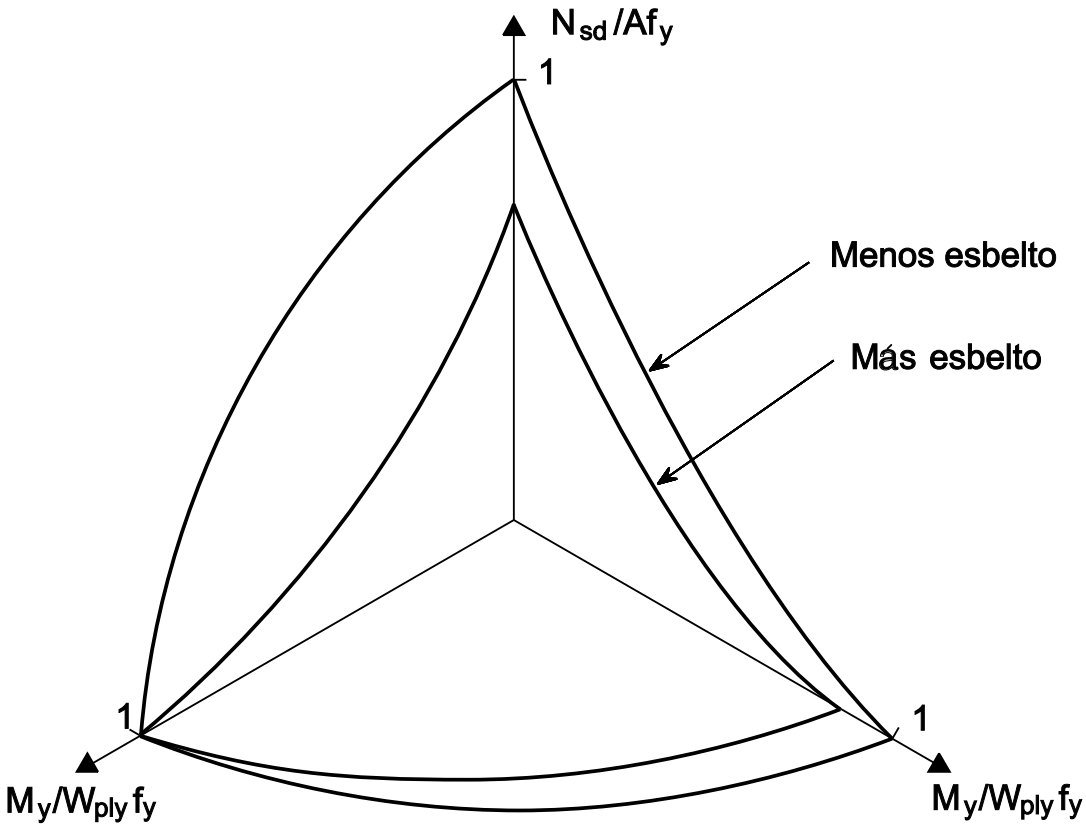


Figura 4 Diagrama interacción para flexión biaxial - caso 1c

6. CÁLCULO DE LA FLEXIÓN Y COMPRESIÓN BIAXIAL

Al final del cálculo, es necesario representar convenientemente la situación descrita en el apartado 5, mediante una ecuación de acción recíproca que contenga las tres componentes de la carga N, M_z y M_y. Ya se han tratado las partes de esta ecuación que corresponden a los dos casos bidimensionales representados por los planos N,M_z y N,M_y. La ecuación completa debe sin duda reducirse a éstos en ausencia del tercer componente de la carga.

El Eurocódigo 3 recurre a un par de fórmulas:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} A f_y} + \frac{k_y M_{y\cdot sd}}{W_{pl\cdot y} f_y} \frac{k_z M_{z\cdot sd}}{W_{pl\cdot z} f_y} \leq 1 \qquad (8)$$

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z A f_y} + \frac{K_{LT} M_{y\cdot sd}}{\chi_{LT} W_{pl\cdot y} f_y} \frac{k_z M_{z\cdot sd}}{W_{pl\cdot z} f_y} \leq 1 \qquad (9)$$

Se precisan dos verificaciones, porque estando en compresión, más un momento en el eje mayor de una sección I con diferente estado de apoyo en los planos zx e yz, no se sabe cuál de las acciones recíprocas, dentro o fuera del plano va a ser más crítica; es decir, si en ausencia de M_z, el agotamiento sería como se ve en la Figura 1a ó en la 1b. A iguales condiciones en los dos planos y siendo $\bar{\lambda}_z > \bar{\lambda}_y$, χ_{min} corresponde a χ_z y rige la ecuación (9) ya que el factor de reducción de pandeo lateral con torsión en flexión pura, χ_{LT}, será menor que la unidad, o igual si $\bar{\lambda}_{LT}$ es pequeño.

En secciones no expuestas al pandeo lateral por torsión, p.ej.: tubos, sólo se requiere la ecuación (8) puesto que $\chi_{LT} = 1$.

7. CÁLCULO DE SECCIONES QUE NO SEAN DE CLASE 1 ó 2

Las fórmulas de cálculo de las ecuaciones (6) - (9) son en concreto para las secciones de clase 1 ó 2, o sea, aquéllas en las que las proporciones de las partes de chapa cumplen los límites precisos para que la sección desarrolle la plasticidad plena, como se explica en la Lección 9.2. Para las secciones de clase 3 ó 4 hay que hacer algunas modificaciones.

En las secciones de clase 3 deben reemplazarse las cantidades $W_{pl.y}$ y $W_{pl.z}$ por las equivalentes elásticas $W_{el.y}$ y $W_{el.z}$.

Cuando se trabaje con secciones de la clase 4, las propiedades A y W han de referirse a la sección efectiva; también hay que contar con el cambio de la posición inicial del eje neutro de la sección efectiva debido a la pérdida de efectividad de algunas partes de la sección. Entonces las ecuaciones (8) y (9) se transforman así:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min}\, A_{eff}\, f_y} + \frac{K_y\, M_{y\cdot sd} + N_{sd}\, e_{N\cdot Y}}{W_{eff\cdot y}\, f_y}$$

$$\frac{k_z\, M_{z\cdot sd} + N_{sd}\, e_{N\cdot z}}{W_{eff\cdot z}\, f_y} \leq 1 \qquad (10)$$

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z\, A_{eff}\, f_y} + \frac{K_{LT}\, M_{y\cdot sd} + N_{sd}\, e_{N\cdot Y}}{\chi_{LT}\, W_{eff\cdot y}\, f_y}$$

$$\frac{k_z\, M_{z\cdot sd} + N_{sd}\, e_{N\cdot Y}}{W_{eff\cdot z}\, f_y} \leq 1 \qquad (11)$$

siendo A_{eff}, $W_{eff.y}$ y $W_{eff.z}$ las propiedades efectivas en presencia solamente de compresión uniforme o de momento en los ejes y y z respectivamente, y e_N, el desplazamiento del eje neutro cuando la sección está sometida a compresión uniforme.

Un punto importante a observar en la definición de A_{eff} y W_{eff} anterior es que el cálculo de las propiedades de la sección y de ahí su clasificación, debe hacerse por separado por cada uno de los tres componentes de la carga, N, M_y y M_z. Esto supone, desde luego, que un mismo elemento se pueda clasificar (digamos) en la clase 1 por la flexión del eje mayor, en la clase 2 por la flexión del eje menor y en la clase 3 por compresión. En tales casos, la postura segura del cálculo es verificar todas las operaciones de vigapilar de la clase menos favorable.

8. DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES K

El valor de k_{LT} para incorporarlo a la ecuación (6) lo da realmente:

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT}\, N_{sd}}{\chi_z\, A\, f_y} \quad (\text{pero } k_{LT} \leq 1) \qquad (12)$$

siendo $\mu_{LT} = 0{,}15\ \bar{\lambda}_z\ \beta_{M.LT} - 0{,}15$

$$(\text{pero } \mu_{LT} \leq 0{,}90) \qquad (13)$$

y $\beta_{M.LT}$ es el factor del momento uniforme equivalente de pandeo lateral por torsión tomado de la Tabla 2.

Los valores de k_y y k_z de las ecuaciones (7) - (11), deben hallarse de:

$$k = 1 - \frac{\mu_{LT}\, N_{sd}}{\chi\, A\, f_y} \quad \text{pero } k \leq 1{,}15 \qquad (14)$$

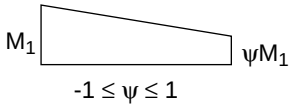
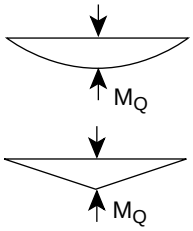
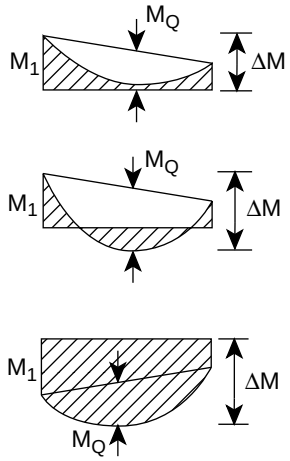
Diagrama de momentos	Factor de momento uniforme equivalente β_M
Momentos en los extremos  $-1 \leq \psi \leq 1$	$\beta_{m,\psi} = 1{,}8 - 0{,}7\ \psi$
Momentos debidos a cargas laterales en el plano  	$\beta_{M,Q} = 1{,}3$ $\beta_{M,Q} = 1{,}4$
Momentos debidos a cargas laterales en el plano más momentos en los extremos  	$\beta_M = \beta_{m,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M}(\beta_{m,Q} - \beta_{m,\psi})$ $M_Q = \lvert \text{Max } M \rvert$ debido sólo a carga lateral $\Delta M = \begin{cases} \lvert \text{MaxM} \rvert & \text{para diagrama de momentos sin cambio de signo} \\ \lvert \text{MaxM} \rvert + \lvert \text{MinM} \rvert & \text{cuando cambia el signo del diagrama de momentos} \end{cases}$

Tabla 2 Factores de momento uniforme equivalente β_M

$$\mu = \bar{\lambda}\,(2\,\beta_M - 4) + \left(\frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}}\right) \quad \text{pero}\,\mu \leq 0,9 \tag{15}$$

estando μ, χ, $\bar{\lambda}$, β_M, W_{pl} y W_{el} relacionados con el eje en cuestión, es decir, y ó z, y tomando β_M de la Tabla 2.

En las secciones de las clases 3 ó 4 debe omitirse el segundo término de la ecuación (15).

9. VERIFICACIONES DE LA SECCIÓN

Si al determinar los factores k se han incluido (mediante β_M) los efectos menos perjudiciales del esquema de momentos, menos la flexión de una sola curvatura uniforme, es preciso seguir comprobando que toda la sección pueda resistir localmente la combinación de la compresión y el momento o momentos primarios que estén presentes en cualquier punto. Este punto suele ser uno u otro extremo, como lo explica la Lección 9.10.1.

En la Lección 9.10.1 vienen las expresiones para verificar la compresión con flexión monoaxial de varios tipos de sección. El Eurocódigo 3 aplica a la flexión biaxial:

$$\left[\frac{M_{y\cdot sd}}{M_{Ny\cdot Rd}}\right]^{\alpha} + \left[\frac{M_{z\cdot sd}}{M_{Nz\cdot Rd}}\right]^{\beta} \leq 1 \qquad (16)$$

dependiendo los valores de α y β del tipo de sección, como lo indica la Tabla 1.

Una alternativa más simple, pero conservadora es:

$$\frac{N_{sd}}{N_{pl\cdot Rd}} + \frac{M_{y\cdot sd}}{M_{pl\cdot y\cdot Rd}} + \frac{M_{z\cdot sd}}{M_{pl\cdot z\cdot Rd}} \leq 1 \qquad (17)$$

Tipo de sección	α	β
Secciones I y H	2	$5n$ pero ≥ 1
Tubos circulares	2	2
Tubos rectangulares	$\frac{1,66}{1-1,33n^2}$ pero ≤ 6	$\frac{1,66}{1-1,33n^2}$ pero ≤ 6
Rectángulos macizos y chapas	$1,73 + 1,8n^3$	$1,73 + 1,8n^3$
$n = N_{sd} / N_{pl.Rd}$		

Tabla 1 Valores de α y β para la ecuación (16)

10. RESUMEN FINAL

1. Existen tres problemas de viga-pilar, según sea la forma de aplicar la carga.
2. El caso de flexión biaxial es el más general y comprende los otros dos por ser más sencillos y con componentes más restringidos.
3. El cálculo se realiza con ecuaciones de acción recíproca.
4. Estas se valen (como puntos extremos) de los métodos de cálculo de vigas (N = 0) y de pilares (M = 0).
5. La clase de la sección afecta a algunos de los valores de las ecuaciones de acción recíproca.

11. BIBLIOGRAFÍA

1. Chen, W. F. y Atsuta, T., “Theory of Beam-Columns” Vol. 2, McGraw-Hill, 1977.

Exposición completa del problema de la viga-pilar en los casos de pandeo por flexotorsión y flexión biaxial en un plano.

2. Trahair, N. S. y Bradford, M. A., “Behaviour and Design of Steel Structures”, 2nd edition, Chapman and Hall, 1988.

El capítulo 7 se refiere a las vigas-columna y hace una comparación del enfoque de este tema en tres códigos de cálculo (no incluye el Eurocódigo 3).

3. Ballio, G. y Mazzolani, F. M., “Theory and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, 1983.

Contiene los planteamientos iniciales europeos de la aplicación de las fórmulas de acción recíproca, incluso derivaciones.

4. Galambos, T. V., “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”, 4ª edición, Wiley Interscience.

El capítulo 8 pasa una revista completa de las aportaciones teóricas, experimentales y de cálculo al tema del comportamiento de las vigas-columa.

5. Dowling, P. J., Owens, G. W. y Knowles, P., “Structural Steel Design”, Butterworths, 1988.

El capítulo 24 se ocupa del comportamiento y cálculo de las vigas-columna e incluye explicaciones del significado físico de los conceptos de acción recíproca y esbeltez.

6. Nethercot, D. A., “Limit State Design of Structural Steelwork”, 2ª edición, Chapman and Hall, 1991.

El capítulo 6 trata de la conducta y el cálculo de vigas-columna.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.10.3: Vigas - Columna III

OBJETIVO/CONTENIDO

Describir los métodos para analizar vigas-pilar, bien por verificación de un solo elemento o por verificación de todo el pórtico.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 9.1:	Métodos de Análisis de estructuras de acero
Lecciones 9.10.1 y 9.10.2:	Vigas - Columna

LECCIONES AFINES

Lección 8.2:	Criterios generales de estabilidad elástica
Lección 9.3:	Pandeo local

PROBLEMAS PERTINENTES RESUELTOS

Problema resuelto 9.10: Vigas-Columna

RESUMEN

Esta lección explica los métodos básicos para verificar las vigas-columna; se empieza por un elemento aislado tomando las deformaciones y esfuerzos de los extremos de un análisis global de todo el pórtico y calculando la resistencia según las reglas del Eurocódigo 3. También trata del caso en que no se puede aislar el elemento de la estructura del pórtico, dando un procedimiento alternativo que arroja una esbeltez general del pórtico $\bar{\lambda}$ (que incluye los efectos del pandeo lateral por torsión) que permite verificar el pórtico mediante las curvas de pandeo europeas.

1. INTRODUCCIÓN

Normalmente, el cálculo de un elemento de un pórtico se hace separándolo del pórtico y tratándolo como una estructura aislada. Las condiciones de los extremos del elemento deben entonces cumplir con sus condiciones de deformación, en el pórtico tridimensional, de manera conservadora, p.ej.: suponiendo extremos nominalmente articulados, debiendo considerarse los efectos de las acciones internas en los extremos de los elementos mediante la aplicación en los extremos de momentos externos y esfuerzos equivalentes (Figura 1). Los métodos para verificar estos elementos vienen en el apartado 2.

En el apartado 3 se da un procedimiento más general para el caso en que no se pueden aislar los elementos de la estructura del pórtico, como se describe arriba.

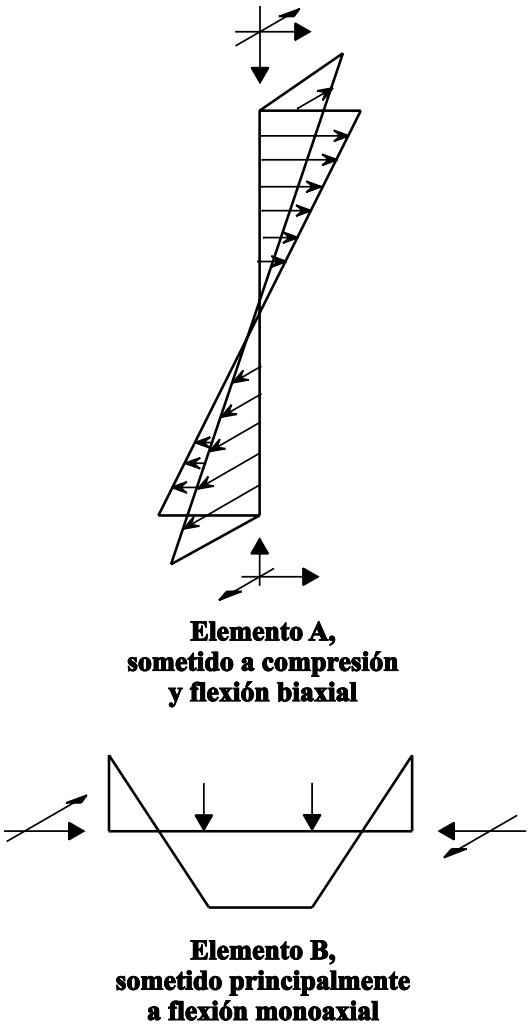


Figura 1 Elementos A y B aislados procedentes de un análisis de un pórtico plano

2. MÉTODOS PARA VERIFICAR ELEMENTOS AISLADOS

2.1 Vigas-columna sólo con flexión monoaxial

Para calcular vigas-pilar solamente con flexión monoaxial deben hacerse dos comprobaciones:

- la del pandeo en el plano teniendo en cuenta las imperfecciones del plano.
- la del pandeo fuera del plano, incluyendo la del pandeo lateral con torsión que toma en cuenta las imperfecciones fuera del plano (ver Figura 2).

Se ha comprobado con cálculos de prueba, que las imperfecciones de torsión, ρ, de las vigas-pilar capaces de pandear lateralmente por torsión se pueden sustituir por imperfecciones de flexión, ver Figura 3.

No es necesario verificar el pandeo lateral por torsión de elementos con suficiente rigidez a la torsión, p-ej.: los tubulares.

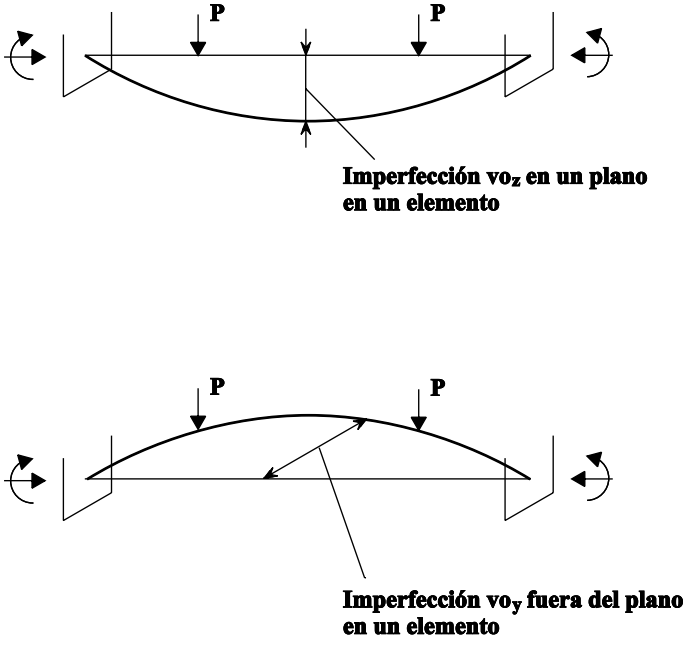


Figura 2 Suposiciones para imperfecciones en un elemento

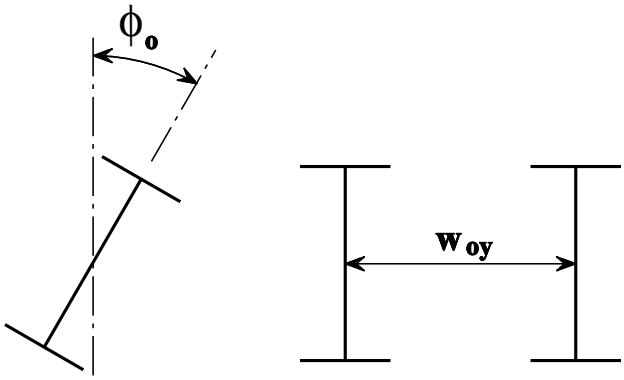


Figura 3 Imperfecciones de giro ϕ_o y de flexión w_{oy}

La comprobación del pandeo por flexión en el plano o fuera del mismo se hace aplicando la fórmula de acción recíproca:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min}\, A\, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{K_y\, M_y\, S_d}{W_{ply}\, f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

siendo χ_{min} el menor de χ_y y χ_z, y el factor k_y viene dado por:

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y\, N_{Sd}}{\chi_y\, A\, f_y} \leq 1{,}5$$

siendo:

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \left(2\beta_{My} - \psi + \frac{W_{ply} - W_{ely}}{W_{ely}} \right) \leq 0{,}90$$

β_{My} tiene en cuenta la forma del diagrama de reparto de momentos entre los extremos del elemento. Sus valores vienen en la Tabla 1.

El caso en que sea posible el pandeo lateral por torsión se debe verificar mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_z\, A\, f_y / \gamma_M} + \frac{K_{LT}\, M_{YSD}}{\chi_{LT} W_{ply}\, f_y / \gamma_M} \leq 1$$

en la que χ_z se refiere a la dirección del pandeo lateral por torsión.

χ_{LT} es el factor de reducción del pandeo lateral por torsión aplicable

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT}\, N_{sd}}{\chi_z\, A\, f_y} \leq 1$$

siendo:

$$\mu_{LT} = 0{,}15\, \bar{\lambda}_z\, \beta_{MLT} - 0{,}15 \leq 0{,}90$$

y β_{MLT} viene en la Tabla 1.

Cuando la esbeltez adimensional $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0{,}4$, no hay que tener en cuenta el coeficiente de reducción χ_{LT}. Esta regla sirve para espaciar los arriostramientos laterales que resisten el pandeo lateral por torsión.

Las fórmulas de verificación anteriores son válidas para los elementos cuya sección es de clase 1 ó 2; en las secciones clase 3, W_{pl} se debe sustituir por W_{el}; en el caso de secciones clase 4, consúltese la Lección 9.3.

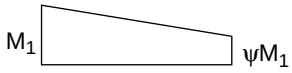
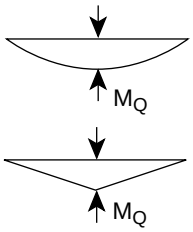
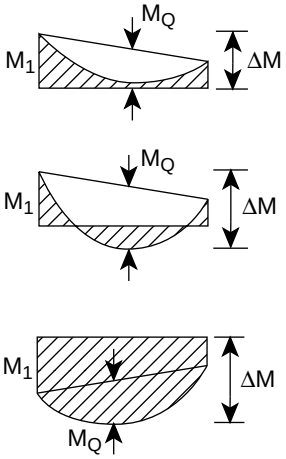
Diagrama de momentos	**Factor de momento uniforme equivalente β_M**
Momentos en los extremos  $-1 \leq \psi \leq 1$	$\beta_{m,\psi} = 1{,}8 - 0{,}7\,\psi$
Momentos debidos a cargas laterales en el plano  	$\beta_{M,Q} = 1{,}3$ $\beta_{M,Q} = 1{,}4$
Momentos debidos a cargas laterales en el plano más momentos en los extremos  	$\beta_M = \beta_{m,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M}(\beta_{m,Q} - \beta_{m,\psi})$ $M_Q = \lvert \text{Max } M \rvert$ debido sólo a carga lateral $\Delta M = \begin{cases} \lvert \text{MaxM} \rvert & \text{para diagrama de momentos sin cambio de signo} \\ \lvert \text{MaxM} \rvert + \lvert \text{MinM} \rvert & \text{cuando cambia el signo del diagrama de momentos} \end{cases}$

Tabla 1 Factores de momento uniforme equivalente β_M

2.2 Vigas-columna con flexión biaxial

Para el caso de la viga-pilar con flexión biaxial es necesario ampliar las fórmulas dadas en el apartado 2.1.

La acción recíproca sin pandeo lateral por torsión pasa a ser:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min}\, A\, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_y\, M_{y,sd}}{W_{pl,y}\, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z\, M_{z,sd}}{W_{pl,z}\, f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

La acción recíproca con pandeo lateral por torsión se expresa así:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{\tau}\, A\, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT}\, M_{y,sd}}{\chi_{LT}\, W_{pl,y}\, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_z\, M_{z,sd}}{W_{pl,z}\, f_y / \gamma_{M1}} \leq 1$$

La definición de k_z y W_{plz} es análoga a la de k_y y W_{ply} que se da en el apartado anterior.

La Figura 4 ilustra estas fórmulas de acción interactiva.

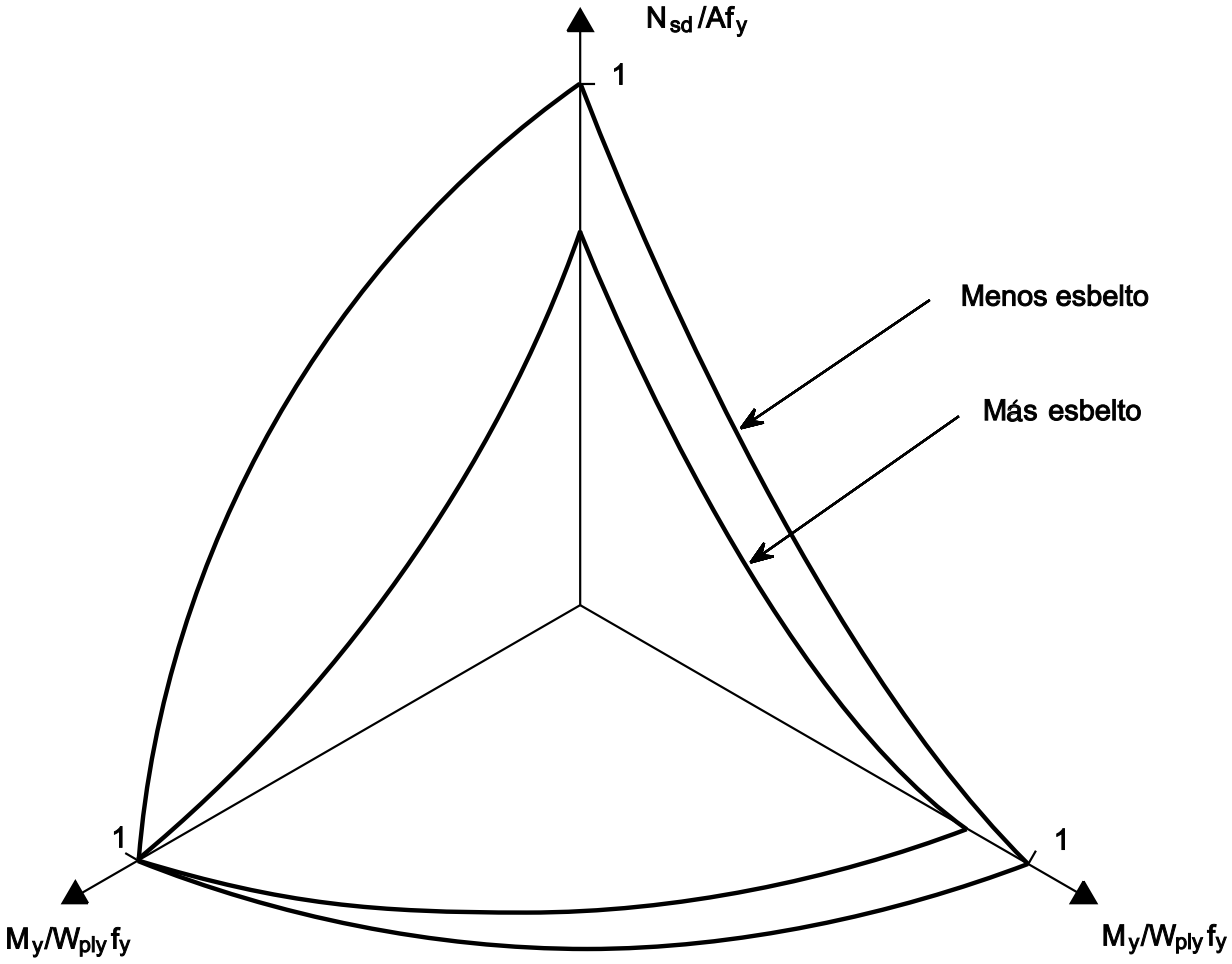


Figura 4 Diagrama de interacción para vigas y pilares con flexión biaxial

3. MÉTODO PARA VERIFICAR PÓRTICOS COMPLETOS

3.1 En general

La Figura 5 es un ejemplo de pórtico con pilares y vigas trapezoidales, cuyas alas exteriores se apoyan lateralmente en correas que, debido a su rigidez a la flexión, también restringen la torsión; pero las vigas y pilares se exponen a la distorsión de la sección debido a la flexibilidad del alma.

La verificación exacta de este pórtico se hará con un modelo de elementos finitos que tenga en cuenta los efectos citados arriba; pero las hipótesis fundamentales de este modelo han de ser tales que la verificación normalizada del apartado 2 arroje el mismo resultado favorable, porque el método normalizado está calibrado con los resultados de los ensayos.

Por lo tanto, damos aquí un procedimiento más simple, relacionado con la verificación del pandeo por flexión de pilares y del pandeo lateral por torsión de vigas.

3.2 Hipótesis básica

Los principios básicos que rigen la verificación normalizada del pandeo por flexión de pilares y del pandeo lateral por torsión de vigas son:

1. La esbeltez adimensional de $\overline{\lambda}$ definida por:

$$\overline{\lambda}_{FB} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{crit}}}\,, \quad \overline{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{crit}}}$$

siendo N_{pl}, M_{pl} los valores característicos de la resistencia elasto-plástica del pilar o viga despreciando los efectos fuera del plano; y N_{crit}, M_{crit} los valores de bifurcación crítica de la resistencia del pilar o de la viga, cuando se consideran las deflexiones y el comportamiento hiperelástico en estado de equilibrio.

2. A partir de la esbeltez adimensional $\overline{\lambda}$, se puede hallar un factor de reducción χ mediante las curvas de pandeo europeas que permiten definir así el valor de cálculo de la resistencia de la viga o pilar:

$$N_{bd} = \chi\, N_{pl} / \gamma_{M1} \text{ para el pilar}$$

$$M_{bd} = \chi\, M_{pl} / \gamma_{M1} \text{ para la viga.}$$

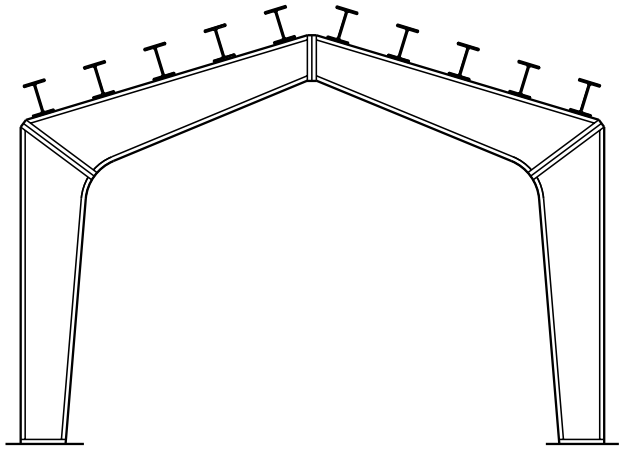


Figura 5 Pórtico con vigas y pilares de canto variable con restricciones torsionales y de desplazamiento elásticos provocados por las correas y con secciones transversales susceptibles de distorsionarse

Aplicando este principio a cualquier estructura cargada, ver Figura 6, el procedimiento es como sigue:

1. El primer paso es hacer un análisis elástico o plástico de la estructura respecto a un caso de carga dado, presumiendo que se impide toda deflexión fuera del plano. Mediante este análisis se haya un multiplicador, γ_{pl}, que representa la resistencia a la rotura de la estructura.

2. Luego se estudia la estructura suponiendo que el comportamiento del material es hiperelástico, incluyendo las deflexiones laterales y por torsión. Esto conduce a un multiplicador γ_{crit} de las cargas dadas que representa la resistencia elástica crítica de la estructura al pandeo lateral o al pandeo lateral por torsión.

3. Entonces se puede definir así la esbeltez general de la estructura:

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{\gamma_{pl}}{\gamma_{crit}}}$$

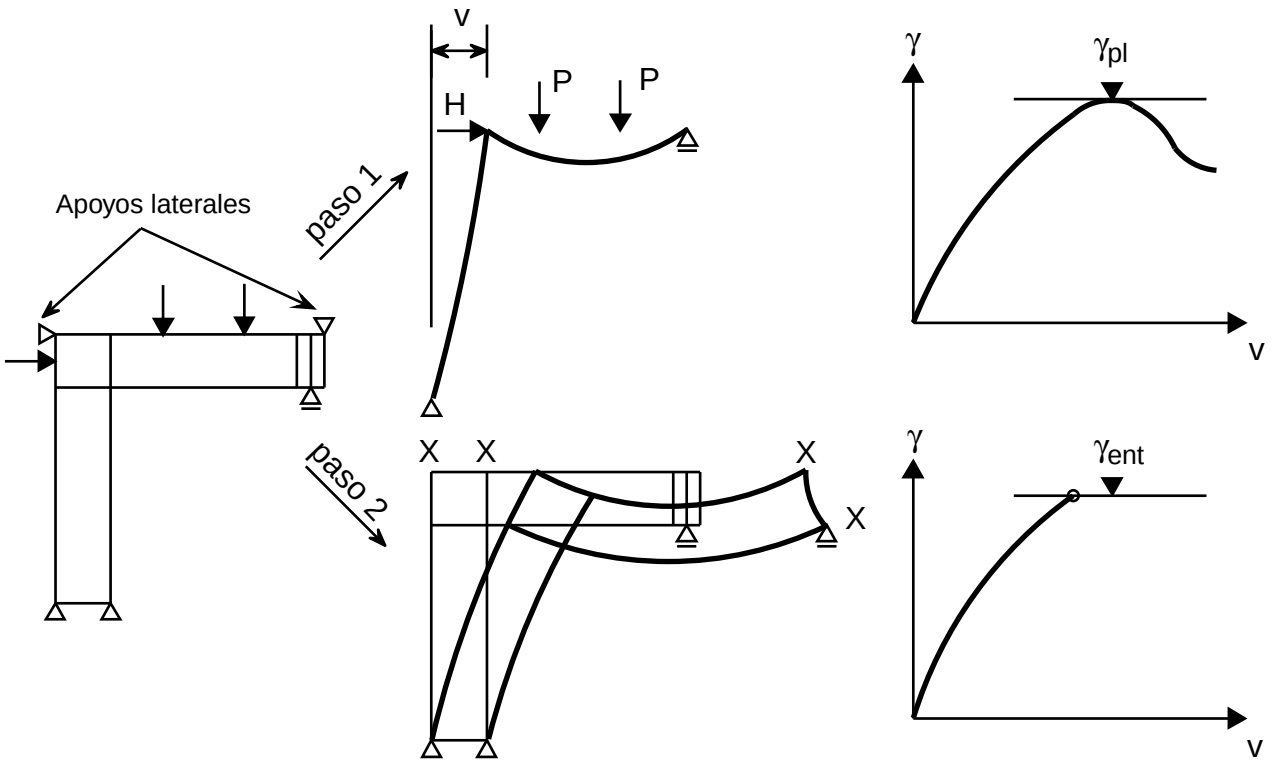


Figura 6 Verificación por etapas de una estructura. Paso 1: se asume un comportamiento elasto-plástico en el plano y ninguna restricción lateral. Paso 2: se supone comportamiento hiperelástico y deflexión lateral.

y tomando el coeficiente de reducción χ de la correspondiente curva de pandeo europea, p.ej.: la curva c, se puede derivar el factor de seguridad final:

$$\gamma = \chi \, \gamma_{pl}$$

Este procedimiento es análogo al de Merchant-Rankine para la verificación no elástica de pórticos.

3.3 Instrumentos del Procedimiento

En general, el procedimiento descrito en el apartado 3.2 requiere un programa informático que realice un análisis elastoplástico plano del pórtico y halle la carga de bifurcación elástica que cause deflexiones laterales y por torsión de la estructura, incluso su distorsión. El programa de cálculo de las cargas elásticas de bifurcación puede ser de elementos finitos o un modelo de retícula en el que las alas y los rigidizadores se consideran vigas y el alma está representada por una celosía equivalente que contiene los efectos de segundo orden; existen estos programas para ordenadores PC.

4. RESUMEN FINAL

1. Generalmente se puede analizar un pórtico tridimensional dividiéndolo en planos y analizarlos suponiendo que no hay imperfecciones; luego se deben comprobar los elementos del pórtico considerando el efecto de las imperfecciones.
2. Los elementos aislados son en general vigas-pilar con flexión en el plano o biaxial.
3. El pandeo dentro y fuera del plano de las vigas-pilar con flexión monoaxial, que no son susceptibles de pandeo lateral con torsión, p.ej.: secciones tubulares, debe verificarse mediante fórmulas de acción recíproca.
4. En el caso de vigas-pilar susceptibles de pandeo lateral por torsión, el pandeo por flexión del pilar debe combinarse con el pandeo lateral por torsión de la viga, mediante la correspondiente fórmula de acción recíproca.
5. Tratándose de vigas-pilar con flexión biaxial, se amplía la fórmula de acción recíproca añadiendo un término análogo.
6. En ciertos casos no es aplicable el procedimiento normalizado para verificar la viga-pilar y hay que recurrir a modelos más exactos.
7. Dada la dificultad del análisis alineal tridimensional que incluya el efecto de las imperfecciones, se ofrece otro procedimiento en el que se define la esbeltez general del pórtico $\bar{\lambda}$; así se puede verificar el pórtico con las curvas de pandeo europeas que tienen en cuenta el pandeo por torsión. Este procedimiento es análogo al de Merchant-Rankine.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Eurocódigo 3 - Part 1, “Design of Steel Structures - General and Building”. Comisión de las Communidades Europeas, Noviembre 1990.

2. Eurocódigo 3 - “Background Document 5.5 (Justification of the design resistances for buckling verifications)”.

3. Braham, Maquoi, Sedlacek, Verwiebe: Ein alternatives Verfabren zur Bestimmung der Biegedrillknicksicherheit von Konstruktionen. Der Stahlbau 1992.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.10 (i), (ii) y (iii): Vigas Columna - Comprensión y Flexión Mono y Biaxial

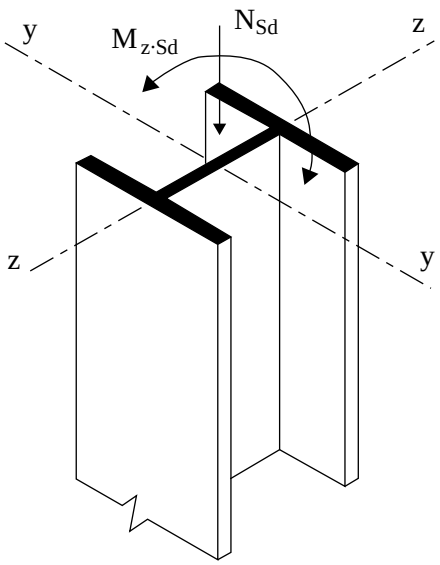
CONTENIDO

Problema resuelto 9.10(i): Compresión y flexión por el eje débil de una sección H

Problema resuelto 9.10(ii): Compresión y flexión por el eje fuerte de una sección H

Problema resuelto 9.10(iii): Compresión y flexión biaxial de una sección H

PROBLEMA 9.10(i) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN POR EL EJE DÉBIL DE UNA SECCIÓN H



Propiedades de la sección

HE 160
Euronorma
53-62

h = 152 mm

b = 160 mm

t_f = 9 mm

t_w = 6 mm

A = 38,8 cm^2

i_y = 6,57 cm

i_z = 3,98 cm

W_y= 220 cm^3

W_z= 76,9 cm^3

$W_{pl.y}$ = 245 cm^3

$W_{pl.z}$ = 118 cm^3

Referencia en Eurocòdigo 3

Demostrar que cuando un pilar de la sección arriba descrita, con una altura libre de 4 m se somete a una compresión axial N_{Sd} de 250 kN, también puede resistir sin riesgo un momento de 6 kNm en el eje menor. Supongamos que este momento produce una sola curva de flexión y que el acero de la sección es Fe 360 con una resistencia a la fluencia de 235 N/mm^2. Los extremos del pilar están empotrados de modo que no pueda producirse traslación relativa, pero no hay impedimento al giro.

Tabla 3.1

Puesto que la flexión tendrá lugar por el eje débil, no puede producirse pandeo por torsión.

Debido a la esbeltez del pilar, el pandeo lateral influye en el cálculo y de ahí que la resistencia se calcule con arreglo a la cláusula 5.5.4.

Puesto que $M_{y.Sd}$ es cero:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min}\, A\, f_y} + \frac{k_z\, M_{z\cdot Sd}}{W_{pl\cdot z}\, f_y} + 0 \le 1 \qquad \text{Ecuación 1}$$

5.5.4(1)

5.3

Esto hace presumir que la sección sea clasificable en la Clase 1 ó 2, según 5.3. Inspeccionándola vemos que cumple los límites de la Clase 1 respecto al reparto de tensiones más desfavorable en compresión uniforme.

Tomemos: $f_y = 235\ N/mm^2 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1$

Tabla 5.3.1

$$\frac{d}{t_w} = \frac{104}{6} = 17,3 \le 33\,\varepsilon$$

$$\frac{c}{t_f} = \frac{80}{9} = 8,88 \le 10\,\varepsilon$$

Clase 1

Puesto que $i_z < i_y$, χ_{min} será χ_z

β_A = 1 puesto que la sección es Clase 1

5.5.1.1

$\lambda_1 = 93,9\varepsilon = 93,9$

$$\bar{\lambda}_z = \frac{\lambda}{\lambda_1}(1)^{0,5} = \frac{4000/39,8}{93,9} = 1,0703$$

= 1,0703

Referencia en Eurocòdigo 3

$$\frac{h}{b} = \frac{152}{160} = 0,95 \leq 1,2$$

$t_f \leq 40$ mm — *Tabla 5.5.3*

Pandeo por el eje menor;

Aplicar la curva (c)

$\chi_z = 0,5$ — *Tabla 5.5.2*

Dado que la flexión es uniforme con una sola curva $\psi = 1,0$

$\beta_{M\lambda} = 1,1$ — *Figura 5.5.3*

$$\mu_z = 1,0703\,(2 \times 1,1 - 4) + \left[\frac{118 - 76,9}{76,9}\right] = -1,392 \leq 0,9$$

5.5.4(1)

$= 1,392 \leq 0,9$

Tomamos $\mu_z = -1,392$

$$K_z = 1 - \left(\frac{-1,392 \times 250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 100 \times 235}\right) \quad \text{pero} \leq 1,5$$

$= 1,763$ pero $\leq 1,5$

$\therefore k_z = 1,5$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1:

$$\frac{250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{1,5 \times 6 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} + 0 \leq 1$$

(Nota $\gamma_{M1} = 1,0$)

$0,548 + 0,324 \leq 1$

$0,873 \leq 1$ $\therefore$ Vale

Adóptese HE 160 A

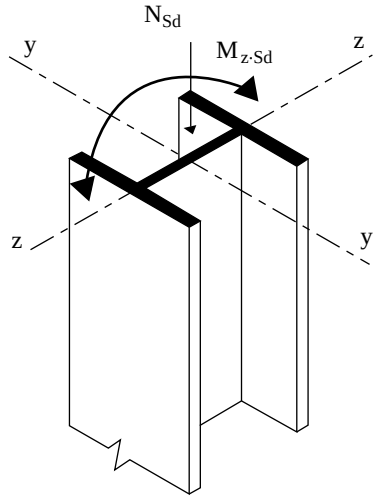
Referencia en Eurocòdigo 3

PROBLEMA 9.10(ii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN POR EL EJE FUERTE DE UNA SECCIÓN H

Demostrar que la sección del problema anterior 9.10(i) puede soportar sin riesgo un momento de 15 kNm en el eje mayor, suponiendo que este momento produce una sola curvatura uniforme en la altura de 4 m, como antes.

Como los momentos se aplican por el eje mayor, el elemento puede ahora agotarse por pandeo dentro o fuera del plano y deben comprobarse estas dos condiciones (1) y (2) de 5.5.4 — *5.5.4*

En la flexión dentro del plano por el eje mayor no hay momento en el eje menor, χ_y que se puede sustituir por χ_{min} en la expresión (5.51). — *Eqn. (5.51)*



Puesto que $M_{z.Sd}$ es cero:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_y \, A \, f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_y \, M_{y \cdot Sd}}{W_{pl \cdot y} \, f_y / \gamma_{M1}} + 0 \leq 1$$

β_A = 1 para la Clase 1 — 5.5.4(1)

λ_1 = 93,9 — 5.5.1.1

5.5.1.2

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{l_y}{i_y \, \lambda_1} = \frac{4000}{67,5 \times 93,9} = 0,631$$

$$\frac{h}{b} = 0,95 \leq 1,2$$

Referencia en Eurocòdigo 3

Pandeo por el eje mayor (y-y); curva (b)

$\chi_y = 0{,}8204$ — *Tabla 5.5.3*

$\beta_{M.y} = 1{,}1$ — *Tabla 5.5.2*

$$\mu_y = 0{,}631(2 \times 1{,}1 - 4) + \left(\frac{245 - 220}{220}\right) =$$

$$= -1{,}022 \leq 0{,}9$$

Fig. 9.5.3

$\mu_y = 1{,}022$ — *5.5.4(1)*

$$k_y = 1 - \frac{(-1{,}022 \times 250 \times 10^3)}{(0{,}8204 \times 38{,}8 \times 10^2 \times 235)} = 1{,}34$$

$k_y = 1{,}34$

$$\frac{250 \times 10^3}{0{,}8204 \times 38{,}8 \times 10^2 \times \frac{235}{1}} + \frac{1{,}34 \times 15 \times 10^6}{245 \times 10^3 \times \frac{235}{1}} + 0 \leq 1$$

(Nota $\gamma_{M1} = 1$) $\quad 0{,}334 + 0{,}349 \leq 1$

$0{,}683 \leq 1$

Por tanto, la sección resiste el pandeo en el plano; ahora hay que averiguar si resiste el pandeo fuera del plano y el lateral por torsión.

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_z A f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT} M_{y \cdot Sd}}{\chi_{LT} W_{pl \cdot y} f_y / \gamma_{M1}} + 0 \leq 1$$

5.5.4(2)

5.5.2(5)

$\lambda_1 = 93{,}9$

$\beta_w = 1{,}0$

$$\lambda_{LT} = \frac{0{,}9 L / i_z}{[C_1]^{1/2}\left[1 + \frac{1}{20}\left[\frac{L / i_z}{h / t_f}\right]^2\right]^{1/4}}$$

F.2.2(4)

Si $\psi = 1$ y $k = 1$ (por ser basculante el extremo) — *Tabla F.1.1*

$\Rightarrow \quad C_1 = 1{,}0$

Referencia en Eurocòdigo 3

$$\lambda_{LT} = \frac{0,9 \times 4000/39,8}{1 \times \left[1 + \frac{1}{20} \times \left(\frac{4000/39,8}{152/9}\right)^2\right]^{1/4}} = 70,109$$

$\bar{\lambda}_{LT} = [\lambda_{LT}/\lambda_1][\beta_w]^{1/2}$ — *5.5.2(5)*

$= [70,109/93,9][1]^{1/2}$

$= 0,7466$

Aplicar la curva (a) a la sección laminada — *5.5.2(4)*

$\chi_{LT} = 0,8234$ — *Tabla 5.5.2*

$\mu_{LT} = 0,15\,\bar{\lambda}_z \times \beta_{M.LT} - 0,15$ — *5.5.4(2)*

$= 0,15 \times 1,0703 \times 1,1 - 0,15$

$= 0,0266 \leq 0,9$

$\mu_{LT} = 0,0266$

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT}\, N_{Sd}}{x_z\, A\, f_y} =$$

$$= 1 - \frac{0,0266 \times 250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235} = 0,985$$

$k_{LT} = 0,985$

$$\frac{250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} +$$

$$+ \frac{0,985 \times 15 \times 10^6}{0,8234 \times 245 \times 10^3 \times 235/1} + 0 \leq 1$$

$0,548 + 0,312 \leq 1$

$0,86 \leq 1$ Vale

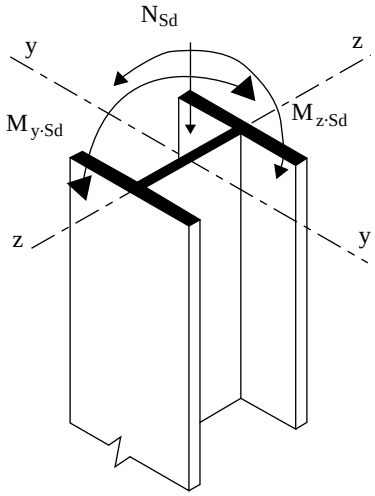
Aceptación de la sección HE 160 A

Referencia en Eurocòdigo 3

PROBLEMA 9.10(iii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN H

Demostrar que la sección del problema anterior 9.10(ii) puede resistir sin riesgo una compresión N_{Sd} de 250 kN y al mismo tiempo momentos en el eje mayor y menor de $M_{y.Sd}$ = 10 kNm y $M_{z.Sd}$ = 2,7 kNm, suponiendo que ambos momentos producen una sola curva de flexión en la altura de 4 m como anteriormente.

Deben cumplirse las condiciones de 5.5.4(1) y 5.5.4.(2). Todas las cantidades componentes vienen de los problemas (i) e (ii).



$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min}\, A\, f_y} + \frac{k_y\, M_{y\cdot Sd}}{W_{pl\cdot y}\, f_y} + \frac{k_z\, M_{z\cdot Sd}}{W_{pl\cdot z}\, f_y} \le 1$$

5.5.4(1)

$$\frac{250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{1,35 \times 10 \times 10^6}{245 \times 10^3 \times 235/1} + \frac{1,5 \times 2,7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \le 1$$

0,548 + 0,234 + 0,146 = 0,928 ≤ 1 Vale

Referencia en Eurocòdigo 3

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_z A f_y} + \frac{k_{LT} M_{y\cdot Sd}}{\chi_{LT} W_{pl\cdot y} f_y} + \frac{k_z M_{z\cdot Sd}}{W_{pl\cdot z} f_y} \le 1$$

$$\frac{250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{0,985 \times 10 \times 10^6}{0,8234 \times 245 \times 10^3 \times 235/1} +$$

$$+ \frac{1,5 \times 2,7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \le 1$$

(Nota: γ_{M1} = 1,0 como antes)

0,548 + 0,208 + 0,146 = 0,902 ≤ 1 Vale

Comprobar también la resistencia de la sección 5.4.8

$$\left[\frac{M_{y\cdot Sd}}{M_{Ny\cdot Rd}}\right]^2 + \left[\frac{M_{z\cdot Sd}}{M_{Nz\cdot Rd}}\right]^{5n} \le 1$$ *5.5.8(11)*

n = N_{Sd} /$N_{pl.Rd}$

= 250/(235 × 3,88) = 0,274

5n = 5 × 0,274 = 1,371 Tomar 5n = 1,0

$M_{N.y}$ = 1,11 $M_{pl.y}$ (1 - n)

= 1,11 × 245 × 235 (1 - 0,274)/10^3 = 46,4 kNm

$M_{N.z}$ = 1,56 $M_{pl.z}$ (1 - n) (n + 0,6)

= 1,56 × 118 × 235 (1 - 0,274) (0,274 + 0,6)/10^3

= 27,45 kNm

$$\left[\frac{10}{46,4}\right]^2 + \left[\frac{2,7}{27,45}\right]^1 \le 1$$

0,046 + 0,0984 = 0,144 ≤ 1

Cumple las condiciones de pandeo general y resistencia local.

Acéptese esta sección.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Problema resuelto 9.11(i) y (ii): Vigas Columna - Comprensión y Flexión Biaxial

CONTENIDO

Problema resuelto 9.11(i):	Compresión y flexión biaxial de una sección H, momento no uniforme.
Problema resuelto 9.11(ii):	Compresión y flexión biaxial de una sección H con varias formas de apoyo en los sentidos fuerte y débil.

Referencia en Eurocòdigo 3

PROBLEMA 9.11(i) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN BIAXIAL DE UNA SECCIÓN H, MOMENTO NO UNIFORME

Demostrar que la sección del problema anterior puede resistir sin riesgo una compresión N_{sd} de 250 kN y al mismo tiempo momentos en el eje mayor y menor de $M_{y.sd}$ = 20 kNm y $M_{z.sd}$ = 7 kNm, suponiendo que ambos momentos producen dos curvas de flexión en la altura de 4 m, como anteriormente.

Deben cumplirse las condiciones de 5.5.4(1) y 5.5.4.(2). Puesto que el pandeo puede comprobarse sin aplicar todo el valor de los momentos aplicados, es probable que la resistencia de la sección sea más crítica que en el problema anterior. Varias de las cantidades componentes proceden de los problemas 1, 2 y 3.

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min}\, A\, f_y} + \frac{k_y\, M_{y\cdot Sd}}{W_{pl\cdot y}\, f_y} + \frac{k_z\, M_{z\cdot Sd}}{W_{pl\cdot z}\, f_y} \le 1$$

5.5.4(1)

Fig. 5.5.3

ψ = 1,0 en ambos planos $\rightarrow$ $\beta_{M,Y}$ = 2,5

$\beta_{M,Z}$ = 2,5

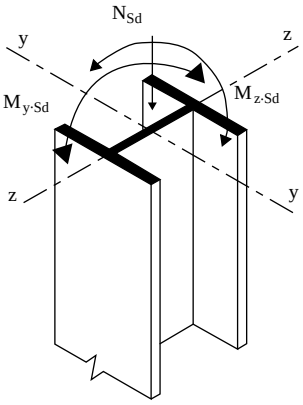
$\beta_{M,LT}$ = 2,5

5.5.4.1

$$\mu_z = 1,0703\,(2 \times 2,5 - 4) + \left(\frac{118 - 76,9}{76,9}\right) =$$

$$= 1,605 \quad \text{pero} \le 0,9$$

$$\mu_z = 0,9$$



$$k_z = 1 - \frac{0,9 \times 250 \times 10^3}{0,50 \times 38,8 \times 10^2 \times 235} = 0,506 \le 1,5$$

$$k_z = 0,506$$

$$\mu_y = 0,631(2 \times 2,5 - 4) + \left(\frac{245 - 220}{220}\right) =$$

$$= 0,745 \le 0,9$$

Referencia en Eurocòdigo 3

$\mu_y = 0,745$

$$k_y = 1 - \frac{0,745 \times 250 \times 10^3}{0,81 \times 38,8 \times 10^2 \times 235} = 0,748 \leq 1,5$$

$k_y = 0,748$

$$\frac{250 \times 10^3}{0,5 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{0,748 \times 20 \times 10^6}{245 \times 10^3 \times 235/1} + \frac{0,506 \times 7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \leq 1$$

$0,548 + 0,260 + 0,127 \leq 1$

$0,935 \leq 1$ Vale

Comprobar el pandeo lateral por torsión

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_z A f_y} + \frac{k_{LT} M_{y \cdot Sd}}{\chi_{LT} W_{pl \cdot y} f_y} + \frac{k_z M_{z \cdot Sd}}{W_{pl \cdot z} f_y} \leq 1$$ *5.5.4(2)*

$\mu_{LT} = 0,15 \times 1,0703 \times 2,5 - 0,15$

$= 0,251 \leq 0,9$

$\mu_{LT} = 0,251$

$$k_{LT} = 1 - \frac{0,251 \times 250 \times 10^3}{0,50 \times 38,8 \times 10^2 \times 235} = 0,862 \leq 1,0$$

$k_{LT} = 0,862$

$\lambda_1 = 93,9$ *5.5.2(5)*

$\beta_w = 1,0$

$$\lambda_{LT} = \frac{0,9 L / i_z}{[C_1]^{1/2} \left[1 + \frac{1}{20}\left[\frac{L/i_z}{h/t_f}\right]^2\right]^{1/4}}$$ *F.2.2(4)*

Referencia en Eurocòdigo 3

Si ψ = -1 y k = 1 (Pues ambos extremos son basculantes)

C_1 = 2,752 *Tabla F.1.1*

$$\lambda_{LT} = \frac{70,109}{(C_1)^{1/2}} = \frac{70,109}{(2,752)^{1/2}} = 42,26$$

$\overline{\lambda}_{LT}$ = $[\lambda_{LT} / \lambda_1]\,[\beta_W]^{1/2}$

= [42,262/93,9] [1] = 0,45

Aplicar la curva (a) a la sección laminada

χ_{LT} = 0,9386

$$\frac{250 \times 10^3}{0,50 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{0,8621 \times 20 \times 10^6}{0,9386 \times 245 \times 10^3 \times 235/1} +$$

5.5.4(2)

$$+ \frac{0,506 \times 7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \leq 1$$

0,548 + 0,319 + 0,127 = 0,994 ≤ 1 Vale

$$\left[\frac{M_{y \cdot Sd}}{M_{Ny \cdot Rd}}\right]^2 + \left[\frac{M_{z \cdot Sd}}{M_{Nz \cdot Rd}}\right]^{5n} \leq 1$$

$$\left[\frac{20}{46,4}\right]^2 + \left[\frac{7}{27,4}\right]^1 \leq 1$$

0,186 + 0,255 = 0,44 ≤1 Vale *5.5.2(5)*

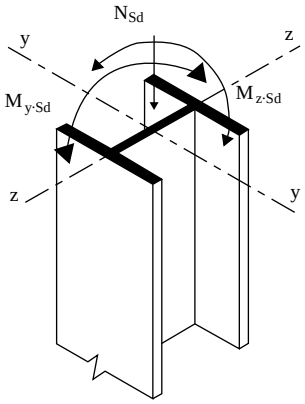
Cumple las condiciones de pandeo general y resistencia loca.

Acéptese esta sección.

F.2.2(4)

Referencia en Eurocòdigo 3

PROBLEMA 9.11(ii) COMPRESIÓN Y FLEXIÓN BIAXIAL DE UNA SECCIÓN H CON VARIAS FORMAS DE APOYO EN EL SENTIDO FUERTE Y EL DÉBIL



Un pilar de 7,2 m de altura, articulada en la base, las vigas transmiten cargas al eje fuerte por la parte alta y al eje débil a media altura. Comprobar si es seguro a compresión N_{sd} = 250 kNm, momentos en la parte alta $M_{y.sd}$ = 15 kNm y $M_{z.sd}$ = 2,7 kNm

Hay que estudiar la posibilidad de que el eje fuerte se agote en toda la altura y el eje débil en la parte alta.

Estudiar la resistencia del pilar — *5.5.1*

Tabla F.1.1

$$\bar{\lambda}_y = (\lambda_y / \lambda_1)\,(\beta_A)^{1/2} \qquad \textit{5.5.1.2}$$

$$= \left[\frac{7200 / 65,7}{93,9}\right] (1) = 1,167$$

$$\bar{\lambda}_z = \left[\frac{3600 / 39,8}{93,9}\right] (1) = 0,963$$

$\frac{h}{b} = 0,93 \leq 1,2 \Rightarrow$ aplicando las curvas de pandeo (b), (c) — *Tabla 5.5.3*

$\chi_y = 0,4969$ — *Tabla 5.5.1*

$\chi_z = 0,562$

Para el eje fuerte $\psi_y = 0 \Rightarrow \beta_{M,y} = 1,8$ — *Fig. 5.5.3*

Para el eje débil $\psi_z = 0,5$ en la parte alta

Referencia en Eurocòdigo 3

ψ_z = 0 en la parte baja

$\therefore$ poner $\beta_{M,y}$ = 1,45 para la parte alta

$$\mu_z = 0,9632\,(2 \times 1,45 - 4) + \left(\frac{118 - 76,9}{76,9}\right) =$$

$$= -0,525 \le 0,90$$

5.5.4(1)

μ_z = -0,525

$$k_z = 1 + \frac{0,525 \times 250 \times 10^3}{0,562 \times 38,8 \times 10^2 \times 235} = 1,256 \le 1,5$$

k_z = 1,256

$$\mu_y = 1,167\,(2 \times 1,8 - 4) + \left(\frac{245 - 220}{220}\right) =$$

$$= -0,353 \le 0,90$$

μ_y = -0,353

$$k_y = 1 + \frac{0,353 \times 250 \times 10^3}{0,4969 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} =$$

$$= 1,1952 \le 1,5$$

k_y = 1,195

$$\frac{250 \times 10^3}{0,49 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} + \frac{1,195 \times 15 \times 10^6}{245 \times 10^3 \times 235/1} + \frac{1,256 \times 2,7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \le 1$$

0,560 + 0,311 + 0,122 = 0,993 ≤ 1 Vale

Comprobar el pandeo lateral por torsión:

$\beta_{M.LT}$ = 1,45 para la parte alta

Fig. 5.5.3

μ_{LT} = 0,15 × 0,9632 × 1,45 - 0,15

= 0,059 ≤ 0,90

5.5.4(2)

Referencia en Eurocòdigo 3

$\mu_{LT} = 0,059$

$$k_{LT} = 1 - \frac{0,059 \times 250 \times 10^3}{0,55 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} = 0,97 \leq 1,0$$

$k_{LT} = 0,97$

C_1 = 1,323 para ψ = 0,5 y k = 1 (Para extremo articulado) — *Tabla F.1.1*

$$\lambda_{LT} = \frac{0,9 \times 3600/39,8}{[1,323]^{1/2}\left[1 + \frac{1}{20}\left[\frac{3600/39,8}{152/9}\right]^2\right]^{1/4}} =$$

$= 56,662$ — *F.2.1.(4)*

= 56,662

$\overline{\lambda}_{LT}$ = (56,662/93,9) (1)

= 0,603

Aplicar la curva (a) — *5.5.2(4)*

χ_{LT} = 0,89 — *Tabla 5.5.2*

$$\frac{250 \times 10^3}{0,55 \times 38,8 \times 10^2 \times 235/1} +$$

$$+\frac{0,97 \times 15 \times 10^6}{0,89 \times 245 \times 10^3 \times 235/1} + \frac{1,262 \times 2,7 \times 10^6}{118 \times 10^3 \times 235/1} \leq 1$$

0,499 + 0,284 + 0,123 = 0,906 ≤ 1 Vale

F.5.4.8(11)

$$\left[\frac{25}{46,4}\right]^2 + \left[\frac{2,7}{27,4}\right]^1 \leq 1$$

0,290 + 0,099 = 0,39 ≤ 1 Vale

Cumple las condiciones de pandeo general y resistencia local.

La sección es aceptable

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.11: Pórticos

OBJETIVO/CONTENIDO

Presentar las ideas fundamentales del comportamiento del pórtico, como preludio de una descripción más detallada del cálculo que se dará en lecciones posteriores.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lecciones 2.7.1 y 2.7.2:	Introducción al cálculo de edificios de varias plantas
Lecciones 8.6.1 y 8.6.2:	Pandeo de elementos estructurales reales
Lección 9.1:	Métodos de análisis de estructuras de acero

LECCIONES AFINES

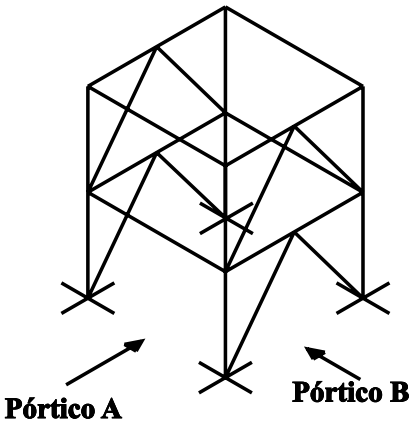
Lección 16.2:	Análisis de pórticos: análisis elástico
Lección 16.3:	Análisis de pórticos: análisis plástico
Lecciones 16.8.1 y 16.8.2:	Anatomía y análisis de edificios de varias plantas
Lección 16.10:	Cálculo de edificios de varias plantas con uniones de resistencia parcial y semirrígidas
Lección 16.13.1:	Definiciones del cálculo de pórticos con uniones rígidas
Lección 16.13.2:	Cálculo de pórticos con uniones rígidas - Análisis estructural
Lección 16.13.3:	Cálculo de pórticos con uniones rígidas - cálculo estructural

RESUMEN

Se describen y comentan las técnicas para hallar los esfuerzos de los elementos de los pórticos de acero. Estas técnicas abarcan métodos de primer y segundo orden fundados en las teorías elástica y plástica. Se explican los métodos para proyectar y construir pórticos de acero que permite el Eurocódigo 3 y se esboza su puesta en práctica.

1. INTRODUCCIÓN

El pórtico de tamaño y complejidad variable es la forma más frecuente de construir estructuras de acero. Aunque su aplicación más obvia es en edificios, armaduras de puentes, plataformas petrolíferas, también es muy útil en andamiajes y naves industriales.



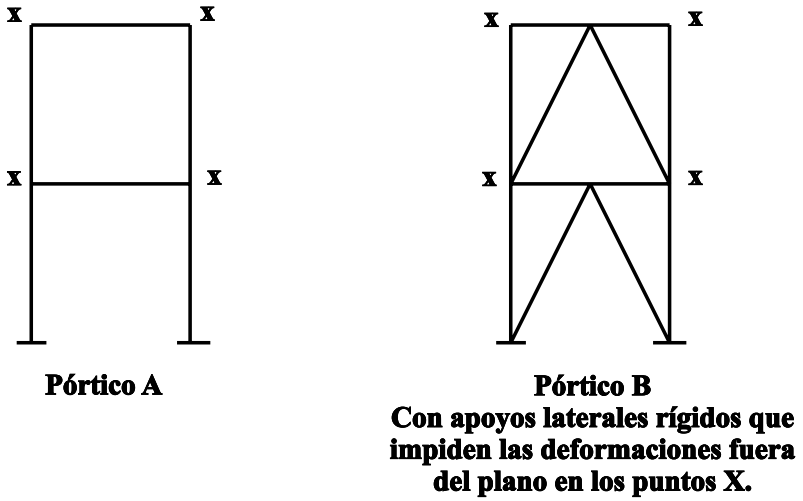


Figura 1 Separación de un pórtico espacial en un conjunto de pórticos planos

La figura 1 indica los principales elementos que componen una estructura porticada. La cubierta y los forjados transmiten las cargas verticales por flexión y cizalla a los pilares, que a su vez las descargan en los cimientos ejerciendo esfuerzos de compresión, flexión y cizalla. La carga horizontal, es decir, la eólica, también debe transmitirse a los cimientos, y según la geometría del pórtico y la magnitud relativa de las cargas horizontales y laterales, pueden originar tracción en algunos pilares, y así tirar de los cimientos hacia arriba.

En general, la porticación tridimensional de un edificio puede dividirse en varios pórticos planos con condiciones de apoyo bien definidas y restricción de las deformaciones fuera del plano, ver Figura 1. El estado límite de estos pórticos planos debe investigarse respecto a dos condiciones:

- Ultimo estado límite.
- Estado límite de servicio.

En lecciones posteriores se dan los detalles de estas investigaciones. Esta lección de introducción se centra en describir los aspectos principales de la conducta de los pórticos y el enlace de estos aspectos con las distintas técnicas para predecir la reacción de la estructura. Esta es una lección preparatoria de un tratamiento posterior más pormenorizado.

2. SISTEMAS DE PÓRTICOS

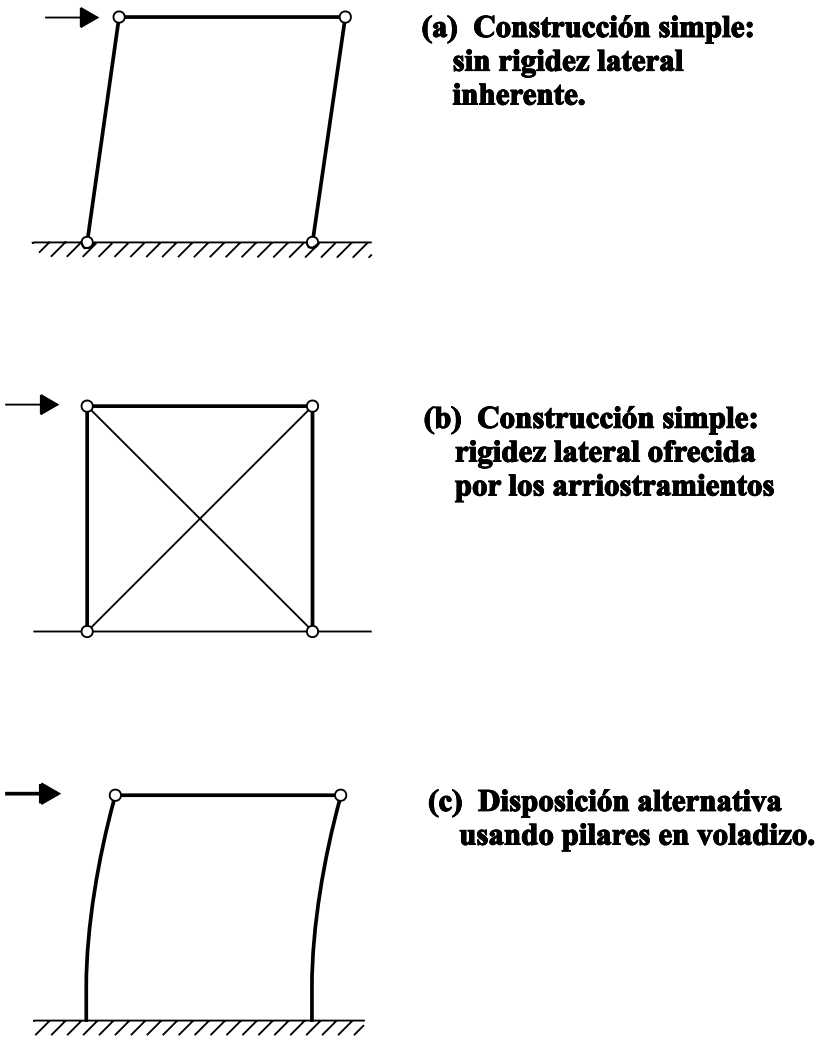
A los fines del análisis y cálculo, se considera que los pórticos de acero pertenecen a una de estas dos categorías:

- articulados (construcción simple).
- de uniones rígidas (construcción continua).

Por supuesto, hay ejemplos en que están presentes elementos de los dos tipos; este texto no considera estos casos al desarrollar el tema. Tampoco considera el caso en que las uniones funcionan como intermediarias (ver por ejemplo las lecciones 13.7 y 16.10).

3. CONSTRUCCIÓN SIMPLE

Los pórticos de edificios proyectados y construidos de acuerdo con este principio requieren poco análisis, ya que se pueden asignar las cargas a cada elemento mediante estática simple. Como se presume que las uniones son incapaces de transmitir momentos, es necesario arriostrar para crear estabilidad lateral, ya que, evidentemente, una crujía rectangular con uniones articuladas entre pilares y vigas, carece de rigidez lateral. La única excepción es cuando la base de los pilares están fijadas rígidamente a unos cimientos fuertes de modo que actúen como ménsulas verticales. La Figura 2 ilustra estos puntos.



(a) Construcción simple: sin rigidez lateral inherente.

(b) Construcción simple: rigidez lateral ofrecida por los arriostramientos

(c) Disposición alternativa usando pilares en voladizo.

Figura 2 Construcción simple

Una vez decididos los esfuerzos que inciden en los elementos, puede realizarse el cálculo considerando las vigas, pilares y uniones por separado por los procedimientos expuestos en las lecciones del Tomo 9 y 13 respectivamente. Se presume que el arriostramiento resiste toda la carga horizontal, y en la terminología del Eurocódigo 3 esta estructura se denomina pórtico arriostrado.

4. CONSTRUCCIÓN CONTINUA

Las uniones rígidas dan lugar a que las vigas y pilares actúen con una considerable interacción debido a la transmisión de momentos por el pórtico. El análisis y el cálculo pueden plantearse de varios modos; la consideración más importante es en qué grado ha de tomarse el efecto de las deflexiones sobre la reacción del pórtico. Aunque se pueden combinar uniones rígidas con arriostramiento, esta solución no es común por razones de economía de la construcción. Las uniones rígidas sólo se hacen normalmente como alternativa al arriostramiento para aportar rigidez lateral, lo que se llama acción de pórtico, que se ilustra en la Figura 3.

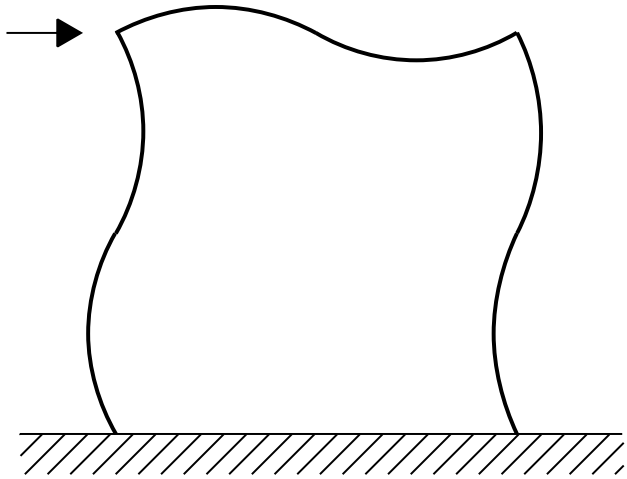


Figura 3 Rigidez lateral suministrada por reacción del pórtico

5. MÉTODOS DE ANÁLISIS

5.1 Análisis elástico de primer orden

En el análisis elástico de primer orden se presume que la relación entre la carga aplicada F y la deformación (δ) es lineal, y que el desplazamiento del pórtico no afecta al reparto de esfuerzos internos en el mismo.

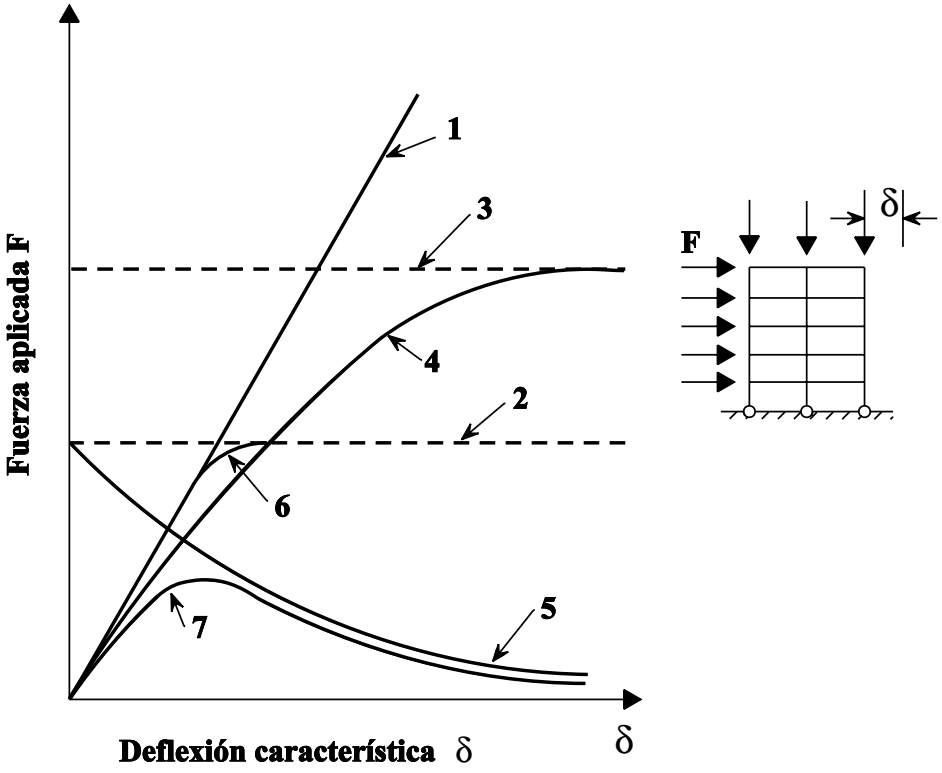


Figura 4 Respuesta de un pórtico de acuerdo a diferentes tipos de análisis

Por tanto, el pórtico se puede analizar según los principios de elasticidad lineal descritos en la Lección 9.1. El pórtico reacciona según la línea 1 de la Figura 4.

5.2 Análisis plástico de primer orden

El análisis plástico rígido (o aplicación de la teoría plástica simple) desprecia el efecto de las deflexiones elásticas y presume que toda la deformación ocurre en partes discretas de la estructura, llamadas rótulas plásticas, donde se desarrolla la plasticidad. Cuando se aplica la teoría plástico-rígida sólo se atiende al estado de ruina. Este estado ocurre cuando se supone que se han formado suficientes rótulas plásticas para convertir la estructura en un mecanismo. Por eso no se considera el camino por el que se llega a esta fase, o sea, la secuencia de formación de rótulas y el reparto intermedio de las cargas. La Figura 5 presenta el concepto respecto a tres casos de carga, horizontal, vertical y combinada, en tanto que la curva 2 de la Figura 4 es la respuesta del pórtico a este planteamiento. Debido a la forma del análisis no se da información acerca de la magnitud de las flechas. El análisis sólo dice que con la carga de ruina se pierde toda la rigidez y por tanto, las deflexiones (en teoría) se hacen incontrolables.

5.3 Carga elástica crítica

Con los métodos descritos en las lecciones del Tomo 8 se pueden calcular las cargas de pandeo de los pórticos adecuadamente idealizadas. Son posibles varios modos de pandeo, según sea el contenido y complejidad del pórtico, cada uno con su correspondiente carga vertical. En el pórtico simple de la Figura 6 el pandeo puede ser simétrico o asimétrico, soliendo evitarse el segundo con una carga crítica mucho más baja. De nuevo, el análisis no da información acerca de la magnitud de las deformaciones, simplemente indica una cantidad de carga particular. La curva 3 de la Figura 4 es una representación de la carga crítica que arroja un análisis de pandeo elástico.

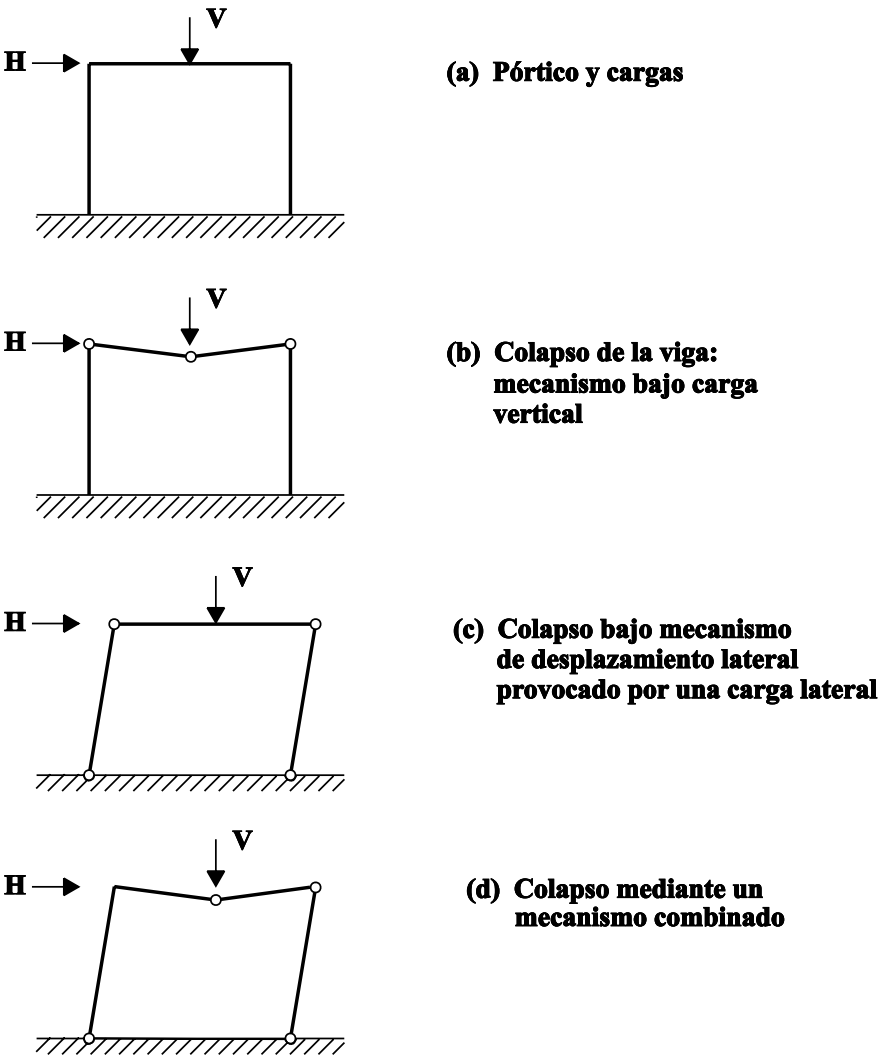


Figura 5 Análisis rígido-plástico de primer orden

5.4 Análisis elástico de segundo orden

En el análisis elástico de segundo orden se tiene en cuenta el efecto de las deformaciones elásticas en el reparto interno de esfuerzos. El resultado es una transición del análisis lineal, línea 1, a poca carga, a la línea 3 elástica crítica a grandes deflexiones. Los efectos de segundo orden sobre los pórticos se pueden dividir en dos partes:

- reducción de la rigidez efectiva a la flexión de los elementos individuales, causada por la carga de compresión.
- desestabilización debida al momento de vuelco producido por la acción de las cargas verticales a través de las deflexiones horizontales causadas por las cargas laterales.

5.5 Análisis rígido-plástico de segundo orden

Si al formular el equilibrio del pórtico se introducen las deformaciones que podrían desarrollarse a resultas de la formación del mecanismo plástico de agotamiento, el resultado es el desarrollo de la curva 5 de mecanismo de la Figura 4. Esta curva indica que sólo se puede mantener el equilibrio reduciendo el valor de las cargas aplicadas.

5.6 Primer orden, teoría elasto-plástica

Si se modifica un análisis elástico lineal introduciendo reducciones de la rigidez del pórtico al irse formando rótulas plásticas a la par que aumenta la carga aplicada, se obtiene la curva de respuesta de la línea 6. Esta línea muestra una pérdida gradual de rigidez al formarse cada rótula plástica y termina por unirse a la línea 2 rígido-plástica.

5.7 Segundo orden, análisis elasto-plástico

Si en el análisis que busca la formación de rótulas plásticas se incluye también el efecto de las deformaciones para construir las

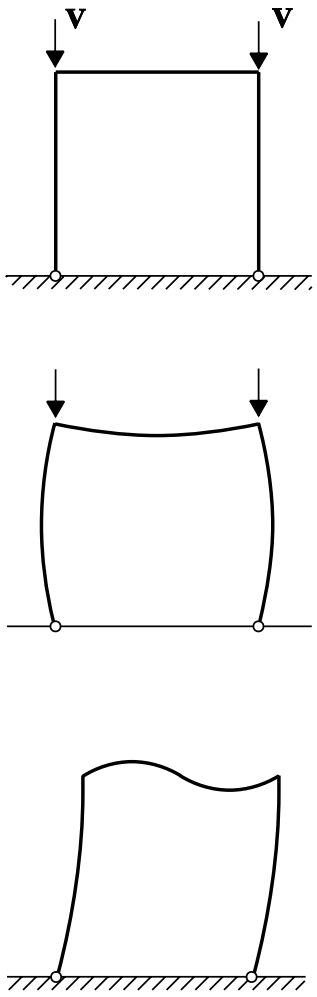


Figura 6 Pandeo de pórticos

ecuaciones rectoras, la línea 6 varía con cierta semejanza a la línea 7. La línea 7 empieza siguiendo la línea 1 elástica de segundo orden, pero al hacerse más decisivos los efectos desestabilizadores se aparta para seguir la línea 4 elástica de segundo orden. La formación de la primera rótula plástica, que aparece a una carga aplicada algo menor que en el análisis elastoplástico de primer orden, debido a la mayor deformación asociada al análisis de segundo orden, reduce aún más la rigidez, haciendo que la línea 7 se aparte de la línea 4. Esta divergencia se va pronunciando a medida que se forman más rótulas plásticas. El pico de esta curva corresponde a la carga de colapso predicha por este tipo de análisis. Con grandes deformaciones, la línea 7 tiende a unirse a la línea 5, que es la de mecanismo.

5.8 Segundo orden, análisis de la zona plástica

Si se tiene en cuenta la propagación de la plasticidad por toda la sección y a lo largo del elemento, en vez de suponer que se concentra en las zonas deseables de las rótulas plásticas, el tipo de análisis que resulta suele llamarse teoría de la zona plástica. Ofrece una representación aún más cercana al comportamiento real y lleva a una curva similar a la de la línea 7.

6. OBSERVACIONES

En principio se puede analizar el pórtico por cualquiera de los métodos anteriores. En la práctica, algunos de los efectos tienen poca importancia real en ciertas clases de estructura, p.ej.: en muchos pórticos de poca altura los efectos de segundo orden son muy pequeños y es razonable despreciarlos. También pueden surgir casos en los que debe evitarse ciertas formas de respuesta, p.ej.: es normal el análisis elástico en edificios que contengan grúas pesadas con cargas repetidas.

Los planteamientos más complejos es casi seguro que exijan un programa informático adecuado que se haga cargo del volumen de operaciones. Por lo tanto es importante elegir un método proporcionado al grado de exactitud necesario y a la importancia del proyecto en cuestión.

El cálculo de las deflexiones con cargas de trabajo a fin de comprobar la viabilidad, se suele hacer por análisis elástico lineal.

7. CLASIFICACIÓN DE PÓRTICOS

Con el propósito de guiar en la elección del tipo de análisis idóneo en cada caso particular, el Eurocódigo 3 ha introducido la idea de clasificar los pórticos, según dos criterios:

- con o sin arriostramiento.
- con o sin flecha horizontal.

7.1 Pórticos arriostrados

- Un pórtico se clasifica como arriostrado si la resistencia a la flecha horizontal la aporta un sistema de riostras cuya respuesta a las cargas horizontales tiene suficiente rigidez para que sea aceptable suponer con exactitud que el sistema de riostras las resiste todas.

  Además se puede cuantificar así:

- Un pórtico de acero se puede clasificar como arriostrado si el sistema de riostras reduce los desplazamientos laterales por lo menos un 80%.

A dichos pórticos se les debe aplicar la teoría elástica o la plástica.

Un pórtico que no cumpla la condición anterior se considera sin arriostrar.

Para calcular el sistema de arriostramiento:

- Se tendrán en cuenta las imperfecciones de flecha horizontal iniciales del pórtico arriostrado previstas en la Cláusula 5.2.4.3 del Eurocódigo 3 y comentadas aquí más adelante.
- Las imperfecciones de flecha horizontal iniciales, más las cargas horizontales que se apliquen al pórtico arriostrado, pueden tratarse como si sólo afectasen al sistema de riostras.
- El sistema de riostras debe calcularse para resistir:
  - cualquier carga horizontal aplicada al pórtico que refuerza.
  - cualquier carga horizontal o vertical aplicada directamente al sistema de riostras.
  - los efectos de las imperfecciones de flecha horizontal iniciales (o fuerzas horizontales equivalentes) del propio sistema de riostras y de todos los pórticos que refuerce.
- Un sistema de arriostramiento que sea un pórtico o parte de un pórtico, puede a su vez ser de flecha horizontal o no serlo.

7.2 Pórticos sin arriostrar

Según la Cláusula 5.2.5.2 del Eurocódigo 3, un pórtico sin arriostrar puede entrar en la clasificación de sin flecha lateral siempre que:

- Responda a los esfuerzos horizontales en un plano con la suficiente rigidez para que sea aceptable con exactitud despreciar las fuerzas interiores o momentos que resultasen del desplazamiento lateral de sus nudos.

Además, esta clasificación se puede cuantificar así:

- Un pórtico puede clasificarse en la categoría de sin flecha horizontal en un caso de carga dado, si la relación de carga elástica crítica V_{Sd}/V_{cr} de dicha carga cumple este criterio:

$$V_{Sd} / V_{cr} \leq 0{,}1$$

siendo V_{Sd} el valor de cálculo de la carga vertical total.

V_{cr} el valor elástico crítico de agotamiento en el modo sin flecha horizontal.

- Si cumplen este criterio, los pórticos planos de viga-pilar de la estructura de edificios cuyas vigas se unen a los pilares en cada planta, se pueden clasificar como sin flecha horizontal en un caso de carga dado. Cuando se aplica la teoría de primer orden, los desplazamientos horizontales en cada planta causados por las cargas de cálculo (horizontales y verticales), más la imperfección de flecha horizontal aplicada en forma de esfuerzos horizontales equivalentes, deben cumplir este criterio:

$$\left(\frac{\delta}{h}\right)\left(\frac{V}{H}\right) \leq 0,1$$

siendo δ el desplazamiento horizontal del punto más alto de la planta respecto al más bajo.

h la altura de la planta.

H la reacción horizontal total en el punto más bajo de la planta.

V la reacción vertical total en el punto más bajo de la planta.

Ambos requisitos proceden de la idea de que, si se cumplen, la resistencia portante hallada despreciando los efectos de la flecha horizontal son sólo un diez por ciento menos que si se calcularan incluyendo dichos efectos. Este planteamiento se funda a su vez en el concepto de Merchant-Rankine para estimar la carga a la rotura verdadera de un pórtico que se agota por algún tipo de inestabilidad inelástica, conociendo su carga elástica crítica y su carga de agotamiento rígido-plástica de primer orden. Ambas cargas son relativamente sencillas de calcular.

La fórmula original de Merchant-Rankine de la carga de agotamiento V_{sd} es:

$$\frac{1}{V_{sd}} = \frac{1}{V_{cr}} + \frac{1}{V_{pl}}$$

siendo:

V_{cr} la carga elástica crítica.

V_{pl} la carga rígido-plástica de agotamiento de primer orden.

De aquí resulta claro que si $V_{cr} >> V_{pl}$, entonces $V_{sd} \approx V_{pl}$.

Los pórticos sin flecha horizontal deben calcularse por la teoría elástica o plástica de primer orden para que sus elementos y combinaciones resistan con seguridad los esquemas de carga que ocasionan las combinaciones más desfavorables de esfuerzos internos y momentos. Se tomarán en cuenta los efectos de arriostrar los pilares para mejorar la estabilidad, aplicando el concepto de la longitud efectiva de pandeo explicada en la Lección 9.7.

Los pórticos que no cumplan las condiciones anteriores deben calcularse como pórticos sin flecha horizontal.

7.3 Pórticos con flecha horizontal

Los pórticos con flecha horizontal se analizarán respecto a los esquemas de carga variable que son críticos para la ruina en este modo. Los pórticos con flecha horizontal se deben analizar además como si no la tuvieran.

Las imperfecciones de flecha horizontal iniciales, y las de los elementos si fuera necesario, se incluirán en el análisis de todos los pórticos.

El objeto de incluir las imperfecciones en el análisis de pórticos con flecha horizontal es abarcar los efectos de falta de verticalidad, falta de rectitud, tensiones remanentes, etc. En el Eurocódigo 3 se expresa por medio de un conjunto de imperfecciones geométricas equivalentes. Tales imperfecciones no son verdaderas tolerancias de construcción, puesto que siendo la intención representar el efecto de varios factores, pueden ser mayores que dichas tolerancias. La forma que especifica el Eurocódigo 3 es:

- Los efectos de las imperfecciones deben incluirse en el análisis de pórticos mediante una imperfección geométrica equivalente en forma de una imperfección de flecha horizontal inicial ϕ determinada mediante:

$$\phi = k_c \, k_s \, \phi_o$$

con $\phi_o = 1/200$

$$k_c = [0{,}5 + 1/n_c]^{0{,}5} \quad \text{pero } k_c \leq 1{,}0$$

y $$k_s = [0{,}2 + 1/n_s]^{0{,}5} \quad \text{pero } k_s \leq 1{,}0$$

siendo n_c el número de pilares por plano.

n_s el número de plantas.

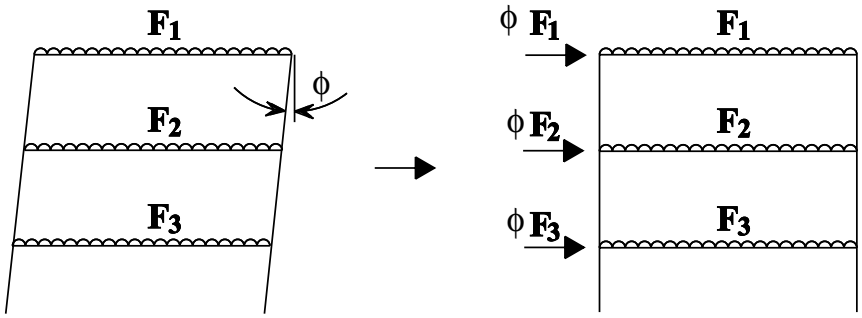


Figura 8 Fuerzas horizontales equivalentes

- Los pilares que soportan una carga vertical N_{Sd} inferior al 50% del valor medio de la carga vertical por pilar en el plano en estudio, no deben incluirse en n_c.

- Los pilares incluidos en ns que no atraviesan todas las plantas no deben incluirse en n_c. Las cubiertas y forjados que no estén unidos a todos los pilares incluidos en nc deben excluirse para hallar n_s.

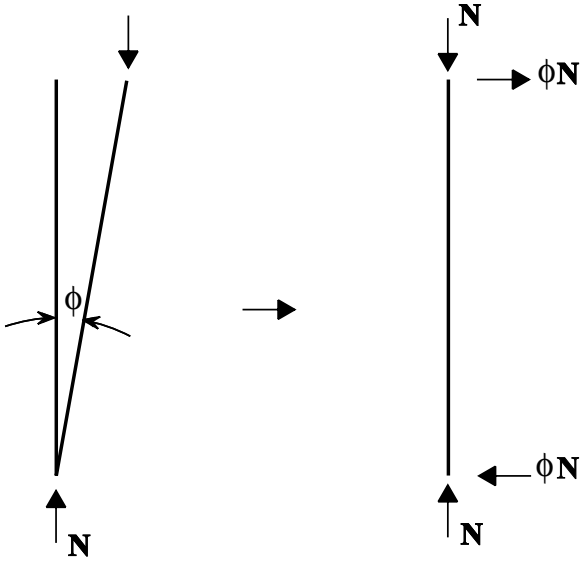


Figura 7 Sustitución de imperfecciones de desplazamiento inicial horizontal por fuerzas horizontales equivalentes

- Dichas imperfecciones de flecha horizontal inicial se aplican en todos los sentidos horizontales, pero cada sentido hay que considerarlo de uno en uno.

- También deben considerarse el posible efecto de torsión que tengan sobre la estructura las flechas horizontales asimétricas en dos caras opuestas.

- Si fuese más conveniente, se puede sustituir la flecha horizontal inicial por un sistema cerrado de esfuerzos horizontales equivalentes, ver Figura 7.

- En pórticos de viga y pilar, estos esfuerzos horizontales equivalentes se aplican en todos los forjados y cubiertas del edificio y deben ser proporcionales a las cargas verticales aplicadas a la estructura en cada nivel, ver Figura 8.

- Las reacciones horizontales en cada apoyo se hallan aplicando la imperfección de flecha horizontal inicial, no los esfuerzos horizontales equivalentes. En ausencia de cargas horizontales reales, la reacción horizontal neta es cero.

El análisis puede ser de primer o segundo orden. Si se calculan pilares con el análisis de primer orden, es apropiado incorporar los efectos de segundo orden tomando los resultados del análisis de primer orden, y bien:

- aplicar momentos de flecha horizontal ampliados, o

- aplicar las longitudes de pandeo del modo de flecha horizontal.

- Si se hace el análisis elástico global de segundo orden, los elementos se pueden calcular con las longitudes de pandeo en plano del modo de sin flecha horizontal.

- En el método de momentos de flecha horizontal ampliados, los momentos hallados mediante un análisis elástico de primer orden deben aumentarse multiplicándolos por la relación:

$$\frac{1}{1 - V_{Sd} / V_{cr}}$$

siendo V_{Sd} el valor de cálculo de la carga vertical total.

V_{cr} el valor elástico crítico de agotamiento en el modo de flecha horizontal.

- El método de momentos de flecha horizontal ampliado no debe aplicarse cuando la relación de cargas elástica crítica V_{Sd}/V_{cr} sea mayor de 0,25.

- Son momentos de flecha horizontal los que originan la traslación de la parte alta de una planta respecto a la parte baja. Nacen de las cargas horizontales, y también de las verticales si la estructura o la carga son asimétricas.

- En vez de hallar V_{Sd}/V_{cr} directamente, la siguiente aproximación puede servir en pórticos tipo viga y pilar:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{cr}} = \left(\frac{\delta}{h}\right)\left(\frac{V}{H}\right)$$

siendo δ, h, H y V como se han definido anteriormente.

- Aplicando el método de momentos de flecha horizontal ampliados, se pueden calcular elementos por la longitud de pandeo en plano en el modo sin flecha horizontal.

- Cuando se calcula un pilar por análisis elástico con la longitud de pandeo en el modo de flecha horizontal, deben ampliarse los momentos de flecha horizontal en las vigas y en las uniones de viga y pilar por lo menos en 1,2, salvo que el análisis indique que un valor menor es adecuado.

La cláusula 5.2.6.3 del Eurocódigo 3 prescribe las reglas para aplicar el procedimiento de análisis plástico a los pórticos con flecha horizontal.

8. COMPROBACIÓN DE ELEMENTOS Y CÁLCULO DE PÓRTICOS

El cumplimiento de las reglas de verificación de la resistencia y estabilidad de pórticos debe asegurar que ni el conjunto del pórtico ni sus elementos aislados, se agoten con una carga inferior a la de cálculo. Para verificar la seguridad de los elementos aislados, se pueden separar del pórtico y tratarlos como estructuras independientes. Las condiciones de los extremos de los elementos deberán entonces coincidir moderadamente con las condiciones de deformación de los elementos del pórtico de que se trate (p.ej.: suponiendo que los extremos son nominalmente articulados) y los efectos recíprocos en los extremos de los elementos se estudiarán aplicándoles momentos y esfuerzos equivalentes, ver Figura 9.

- Al verificar la seguridad de los elementos separados se tendrán en cuenta sus imperfecciones; estas imperfecciones normalmente se incluyeron al formular las reglas de cálculo de elementos, como se explica en otras lecciones del Tomo 9.

- En general, los elementos aislados, por la carga y las condiciones de los extremos, representan vigas-pilar simplemente apoyados, con o sin arriostramiento entre los extremos, ver Figura 10. Las vigas-pilar son elementos cargados con esfuerzos normales y momentos en uno o dos ejes.

Si en el cálculo elasto-plástico de segundo orden se ha aproximado al comportamiento real del pórtico y se ha impedido la inestabilidad y el pandeo local fuera del plano, no hace falta más verificación. En este caso, la comprobación de la resistencia -llamada también comprobación de la sección- se satisface implícitamente trabajando con el reparto de esfuerzos y momentos reales. Esto vale también para comprobar la estabilidad. Está demostrado que el equilibrio es estable con

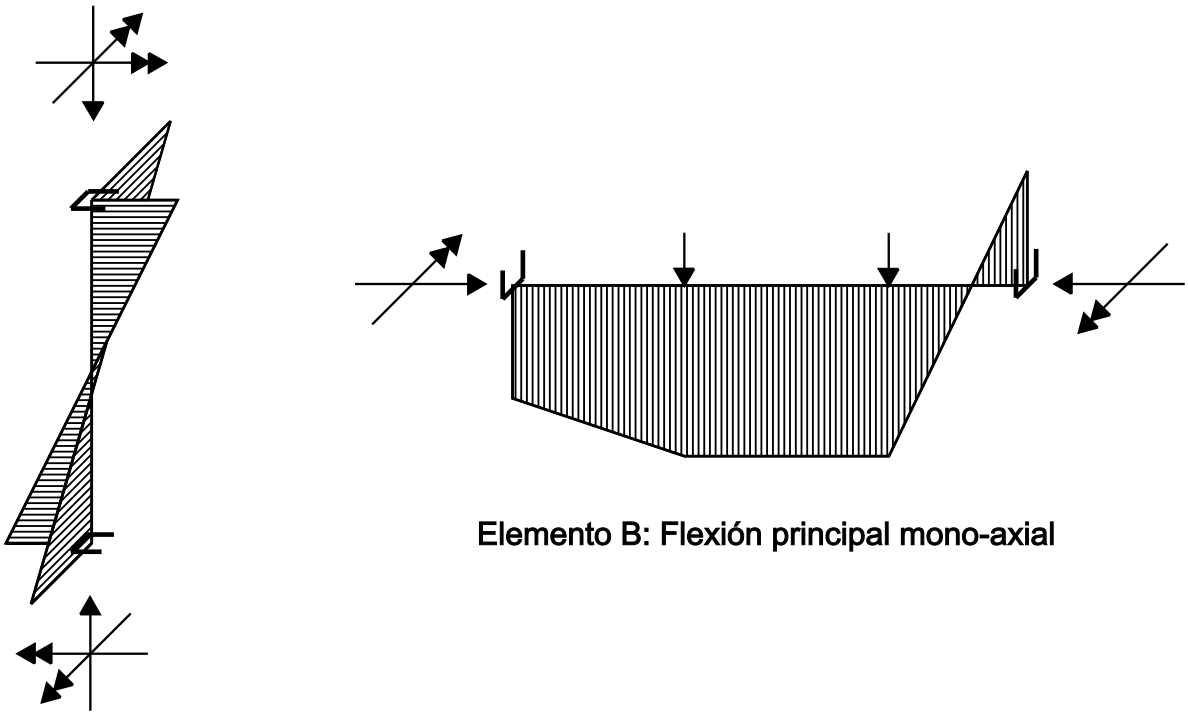


Figura 9 Elementos aislados A y B del análisis de pórtico plano

la carga de cálculo. Dicho de otro modo, V_{Sd}, que representa la carga de cálculo, debe ser menor que la carga de agotamiento elastoplástico V_k.

Si se calcula el reparto de esfuerzos y momentos por el método elástico de primer orden con arreglo a la carga de cálculo, es muy posible que se exceda la resistencia elastoplástica real V_k del pórtico. Hacen falta por lo tanto reglas de verificación que lo eviten. Por un lado, es necesario comprobar que cada una de las secciones ofrezca suficiente resistencia a los esfuerzos normales, al cizallamiento y a los momentos de flexión que origina la carga de cálculo. Y por el otro, se necesita comprobar la estabilidad para ver que cada elemento y el pórtico en conjunto sean estables.

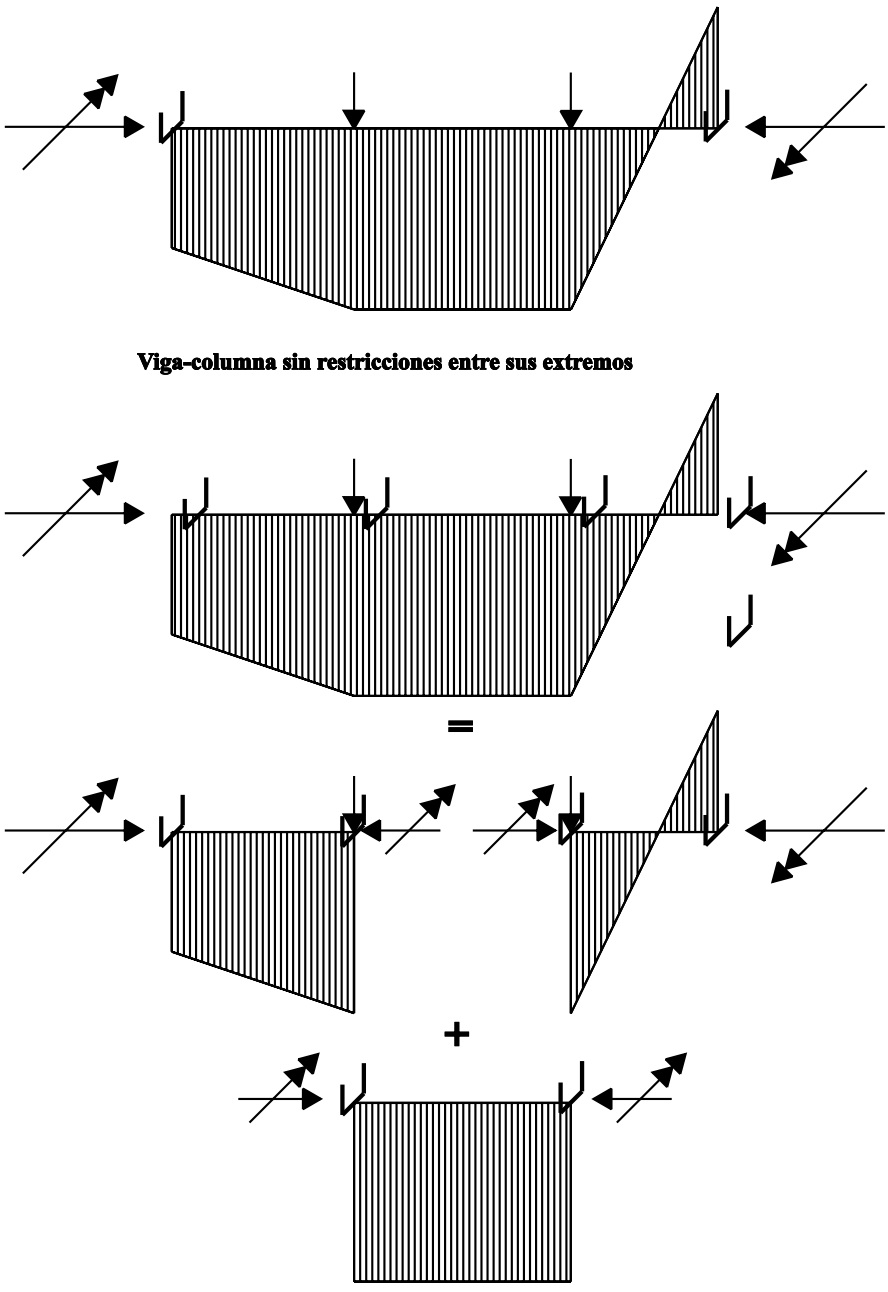


Figura 10 Condiciones de restricción en una viga-columna

En general, todos los métodos para calcular el reparto de esfuerzos y momentos necesita reglas de comprobación adicionales específicas para cada uno. Todos los mecanismos de agotamiento que afecten al pórtico y se hayan pasado por alto en el cálculo de reparto de fuerzas y momentos se deben comprobar mediante las reglas de verificación correspondientes.

Si un pórtico se puede deformar sólo en su propio plano y no le afecta el pandeo de las chapas (alma o ala), la torsión, el pandeo por torsión ni el pandeo lateral con torsión, sólo quedan dos reglas de verificación de importancia: comprobación de las secciones y comprobación de la estabilidad. Las reglas de verificación se aplican según el método por el que se haya calculado el reparto de esfuerzos y los momentos. La tabla 1 muestra la regla que corresponde a cada método de cálculo.

Método de cálculo de reparto de esfuerzos y momentos	Reglas de verificación de secciones	Comprobación de la estabilidad
Elástico, primer orden	SI	SI
Plástico, primer orden	NO	SI
Elástico, segundo orden	SI	NO
Plástico, segundo orden	NO	NO

Tabla 1 Relación entre análisis global y norma de verificación

Cuando el método de cálculo del reparto de esfuerzos y momentos es relativamente sencillo, las reglas de verificación son complicadas y viceversa. En general, las reglas de verificación de los elementos se aplican después de haber calculado el reparto de esfuerzos y los momentos del pórtico.

9. RESUMEN FINAL

- Se ha visto que el comportamiento del pórtico depende esencialmente del tipo de uniones, y de ahí el método de cálculo que se elija. Las dos formas de construcción principales son:
  i. construcción simple - asumiendo uniones articuladas.
  ii. construcción cortina - asumiendo uniones rígidas.
- No suele hacer falta más que la simple estática para hallar el reparto de esfuerzos internos de los elementos de un pórtico calculado conforme a los principios de construcción simple.
- Hay ocho planteamientos posibles, de distinta precisión y complejidad, para analizar pórticos con uniones rígidas.
- El Eurocódigo 3 clasifica los pórticos en con y sin arriostramiento, y los segundos en con flecha horizontal o sin ella. Esta clasificación obedece a un estudio del grado en que la deformación influye en la respuesta del pórtico.
- Es necesario calcular de modo diferente cada una de las tres clases:
  i. con arriostramiento.
  ii. sin arriostrar y sin flecha horizontal.
  iii. sin arriostrar y con flecha horizontal.

Se han expuesto todos estos métodos, incluso el tratamiento de las imperfecciones y el enlace entre el método adoptado para calcular el comportamiento general del pórtico y el necesario para estudiar los elementos por separado.

10. BIBLIOGRAFÍA

1. Galambos ed., SSRC Guide, 4th ed.

Un capítulo sobre pórticos de varias plantas.

2. Ballio, G. y Mazzolani, F. M., “Theory and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, 1983.

Un capítulo sobre estabilidad.

3. Trahain, N. S. y Bradford, M. A., “Behaviour and Design of Steel Structures”, Chapman and Hall, 1983.

Un capítulo sobre pórticos.

ESDEP TOMO 9
ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Lección 9.12: Celosías

OBJETIVO/CONTENIDO

Presentar las vigas de celosía bidimensionales: tipos, aplicación y consideraciones principales para el cálculo.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Ninguno.

LECCIONES AFINES

Lección 9.8.2: Celosías para puentes

RESUMEN

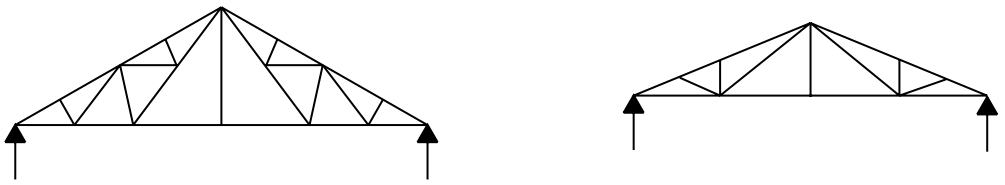
Esta lección presenta los tipos y aplicaciones de celosías y de los elementos que entran con más frecuencia en su construcción. La explicación del cálculo de celosías en general considera el análisis primario, las tensiones secundarias, el análisis elástico riguroso, las celosías armadas en cruz de S. Andrés y las deflexiones de las celosías. Se ocupa también del cálculo práctico de los elementos de las celosías.

1. INTRODUCCIÓN A LOS TIPOS Y FINES DE LAS CELOSÍAS

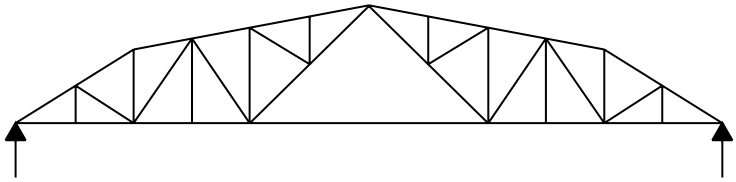
La celosía es una armazón triangulada con cargas en el plano de la misma que son resistidas por la fuerza axial de los elementos que la componen. Los términos generalmente se refiere a la celosía plana. Se llama "celosía tridimensional" aquella en la que sus miembros están en tres dimensiones.

Se destinan principalmente a:

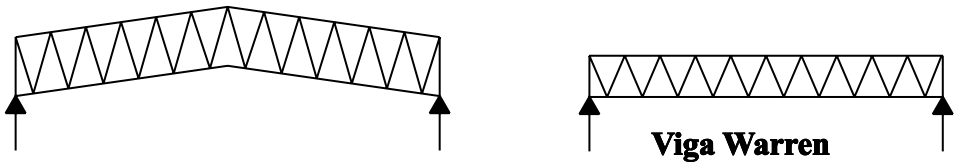
- soportar las cubiertas y forjados de edificios, en vanos largos y soportar cargas relativamente ligeras, ver Figura 1.
- vanos cortos e intermedios de los puentes de carretera, ferrocarril y peatonales, como vemos en la Figura 2.
- arriostrar edificios y puentes dándoles estabilidad al formarse una celosía entre unos elementos y los otros elementos de la estructura, como los pilares. La Figura 3 muestra unos ejemplos.



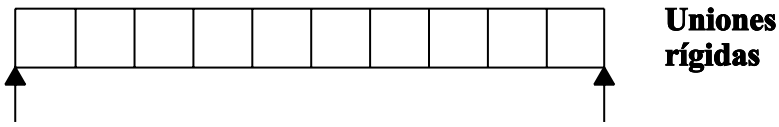
(a) Cerchas de cubierta



(b) Cerchas de cubierta amansardada



(c) Vigas de celosía



(d) Viga Vierendeel

Figura 1 Cerchas y vigas de celosía en edificación

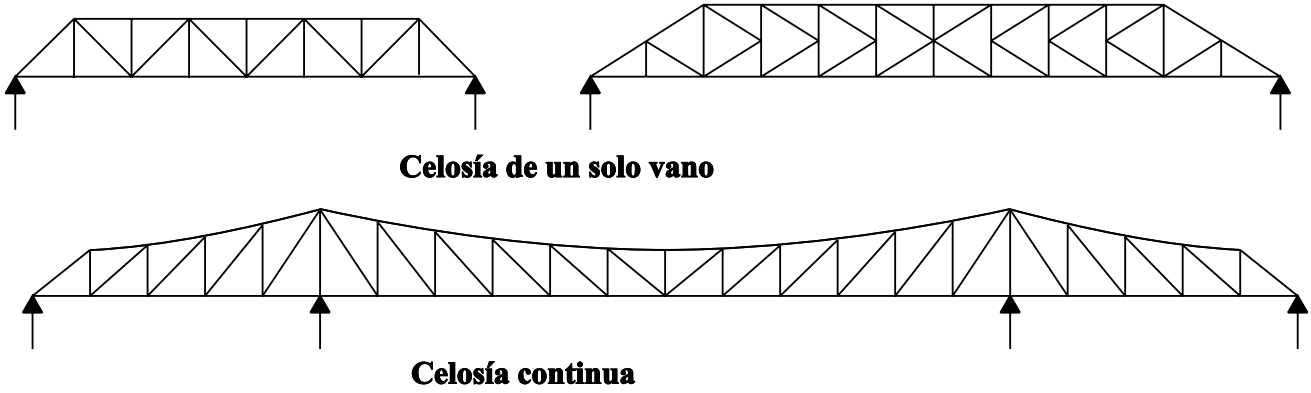


Figura 2 Vigas de celosía en puentes

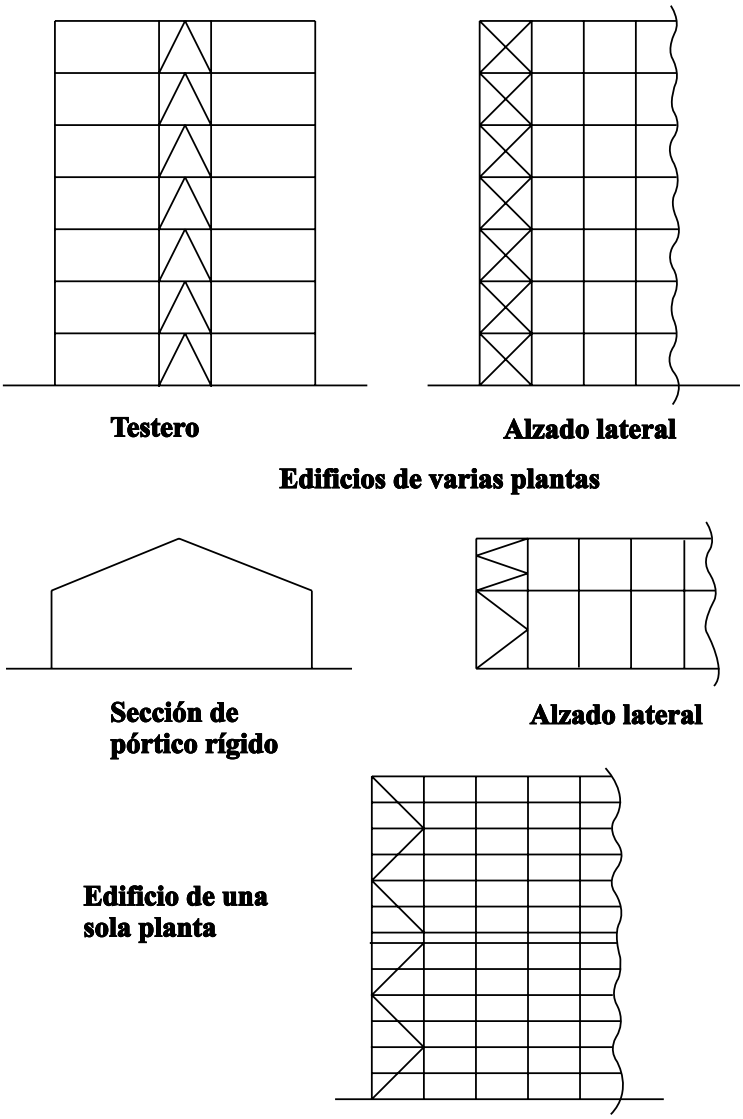


Figura 3 Arriostramientos en edificación

El principio de la celosía es simple. La armazón se compone de un cordón superior y otro inferior y un alma triangulada con piezas diagonales, de modo que dichas piezas sólo soportan cargas puramente axiales. Existen otros efectos, pero en una celosía bien calculada tienen carácter secundario.

El momento global de la celosía incide en los cordones por compresión y tracción. El cizallamiento global lo soportan los elementos diagonales por compresión y tracción. En el caso simplificado, en el que las uniones se consideran articuladas y las cargas se aplican en puntos del plano, la carga no crea momentos de flexión, cortantes o de torsión en ningún elemento. Si una carga aplicada de este modo causa flexión, cizallamiento o torsión, suele ser resultado de un empleo ineficaz del material.

Las celosías se clasifican de acuerdo con su forma general y la disposición de sus elementos interiores. Las celosías en ángulo son para cubiertas. Las vigas de celosía con los cordones paralelos sirven para soportar cubiertas, forjados y puentes, aunque en los puentes continuos necesitan a menudo tener más altura en las pilas. Antiguamente se les ponían nombres propios a los tipos de celosía, como Félix, Warren, etc. La celosía más común es de un vano, apoyada, determinada estáticamente, y se supone que las uniones actúan como articulaciones.

También debe mencionarse la celosía Vierendeel. Consiste en tramos rectangulares con uniones rígidas, como la de la Figura 1d. Esta celosía es estáticamente indeterminada; no se volverá a mencionar en esta lección, aunque su aspecto es agradable y se emplea a menudo en puentes peatonales.

Si pensamos en el alma, la economía respecto a una viga de chapa es clara. El alma de una celosía es sobre todo aire, y de ahí menos peso y menor solicitación eólica.

La celosía se arma con piezas pequeñas, fáciles de manejar y transportar, que se pueden unir en obra con pernos. Las celosías tienen una ventaja particular en la construcción de puentes en países donde el acceso a la obra es difícil y la mano de obra competente escasea.

2. ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS

Los siguientes materiales se eligen para hacer celosías y arriostramiento de edificios:

- perfiles abiertos, principalmente angulares, U, T y viguetas.
- perfiles compuestos, es decir, doble angular y U.
- perfiles cerrados, en la práctica, tubos estructurales.

Los elementos para puentes se eligen entre:

- perfiles laminados.
- perfiles compuestos
- H compuestas, perfiles en omega y cajones.

Secciones típicas como se muestra en la figura 4.

La elección de los elementos depende del emplazamiento, del fin al que se destinan, del vano, del tipo de unión y del aspecto deseado. Las secciones tubulares son más caras que las abiertas, pero la conservación es más barata y su aspecto más estético. Sin embargo, la corrosión ataca los rincones que se forman en las cartelas de las celosías expuestas. Tradicionalmente las celosías de poco vano se construyen con secciones angulares.

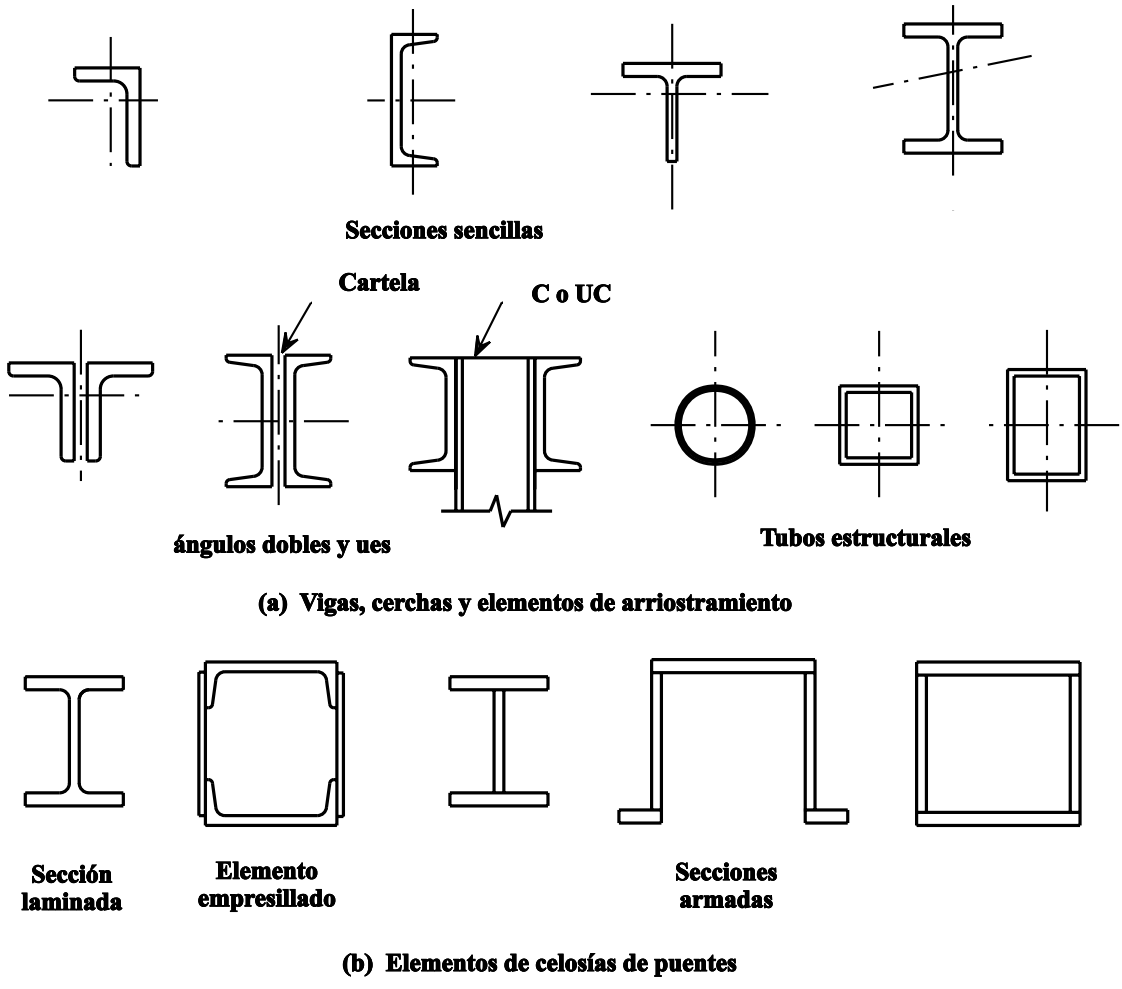


Figura 4 Elementos utilizados en vigas y cerchas

3. CARGAS EN LAS CELOSÍAS

Las clases principales de carga que soporta un edificio se ven en la Figura 5, a saber:

1. Peso propio. Las cargas causadas por el peso de revestimientos, tableros, placas de cubierta y forjado, correas, vigas, aislamiento, falsos techos, servicios y acabados. El peso propio de la construcción debe calcularse atentamente en cada caso por el peso de los materiales que dan los manuales y prospectos de los fabricantes.

2. Sobrecargas. Las indica el Eurocódigo 1 “Basis of Design and Actions on Structures” para distintas clases de edificios y cubiertas con y sin acceso. La sobrecarga puede incidir en todo un elemento o una parte, y debe calcularse por el efecto más desfavorable.

3. Carga eólica. La indica el Eurocódigo 1 “Basis of Design and Actions on Structures” y se calcula respecto al emplazamiento del edificio, sus dimensiones y las de los huecos de las fachadas. El viento generalmente causa una fuerza ascendente en las cubiertas, lo que lleva a invertir la carga de los elementos de las celosías de construcción ligera. En edificios de varias plantas el viento origina empujes horizontales que son resistidos por el arriostramiento.

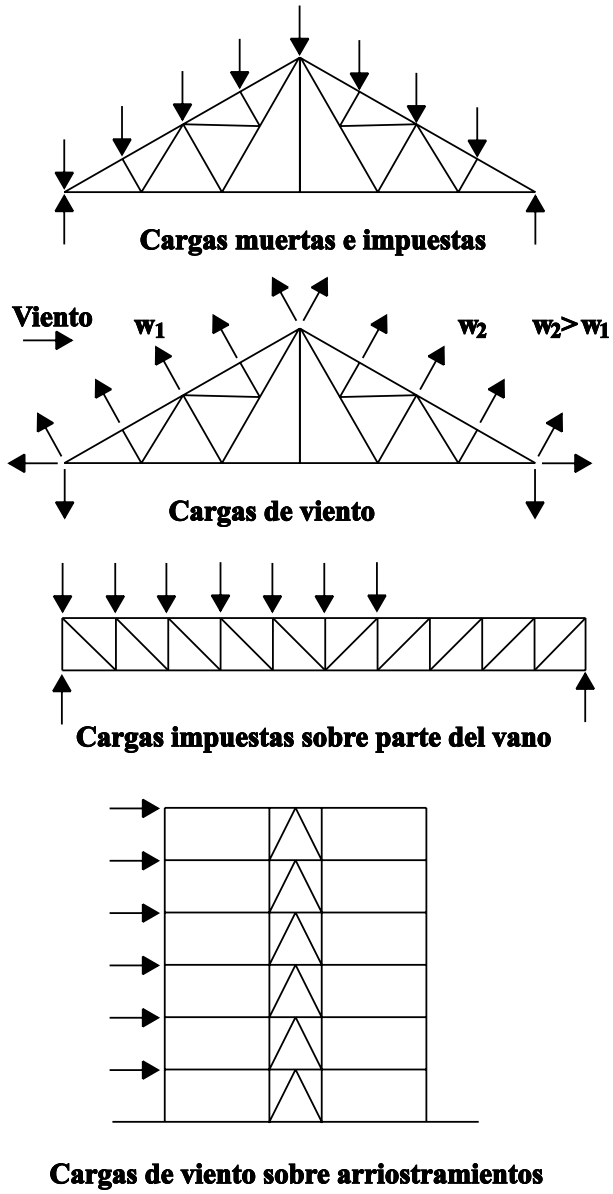


Figura 5 Carga sobre celosías y arriostramientos

En casos especiales las celosías resisten las cargas dinámicas de los sismos y olas marinas. Deben vigilarse atentamente las cargas excepcionales que se apliquen durante el montaje. En esta fase pueden producirse fallos antes de que estén totalmente instalados los apoyos laterales.

En los puentes, además del peso propio y las sobrecargas verticales de la carretera o el ferrocarril, hay que considerar el efecto horizontal de las cargas móviles. Que son los efectos del frenado y la tracción, las cargas centrífugas y las ocasionadas por patinazos accidentales. La temperatura tiene efectos significantes en algunos puentes.

4. ANÁLISIS DE LAS CELOSÍAS

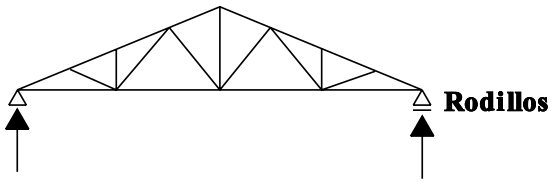
4.1 En general

Las celosías pueden ser de un vano, estáticamente determinadas o indeterminadas, o continuas con dos o más vanos, como vemos en la Figura 6. Este apartado trata solamente de las celosías de un vano estáticamente determinadas. Una celosía suele ser determinada estáticamente cuando:

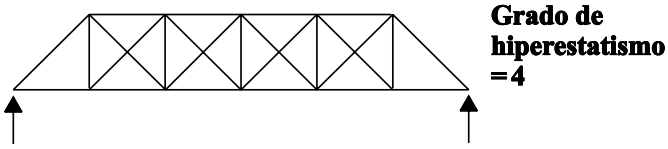
$$m = 2j - 3,$$

siendo m el número de elementos de la celosía

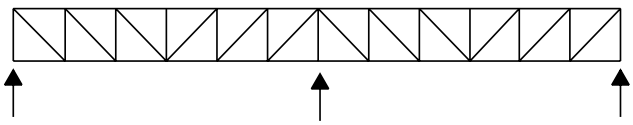
j el número de uniones.



Número de elementos e = 21
Número de uniones u = 12
e = 2u - 3
Viga determinada estáticamente



Viga de celosía estáticamente indeterminada



Viga de celosía continua de dos vanos

Figura 6 Análisis de celosías

Pero el cumplimiento de esta fórmula para toda la celosía no impide la posibilidad de que se forme un mecanismo local en una parte de ella.

Los métodos de análisis manuales de las celosías, en que las cargas se aplican a los nudos, son el de solución de las uniones, el de las secciones y el diagrama de esfuerzos. La solución de las uniones es el más rápido para analizar vigas de celosía hay que contar con todas las fuerzas. El método de las secciones es útil cuando sólo se requieren unos pocos elementos críticos. El diagrama de esfuerzos es el mejor método manual general. También hay programas informáticos para analizar celosías.

4.2 Tensiones secundarias de las celosías

En el cálculo de celosías hay muchos casos en que no es preciso considerar las tensiones secundarias. Sin embargo, en las celosías pesadas de edificios industriales y puente, hay que calcularlas.

Las tensiones secundarias son causadas por:

- Excentricidad de las uniones
- Cargas aplicadas entre los nudos de la celosía
- Momentos ocasionados por uniones rígidas y deflexión de la celosía

Esto se comenta con detalle más adelante.

1. Excentricidad de las uniones

Las celosías han de trazarse de manera que el eje centroide de los elementos o la alineación de los taladros para pernos coincidan en un punto de los nudos. De otro modo, hay que calcular los elementos y uniones para

resistir los momentos debidos a la excentricidad. Estos momentos deben dividirse entre los elementos que se juntan en las uniones en proporción a su rigidez al giro. Las tensiones originadas por excentricidades menores a menudo se desprecian.

2. Cargas aplicadas entre los nudos de la celosía

Se debe calcular los momentos debidos a estas cargas y las tensiones que originan, combinados con los debidos a las cargas axiales primarias; es decir, los elementos en cuestión deben calcularse como vigas-pilar. Esta situación se presenta a menudo en las celosías de cubierta, en las que la carga es aplicada al cordón superior por las correas, que pueden no estar situadas en los nudos, como se ve en la Figura 7. El método de cálculo manual consiste en analizar primero las cargas aplicadas a los nudos de la celosía que dan los esfuerzos axiales de los elementos. Luego se hace por separado un análisis de la flexión del cordón superior que se considera una viga continua. La unión de la cumbrera E es fija por la simetría, pero la unión de los aleros A debe tomarse como articulada, si no, el momento se transmitiría al cordón inferior si se presume que la unión de la celosía y el pilar es articulada. El cordón superior se calcula para carga axial y flexión. Luego se hablará del análisis por ordenador.

3. Momentos resultantes de uniones rígidas y deflexión de la celosía

Las tensiones originadas por momentos secundarios son importantes en las celosías cuyos elementos son cortos y gruesos. Las reglas de aproximación especifican cuándo deben hacerse estos análisis. Las tensiones secundarias son insignificantes si la esbeltez de la celosía es mayor de 50 y la de la mayoría de los elementos del alma mayor de 100. Las cargas en las celosías de los edificios son predominantemente estáticas y no es necesario calcular estas tensiones. Los momentos secundarios causan la máxima tensión en el extremo de los elementos y no es probable que provoquen agotamiento. Sin embargo, donde el efecto de la fatiga sea importante, hay que considerar estas tensiones. El método de análisis de los momentos secundarios se expone a continuación.

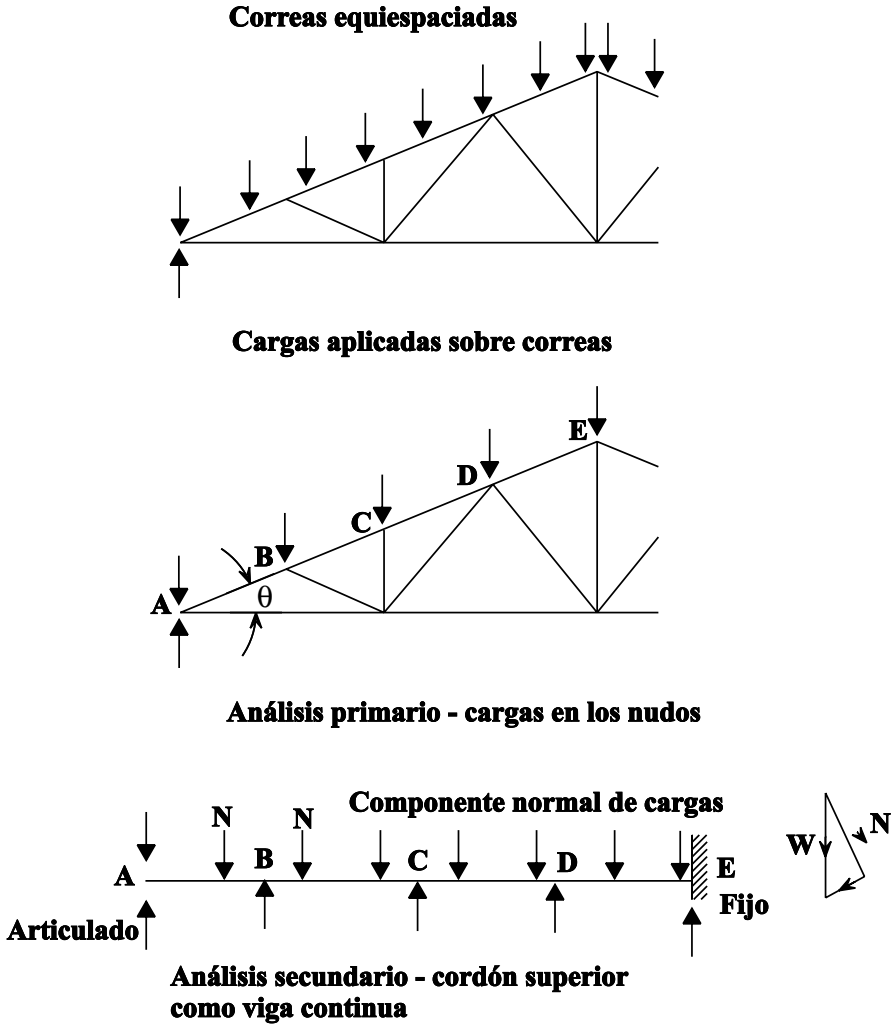


Figura 7 Cargas aplicadas entre los nudos de la viga

4.3 Análisis elástico riguroso

Las celosías con uniones rígidas, redundantes o continuas, o las que tienen las cargas aplicadas en los nudos, se analizan mediante un programa de pórticos basado en el método de rigidez de la matriz. También se puede modelar la celosía incluyendo la excentricidad de las uniones. Las dimensiones de los elementos deben hallarse de antemano por el método manual. Todos los datos necesarios para el cálculo son salidas informáticas, incluso las deflexiones de las uniones.

Es importante que el análisis y el cálculo se planteen coherentemente. Es decir, que para despreciar los momentos secundarios, hay que hallar los esfuerzos axiales primarios mediante un análisis simple de la celosía como pórtico articulado. Los momentos de las uniones pueden modificar considerablemente los esfuerzos axiales que arroje un análisis de ordenador.

5. CONSIDERACIONES SECUNDARIAS

5.1 Celosías arriostradas en cruz para edificios

Las celosías que aportan estabilidad a los edificios de varias plantas tienen a menudo jabalcones en cruz como se ve en la Figura 8a. Se acostumbra considerar que la celosía es determinada estáticamente, suponiendo que sólo es activo el grupo de jabalcones en tracción. El otro grupo actúa cuando cambia el viento.

Otro caso común es la viga celosía con un número impar de tramos. El tramo central tiene las riostras en aspa, como en la Figura 8b. Con carga simétrica no hay esfuerzos en estas diagonales. Si la sobrecarga incide en una parte del vano, se supone que sólo trabaja la diagonal en tracción.

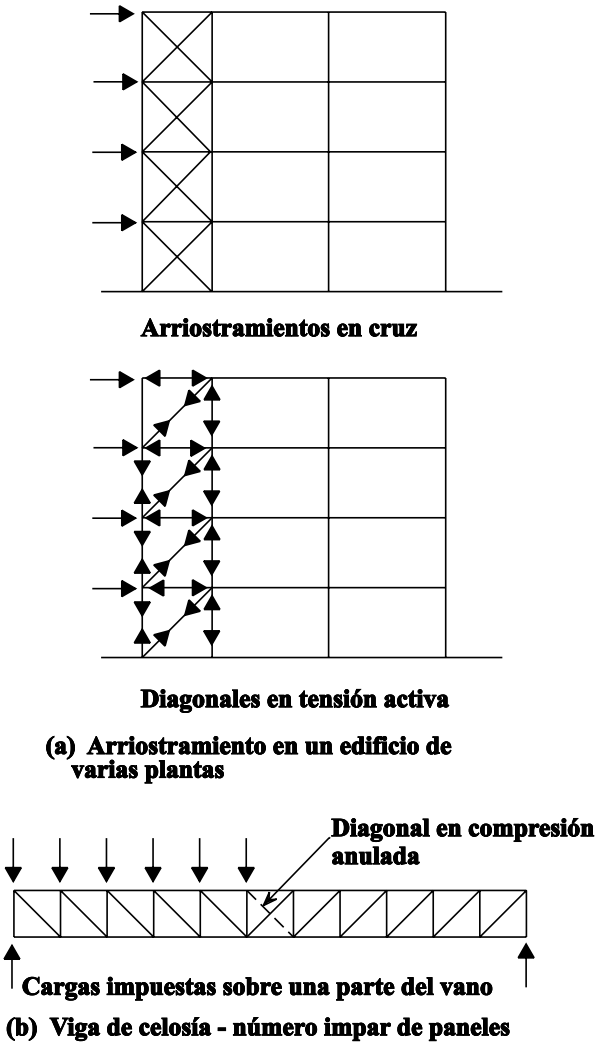


Figura 8 Vigas arriostradas

5.2 Arriostramiento lateral para puentes

Se necesitan largueros en riostra, vigas antifrenado y arriostramiento lateral de los cordones para transmitir las sobrecargas longitudinales y las cargas eólicas y sísmicas a los aparatos de apoyo y para impedir el pandeo de los cordones de compresión.

En los laterales superiores, un sistema romboide con tirantes en las puntas del tramo, divide en dos la longitud transversal efectiva del cordón en compresión, como muestra la Figura 9.

La Figura 9 presenta un sistema lateral económico a nivel del tablero para puentes ferroviarios; consiste en un simple elemento de apoyo que forma parte también de la jácena antifrenado. El lateral se apoya en largueros de modo que la longitud efectiva es sólo alrededor de un tercio de la longitud del tramo.

La carga eólica en los elementos diagonales y verticales se puede dividir por igual entre los sistemas laterales superior e inferior, recordando que los elementos de los extremos (diagonales o verticales) tiene que llevar la carga aplicada en el cordón superior al inferior.

Obviamente, si sólo hay un sistema lateral (como en semicelosías abiertas o colgantes), este único sistema debe resistir toda la carga eólica.

El arriostramiento lateral, además de resistir las cargas exteriores de través debidas al viento, etc., estabiliza el cordón de compresión. Su presencia es necesaria para que la longitud efectiva de los elementos de la celosía sea razonablemente corta. También necesitan arriostramiento lateral todas las angulaciones de los cordones donde las cargas de compresión pasan a los elementos del alma, independientemente de que el cordón esté en tracción o en compresión.

5.3 Deflexión de las celosías

La deflexión de una celosía con uniones articuladas se puede calcular por el método de la energía de deformación o por el de trabajo virtual. En el método de energía de deformación la deflexión viene dada por:

$$\delta = \Sigma FuL/EA$$

siendo:

A el área de un elemento de la celosía

E el módulo de elasticidad

L la longitud entre nudos del elemento de la celosía

P el esfuerzo de un elemento debido a las cargas aplicadas

U el esfuerzo de un elemento debido a la carga unitaria aplicada al nudo de la celosía en la dirección de la deflexión estudiada.

También se pueden hallar las deflexiones de la celosía por el método gráfico de Williot-Mohr. La salida de un análisis de ordenador incluye las deflexiones de las uniones.

La celosía se puede curvar al fabricarla para compensar las deflexiones que causan las cargas aplicadas. El verbo curvar significa en este caso fabricar una celosía nominalmente horizontal con una flecha hacia arriba, variando ligeramente la longitud de los elementos para forzar la curvatura.

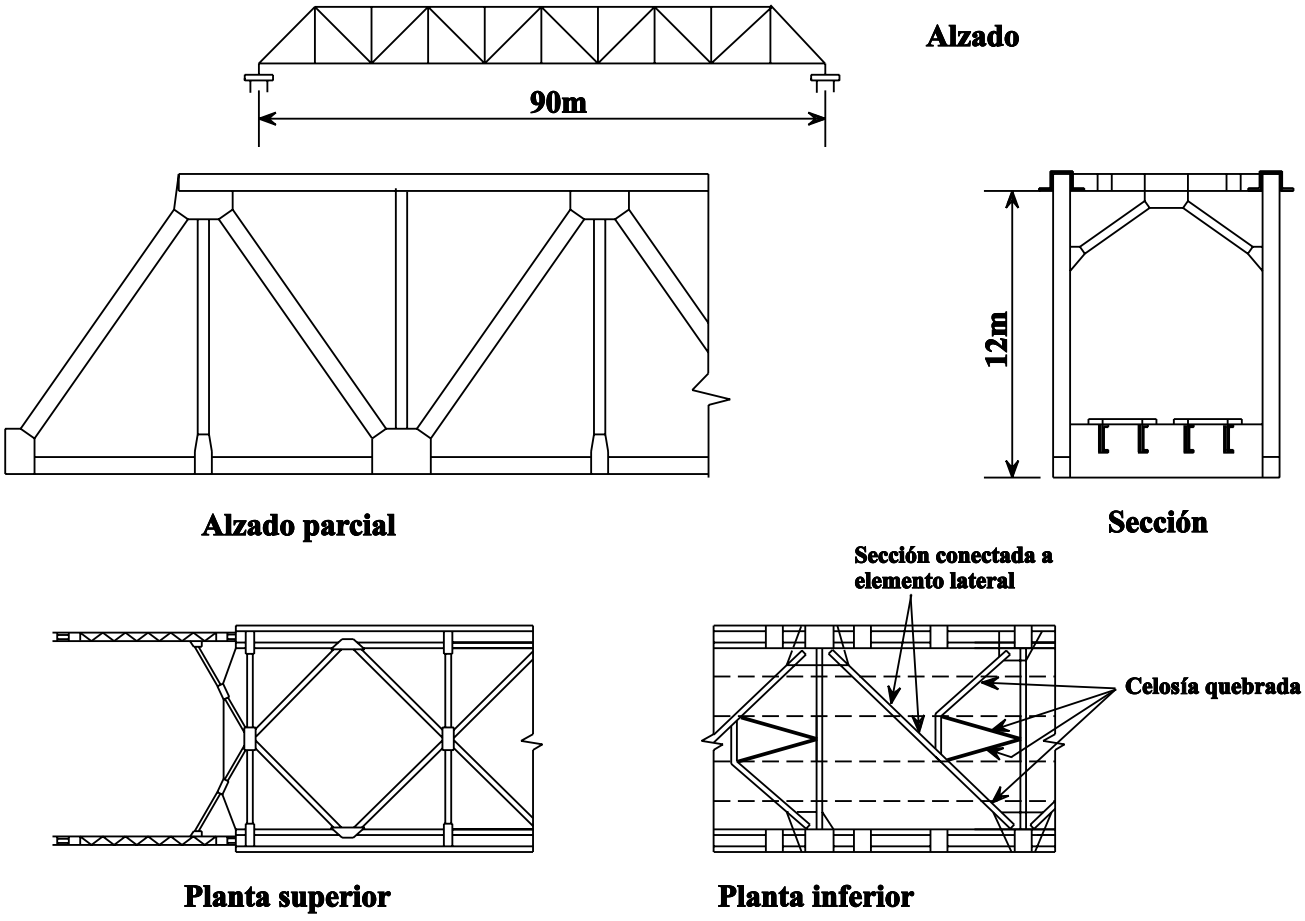


Figura 9 Disposición general de celosía de 90 m

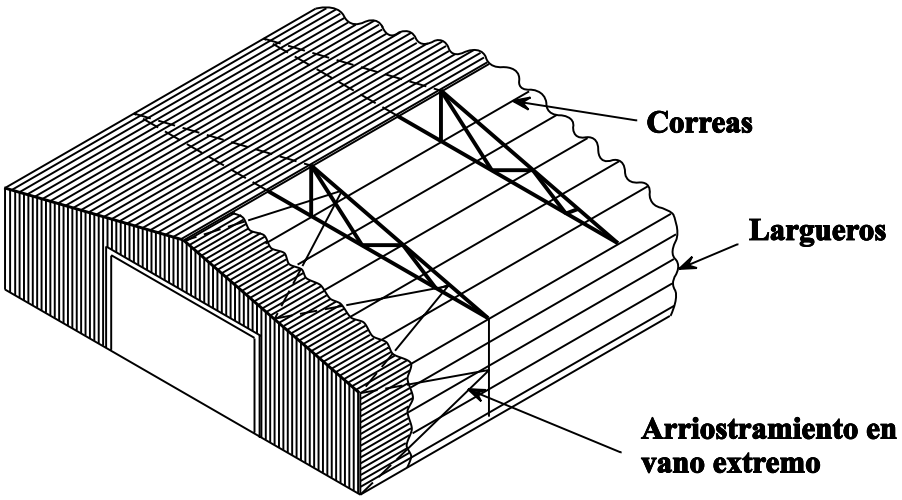
6. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA CELOSÍA

La celosía debe analizarse separando los casos de carga. Estos casos se combinan para obtener las condiciones de cálculo más desfavorables de cada elemento. Abajo se exponen algunos aspectos importantes del cálculo.

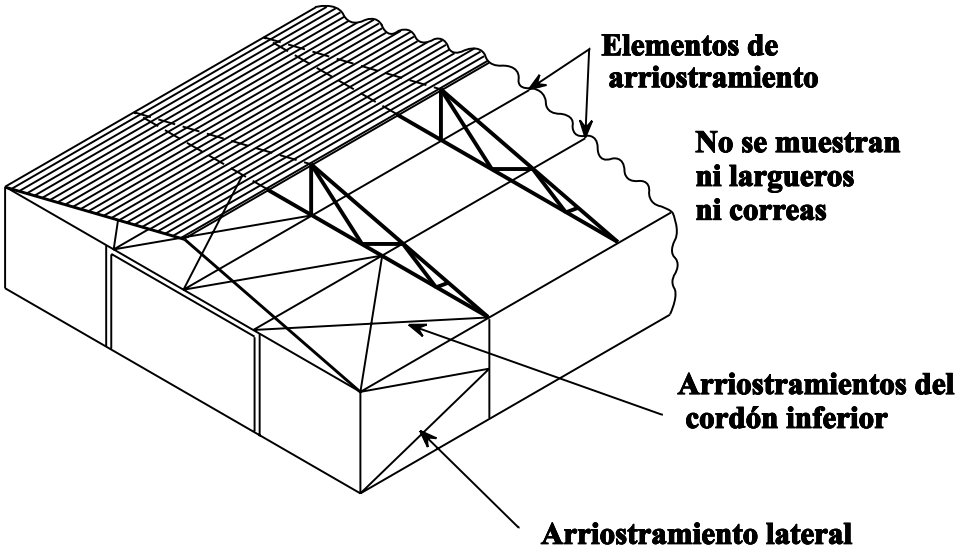
6.1 Elementos de compresión en edificios

Los códigos normalmente definen la relación de esbeltez máxima y muchas veces marcan el tamaño mínimo de los elementos de las celosías ligeras.

Los valores máximos de esbeltez aceptables son:



(a) Las correas aportan apoyo lateral al cordón superior de las cerchas



(b) El arriostramiento de cordón inferior como soporte a la celosía

Figura 10 Soporte lateral para vigas de cubierta

Elementos que resisten el peso propio y sobrecargas	180
Elementos que resisten la carga eólica	250
Todo elemento que actúe normalmente como tirante pero que esté sometido a inversión de tensiones por el viento	350

Estos límites aseguran que los miembros que sostienen cargas ligeras sean razonablemente robustos. Como las cargas eólicas son transitorias, se permiten valores de esbeltez mayores que para el peso propio y las sobrecargas. Estas normas reducen también el riesgo de avería durante el transporte y el montaje. A este respecto, es usual especificar las medidas mínimas de los angulares como sigue:

- angulares iguales $50 \times 50 \times 6L$
- angulares desiguales $65 \times 50 \times 6L$

En el cálculo de los elementos de celosía cuyas tensiones secundarias de flexión sean insignificantes, se hacen las siguientes hipótesis:

- A efectos del análisis, las uniones se consideran articuladas.
- En el cálculo de la longitud efectiva se puede tener en cuenta la rigidez de los elementos contiguos.
- Si no se sabe la posición donde incide la carga en el cabio respecto a los elementos del alma, se puede tomar este momento de flexión puntual: WL/6.
- Con arreglo a la 1ª parte de la cláusula 5.8.2 del Eurocódigo 3, se puede tomar para la longitud de pandeo de los cordones la distancia entre las uniones de los elementos con el alma en el plano y la distancia entre correas o tirantes fuera del plano de la celosía.

La Figura 10 muestra las celosías de la cubierta de un edificio en la que las correas aportan el apoyo lateral del cordón superior y los jabalcones de un cordón intermedio aporta el apoyo lateral al cordón inferior.

La longitud de pandeo en el plano de los elementos del alma puede tomarse como 0,9L, siendo L la longitud del elemento entre nudos.

Dos elementos internos habituales de la celosía son el puntal discontinuo de un angular simple unido a una cartela u otro elemento, y el puntal de doble angular discontinuo unido a ambos lados de una cartela u otro elemento. Estas uniones deben tener al menos dos tornillos o la soldadura equivalente. La 1ª parte de la cláusula 5.8.3 del Eurocódigo 3 establece que se puede despreciar la excentricidad de los extremos y calcular los puntales como elementos cargados axialmente con arreglo a esta cláusula.

6.2 Elementos de compresión en puentes

Generalmente los elementos de las celosías de puentes son mucho mayores que en los edificios y hay que prestar mucha más atención al proyecto en detalle de los elementos. La 1ª parte del Eurocódigo 3 se refiere a edificios y las muy moderadas longitudes de pandeo L y 0,9L no tienen gran significado en celosías de vano relativamente corto. Pero el aspecto de la longitud efectiva en puentes, donde la economía de acero es absolutamente vital, se espera que se trate extensamente en la 2ª parte.

En la composición de la sección del cordón de compresión, la disposición ideal del material es la que produce una forma con radios de giro tales que la relación entre longitud efectiva y radio de giro sea igual en ambos planos. Dicho de otro modo, que sea tan posible que el elemento pandee horizontal como verticalmente.

Se elegirá el canto del elemento de modo que el espesor de la chapa sea el justo. Si es muy gruesa, el radio de giro es menor de lo que sería si con la misma área de acero se hubiera formado un elemento mayor con chapa más delgada. Las chapas deben ser lo más finas posible sin perder demasiado material cuando se derive la sección efectiva.

6.3 Elementos de tracción en edificios

Las secciones tubulares estructurales unidas con soldadura pueden ser totalmente eficaces. El “área efectiva” se aplica a los angulares unidos por un ala. En teoría pueden hacerse con redondos o cables, pero no es idóneo por razones prácticas: carecen de rigidez y se dañan fácilmente. Para los elementos en tracción deben adoptarse las mismas secciones mínimas que las angulares antes descritas.

6.4 Elementos de tracción en puentes

Los elementos de tracción deben ser lo más compactos posible, pero los cantos bastante grandes para que haya suficiente espacio para fijar los tornillos y cartelas. La anchura fuera del plano de la celosía debe ser igual que la de los elementos verticales y diagonales para que se puedan poner simples cartelas solapadas sin necesidad de suplementos.

Deberán descontarse de la sección neta los taladros para pernos. Debe ser posible conseguir una sección neta de alrededor del 85% de la bruta distribuyendo cuidadosamente los pernos.

6.5 Elementos expuestos a inversión de la carga

La 1ª parte del Eurocódigo 3 sólo requiere estudiar la fatiga de:

a. Elementos que sostienen aparatos de elevación o cargas rodantes.

b. Elementos sometidos a ciclos de tensión repetidos por la vibración de la maquinaria.

c. Elementos sometidos a oscilaciones producidas por el viento o las multitudes.

Incluso en estos casos, no se exige valorar estas tensiones si se producen en un campo reducido o si el número de ciclos es bajo.

De otro modo, los elementos expuestos a inversión de la carga se deben calcular para la condición más desfavorable.

En los puentes se requiere valorar la fatiga de todos los elementos expuestos a inversión de la carga.

7. NOTAS ÚTILES PARA EL CÁLCULO

a. Edificación

1. No es siempre económico que cada elemento sea de tamaño diferente. El calculista debe racionalizar las dimensiones y poner no más de dos o tres secciones diferentes en las celosías de vano corto.

2. Conviene que las dimensiones sean mínimas para evitar los daños durante el transporte y el montaje. Arriba se han hecho recomendaciones al respecto.

3. Son muy útiles las tablas de carga segura, de las que se pueden definir directamente los elementos sometidos a carga axial. Estos elementos y los momentos deben calcularse por intentos sucesivos. Se toma el primer tamaño en la presunción de que la resistencia a la compresión es el 60% de la resistencia total.

4. Las celosías grandes se transportan divididas en partes. En la obra se arman con uniones atornilladas.

b. Puentes

1. El valor óptimo de la relación vano-canto depende de la magnitud de la sobrecarga que vaya a soportar. Debe ser del orden de 10, siendo mayor para circulación de carretera que para ferrocarril. (Para la carga ferroviaria con vías en dos sentidos la relación se reduce a 7,5). Pero siempre hay que comprobar el canto económico de cada puente.

2. El número de luces debe ser par para adecuarse a la configuración de los jabalcones. Si se elige un número impar, el vano central tendrá riostras en cruz. Esto no suele ser deseable, salvo quizá en el centro de un puente giratorio. El ángulo de las diagonales debe ser entre 50 y 60° respecto a la horizontal.

3. Los elementos principales deben ser de acero de calidad 50, dejándose la calidad 43 para los elementos que sólo tengan carga nominal, a no ser que se construya la celosía en un país donde sea difícil conseguir acero de alta calidad. En una celosía calculada con acero de calidad 50, la cantidad de acero de calidad 43 es normalmente el 7%.

4. Deben entenderse a fondo los problemas a que se enfrenta el personal de mantenimiento del puente. Se evitarán los detalles donde pueda recogerse el agua de lluvia, polvo y escombros. Todas las partes expuestas deben ser plenamente accesibles para pintarlas. Las secciones de cajón son fáciles de pintar, pero las tubulares laminadas dejan recovecos en la unión con las cartelas, a menos que sean soldadas.

8. RESUMEN FINAL

1. Las celosías son elementos importantes de la edificación, donde su papel es soportar cubiertas y forjados y aportar arriostramiento.

2. Las celosías de puentes son económicas en vanos de 30 m a 200 m. Se pueden formar con piezas pequeñas y tienen ventajas especiales cuando el acceso a la obra es difícil.

3. Generalmente las celosías son determinadas estáticamente. Hágase un configuración sencilla con un mínimo de elementos y uniones.

4. Evítense las cargas y uniones excéntricas y redúzcanse las tensiones secundarias. Deben calcularse las tensiones causadas por cargas que inciden entre los nudos.

5. Ha de prestarse atención al cálculo y dotación a apoyos laterales.

6. En los puentes y algunos elementos de edificios debe estudiarse la fatiga.

7. Tiene particular importancia la configuración de los elementos y el cálculo cuidadoso de las uniones.

8. Evítese que haya zonas donde pudiera producirse corrosión de toda la estructura de acero expuesta.