8

Estabilidad aplicada

Instituto Técnico
de la Estructura
en Acero



ITEA

ÍNDICE DEL TOMO 8

ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico estable e Inestable 1

1 INTRODUCCIÓN 4
2 ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTABLES E INESTABLES 5
3. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA 6
4 PANDEO BIFURCADO 7
5 COMPORTAMIENTO POSTCRÍTICO DE LOS SISTEMAS PERFECTOS E IMPERFECTOS 9
6 PUNTO LÍMITE DE PANDEO 11
7 COINCIDENCIA DE VARIOS MODOS DE INESTABILIDAD 12
8 RESUMEN FINAL 13
9 BIBLIOGRAFÍA 13

Lección 8.2: Criterios generales de Estabilidad Elástica 15

1 INTRODUCCIÓN 19
2 GENERALIDADES 19
3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES 21
4 PRINCIPIO DEL VALOR ESTACIONARIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL 23
5 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO 24
6 EQUILIBRIO NEUTRO-CARGAS CRÍTICAS 26
7 EJEMPLOS BÁSICOS 27
8 RESUMEN FINAL 32
9 BIBLIOGRAFÍA 32

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica 33

1 INTRODUCCIÓN 36
2 PANDEO FLEXURAL DE COLUMNAS 38
3. PANDEO LATERAL 41
4 PANDEO DE PLACAS 43
5 RESUMEN FINAL 45
6 BIBLIOGRAFÍA 45

Problema resuelto 8.2: Métodos de Energía 47

CONTENIDO 49
SOLUCIÓN 50

Lección 8.4: Métodos Generales para la Determinación de Cargas Críticas 53

1 INTRODUCCIÓN 56
2 MÉTODOS ENERGÉTICOS GENERALES APLICABLES A SISTEMAS ELÁSTICOS 57
3 COEFICIENTE DE RAYLEIGH 58
4 EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ 59
5 EL MÉTODO DE GALERKIN 60
6 MÉTODOS NUMÉRICOS 61
7 ALGUNAS EXPRESIONES TÍPICAS DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN 62
8 EJEMPLO USANDO LOS DIFERENTES MÉTODOS 63
9 RESUMEN FINAL 67
10 BIBLIOGRAFÍA 67

Lección 8.5: Métodos iterativos para resolver problemas de estabilidad 69

1 INTRODUCCIÓN 72
2 MÉTODO DE VIANELLO 73

3. REPASO DEL MÉTODO DE NEWMARK 74
3.1 Convenio de signos 74
3.2 Conceptos 74
4 MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK 77
5 CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO 78
6 RESUMEN FINAL 79
7 BIBLIOGRAFÍA 79

Problema resuelto 8.3 (i), (ii) y (iii): Aplicación de los métodos Vianello, Newmark y Vianello-Newmark 81

EJEMPLO 1: APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO 84
EJEMPLO 8.3(II): APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK 90
EJEMPLO 8.3(III): APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VIANELLO-NEWMARK 94
8.3(iii) PROBLEMA 2: PILAR ESCALONADO 98
8.3(iii) PROBLEMA 3: PILAR SOMETIDO A CARGA VARIABLE 102
8.3(iii) PROBLEMA 4: VIGA-PILAR 108

Lección 8.6.1: Pandeo de elementos estructurales reales I 113

1 INTRODUCCIÓN 116
2 CONSECUENCIAS DE LA PLASTICIDAD DEL MATERIAL 117
2.1 Modelo de comportamiento rígido-plástico ideal 117
2.2 Modelo de comportamiento elasto-plástico ideal 117
2.3 Curva de resistencia para una barra ideal 118
2.4 Consecuencias del comportamiento elasto-plástico del material ... 118
3 RESISTENCIA DE BARRAS REALES 120
3.1 Efecto de las imperfecciones geométricas 120
3.1.1 Falta de rectitud 120
3.1.2 Excentricidad de la carga 123
3.2 Efecto de las tensiones residuales 124
3.3 Influencia combinada de las imperfecciones 126
4 RESUMEN FINAL 128
5 BIBLIOGRAFÍA 128

Lección 8.6.2: Pandeo de elementos estructurales reales II 129

1 INTRODUCCIÓN 132
2 PANDEO DE PLACAS 133
3 PANDEO TORSIONAL DE COLUMNAS 139
4 PANDEO FLEXURAL-TORSIONAL 141
5 PANDEO LATERAL-TORSIONAL DE VIGAS 143
6 PANDEO DE LÁMINAS 145
7 MEJORA DE LA RESISTENCIA AL PANDEO 147
8 ESTABILIDAD DE PÓRTICOS 148
9 RESUMEN FINAL 149
10 BIBLIOGRAFÍA 150
DIAPOSITIVAS COMPLEMENTARIAS 151

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

OBJETIVOS\CONTENIDO

Se introducirán los principales conceptos y definiciones para la comprensión del equilibrio elástico estable e inestable de las estructuras.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Ninguno.

LECCIONES AFINES

Lección 8.2: Criterio General de Estabilidad Elástica

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

RESUMEN

Esta lección comienza definiendo los estados de equilibrio estable e inestable de un sistema mecánico. La ley de energía potencial mínima y su relación con la estabilidad de la estructura se introducen sin hacer uso de consideraciones matemáticas. Igualmente se presentan los conceptos de pandeo por bifurcación, para sistemas ideales, y de pandeo por divergencia, para sistemas no ideales. Se abordarán el comportamiento post-crítico de un sistema y el deterioro de la estabilidad por la coincidencia de varios modos estables.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la teoría de estabilidad es determinar las condiciones bajo las cuales el sistema estructural, que se encuentra en equilibrio, deja de estarlo. La inestabilidad depende fundamentalmente de la geometría de la estructura en sus extremos; por ejemplo, riostras largas y esbeltas, placas delgadas o depósitos cilíndricos delgados. Normalmente, los sistemas de estudio tendrán un parámetro variable N, que suele ser la carga externa, pero que puede ser también una temperatura (pandeo térmico) u otro fenómeno. Para cada valor de la variable N existe únicamente una configuración estable.

En los problemas de pandeo clásicos, el sistema es estable si N es suficientemente pequeña, y se vuelve inestable cuando N es grande. El valor de N para el cual el sistema deja de ser estable se denomina valor crítico N_{cr}. Pero además debe conocerse lo siguiente:

- las configuraciones de equilibrio de la estructura bajo las cargas prescritas.
- qué configuraciones son estables.
- los valores críticos de las cargas y las consecuencias en el comportamiento para esos niveles de carga.

2. ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTABLES E INESTABLES

En términos generales, la estabilidad puede ser definida como la capacidad de un sistema físico para volver a la posición de equilibrio cuando sufre una leve perturbación.

Para un sistema mecánico, se puede recurrir a la definición dada por Dirichlet: "El equilibrio de un sistema mecánico es estable si, al desplazar los puntos del sistema de sus posiciones de equilibrio en una cantidad infinitesimal dando a cada uno de ellos una velocidad inicial, los desplazamientos de los distintos puntos del sistema permanecen, a lo largo del movimiento, entre unos límites pre-establecidos".

Esta definición muestra claramente que la estabilidad es una propiedad de un estado - un estado de equilibro - del sistema, y que el problema de determinación de la estabilidad de un estado tiene que ver con la "vecindad" de ese estado particular.

Si se considera un sistema elástico conservativo, que inicialmente está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, el sistema se separará de su estado de equilibrio sólo si actúan sobre él fuerzas perturbadoras. Si la energía suministrada al sistema por dichas fuerzas es W, entonces:

$$W = T + V = \text{constante} \qquad (1)$$

por aplicación del principio de conservación de la energía.

En esta expresión, T es la energía cinética del sistema y V es la energía potencial. Un pequeño incremento en T, va acompañada por una disminución, igualmente pequeña en V, o viceversa. Si el sistema se encuentra inicialmente en una posición de equilibrio con un mínimo de energía potencial, entonces la energía cinética T durante el movimiento libre decrece mientras V debe crecer. Por ello el desplazamiento con respecto a la posición inicial será pequeño y el estado de equilibrio es estable.

Para cuerpos rígidos, la estabilidad puede ilustrase por el conocido ejemplo de una bola sobre una superficie curva (Figura 1). Descansando sobre una superficie cóncava (Figura 1a) el equilibrio es estable; si se da a la bola una pequeña velocidad inicial, comenzará a oscilar, pero permanecerá en la proximidad de su estado de equilibrio. Por otro lado, si el sistema no se encuentra en una situación de mínima V (energía potencial), entonces el impulso implica largos desplazamientos y velocidades que se alcanzan rápidamente, diciéndose que el sistema es inestable. Este es el caso en el que la bola descansa sobre la cresta de una superficie convexa (Figura 1b) o en posición horizontal en un punto de inflexión (Figura 1c). Si la bola permanece en el plano horizontal, el equilibrio se denomina "neutro" (Figura 1d).

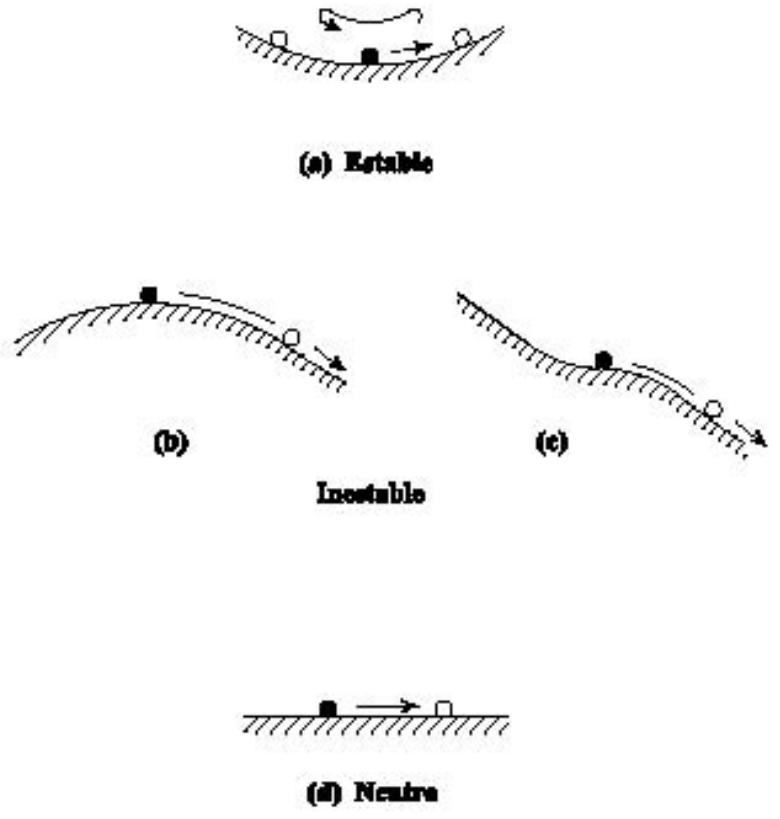


Figura 1 Los tres estados de equilibrio

3. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA

El ejemplo intuitivo de la bola lleva al enunciado de la ley de mínima energía potencial de un sistema: "Un sistema elástico conservativo está en un estado de equilibrio estable si, y sólo si, el valor de la energía potencial es un mínimo relativo".

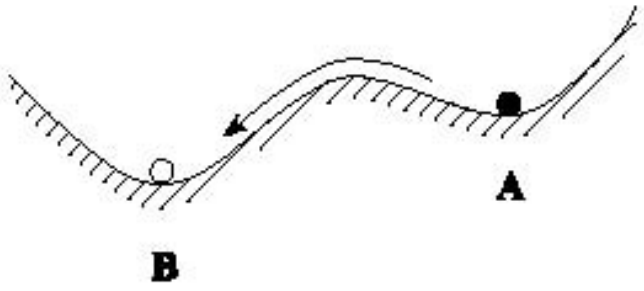


Figura 2 Carácter relativo del equilibrio

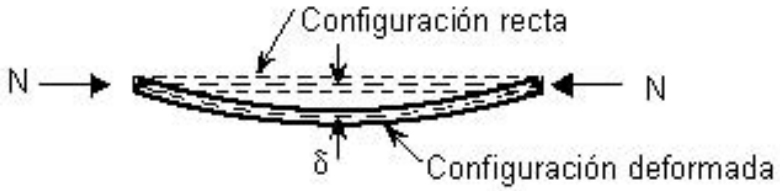
La expresión "mínimo relativo" se usa porque puede haber un mínimo próximo con un valor inferior de la energía potencial separados por pequeños "montes" pero el paso de uno a otro requiere grandes perturbaciones (Figura 2). La existencia de un mínimo relativo de la energía potencial en la posición de equilibrio es, estrictamente hablando, únicamente una condición suficiente para la estabilidad. Sin embargo, este principio es aceptado generalmente en la práctica como una condición necesaria y suficiente para la estabilidad.

4. PANDEO BIFURCADO

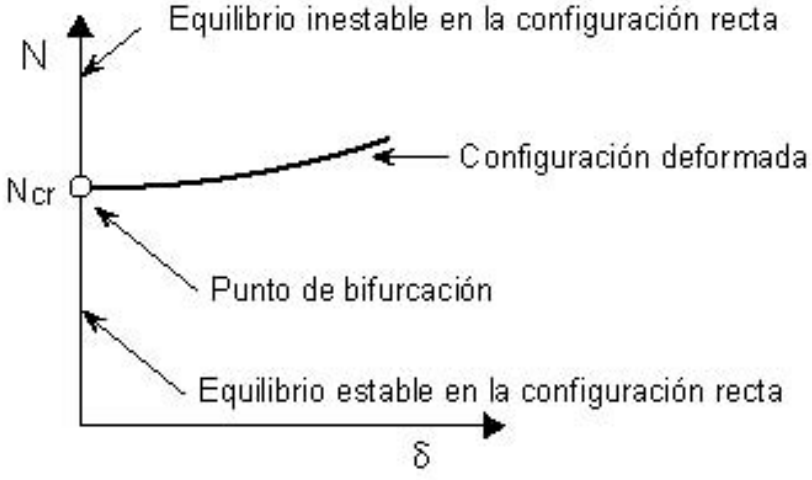
Se ha podido ver como el concepto de estabilidad está relacionado con la energía potencial del sistema. Sin embargo, la estabilidad de un sistema estático, o de una estructura, puede ser explicada en términos de rigidez. En la Figura 1a, se puede ver como la derivada de la energía potencial con respecto al desplazamiento es igual al la rigidez (en la figura, la pendiente de la superficie) del sistema.

Una rigidez positiva indica un estado de equilibrio estable, mientras que al borde de la estabilidad la rigidez se anula. Para una estructura, la rigidez se presenta en forma matricial, y sólo una matriz definida positiva garantiza la estabilidad de la estructura. El punto en el cual el estado del sistema pasa de un equilibrio neutro a un equilibrio estable se denomina "límite de estabilidad".

El sistema formado por la bola y la superficie curva (donde la estabilidad depende únicamente de la pendiente de la superficie) puede ser comparado con una estructura, por ejemplo, una columna comprimida. En este caso, la columna puede ser estable o inestable, dependiendo de la magnitud de la carga axial, que es el parámetro que controla el sistema (Figura 3a). Inicialmente el elemento se encuentra recto y la carga es axial, y por ello la estructura se mantendrá estable para valores pequeños de N; si una perturbación produjese desplazamientos, la columna volvería a su posición recta. Cuando la carga alcanza un cierto valor, llamado "carga crítica", el equilibrio estable llega a su límite. Con esta carga Ncr, aparece otra configuración de equilibrio con una leve deformación de la columna; si, con esta carga, el elemento se desplaza por la acción de una fuerza, no retornará a su posición recta.



(a) Columna simplemente apoyada

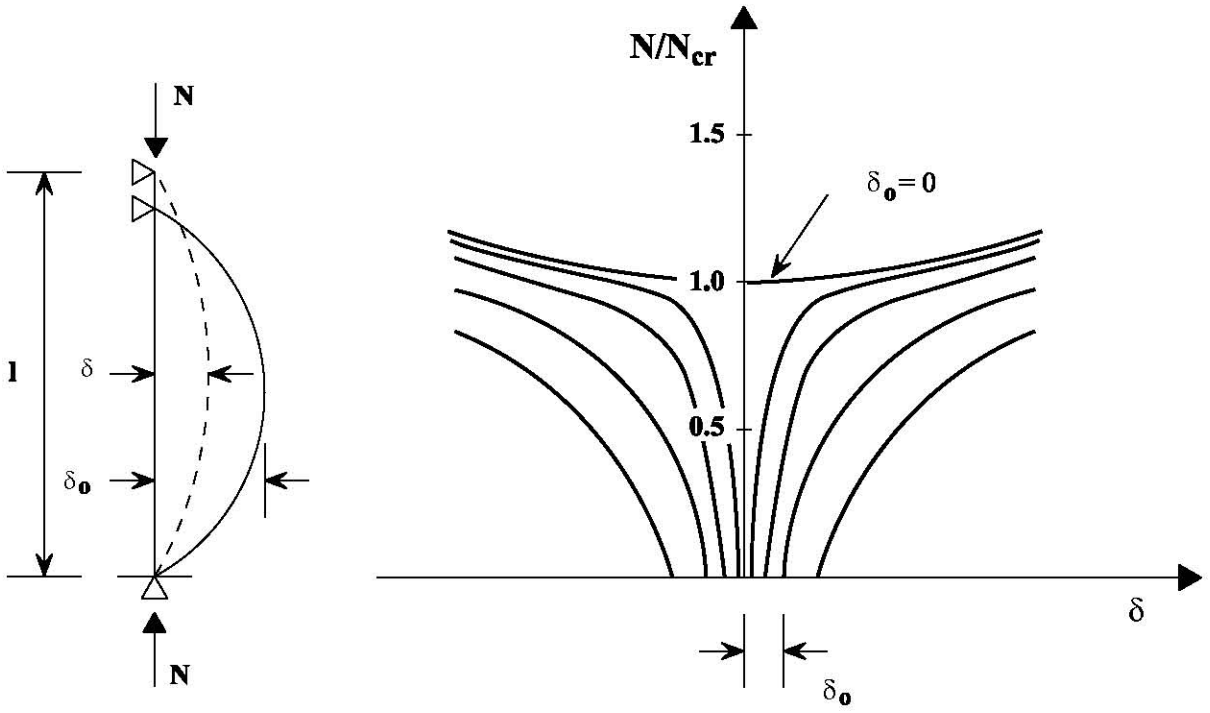


(b) Relación fuerza axial VS deformación

Figura 3 Estabilidad de una columna comprimida

Si la carga excede el valor crítico, la posición recta es inestable y cualquier perturbación conlleva largos desplazamientos del elemento y, finalmente, a un colapso de la columna por pandeo. El punto límite, después del cual las deformaciones en el elemento son muy grandes, se llama el "punto de bifurcación " del sistema (Figura 3b).

Si la columna no está inicialmente perfectamente recta, las deformaciones aparecen desde el comienzo de la carga y no hay un pandeo súbito por bifurcación, y sí un incremento continuo de los desplazamientos (Figura 4). Este fenómeno



(a) Columna imperfecta simplemente apoyada

(b) Relación fuerza axial VS deformación

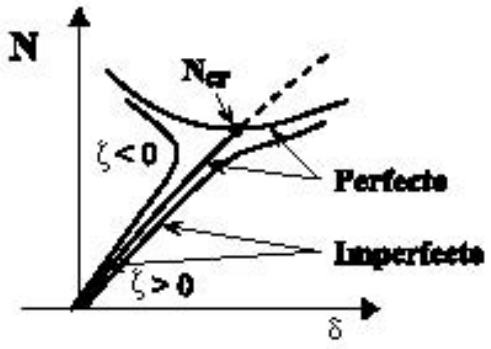
Figura 4 Estabilidad de una columna imperfecta comprimida

se conoce como "divergencia del equilibrio" y estrictamente no hay un límite en la estabilidad . Si el material continúa siendo elástico la rigidez de la columna (representada por la pendiente de la curva N. δ) es siempre positiva, pero una pequeña perturbación produce grandes desplazamientos.

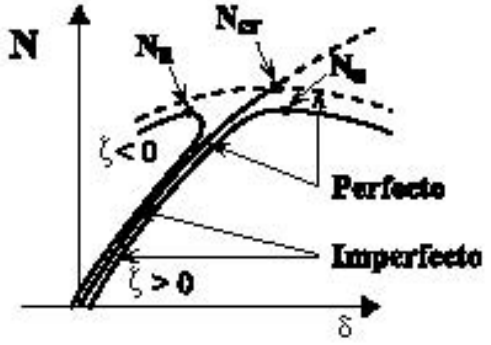
La reducción en la rigidez de un elemento estructural se debe, en general, a cambios, bien en su geometría, bien en sus propiedades mecánicas. La disminución de la rigidez debido a cambios en la geometría no produce pérdida de la estabilidad pero origina grandes deformaciones. Por otro lado, grandes cambios en las propiedades mecánicas (fluencia o fractura del material) originan enormes reducciones de la rigidez, que pueden acabar colapsando la estructura. Este importante tema será tratado más ampliamente en lecciones posteriores.

5. COMPORTAMIENTO POSTCRÍTICO DE LOS SISTEMAS PERFECTOS E IMPERFECTOS

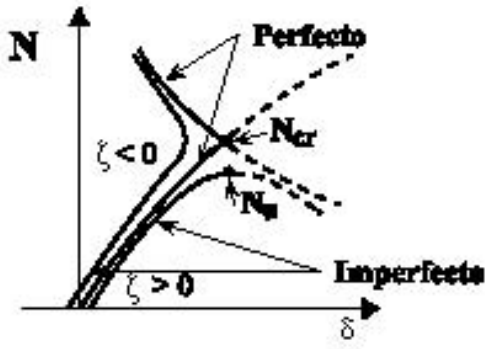
Una vez superado el punto de bifurcación, pueden darse tres situaciones diferentes, dependiendo del tipo de sistema en estudio (Figura 5). En la Figura 5, N es la carga aplicada, δ es el desplazamiento de un punto del sistema y ζ es la amplitud de la imperfección. En la Figura 5 se pueden ver las líneas que representan los puntos de equilibrio de los sistemas perfectos (líneas gruesas), de los sistemas imperfectos (líneas finas), los estados de equilibrio estable (líneas continuas) y los estados de equilibrio inestable (líneas discontinuas):



(a) Punto de bifurcación estable - asimétrico



(b) Punto de bifurcación inestable - asimétrico



(c) Punto de bifurcación asimétrico

Figura 5 Comportamiento postcritico

- Figura 5a: punto de bifurcación simétrico-estable.

  Pequeñas imperfecciones positivas y negativas tienen efectos similares y conducen a sucesivos equilibrios estables y crecientes. El pandeo se caracteriza por un rápido crecimiento de las deformaciones cuando se acerca la carga crítica del sistema perfecto. Este caso tiene una gran importancia práctica puesto que las columnas, vigas y placas presentan este tipo de comportamiento postcrítico.

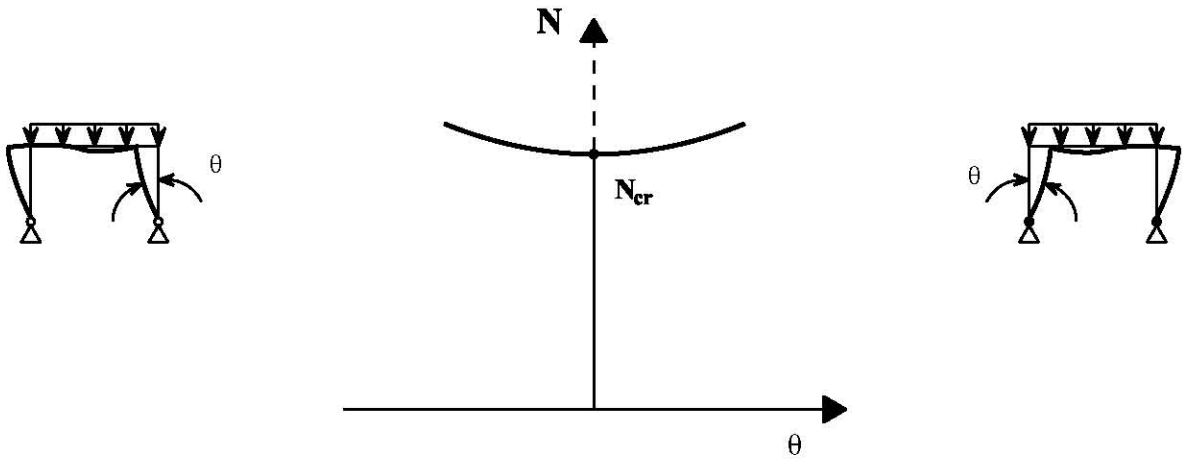
- Figure 5b: punto de bifurcación simétrico inestable.

  Las imperfecciones juegan un papel importante en la modificación del comportamiento del sistema. Pequeñas imperfecciones, de ambos signos, provocan una reducción en la carga crítica. Este es el caso, por ejemplo, de algunos sistemas compuestos de barras articuladas.

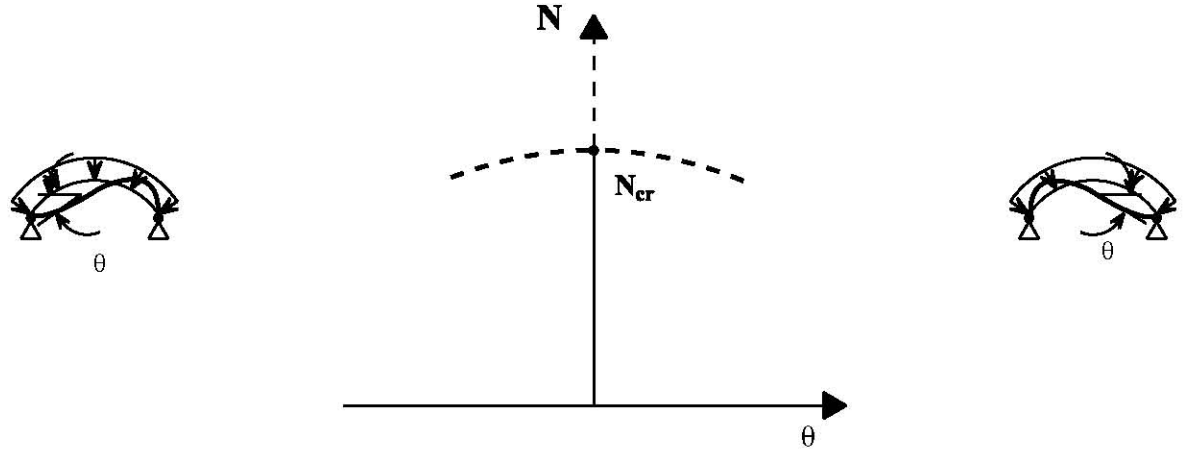
- Figure 5c: punto de bifurcación asimétrico.

  Con pequeñas imperfecciones positivas, el sistema pierde su estabilidad en un punto límite (carga última), muy inferior en comparación con el punto crítico. Por otro lado, pequeñas imperfecciones negativas conducen a estados de equilibrio estables y crecientes. En este caso, el sistema es muy sensible con respecto a las imperfecciones iniciales de signo positivo. Este es el caso de algunas arcos.

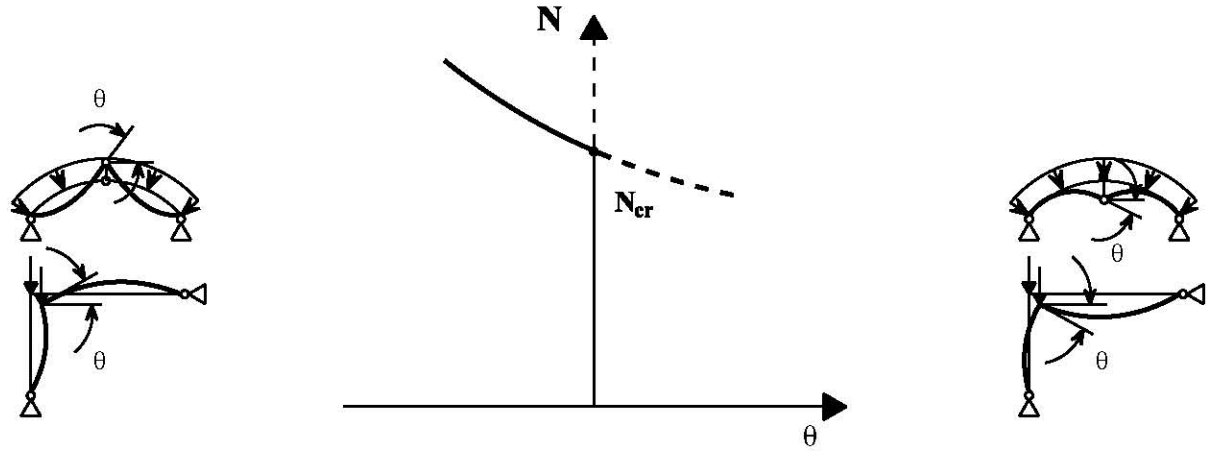
La Figura 6 ilustra estos tres casos de comportamiento post-crítico.



(a) Punto de bifurcación estable - simétrico



(b) Punto de bifurcación inestable - simétrico

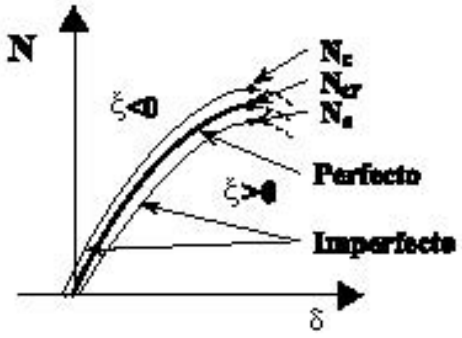


(c) Punto de bifurcación asimétrico

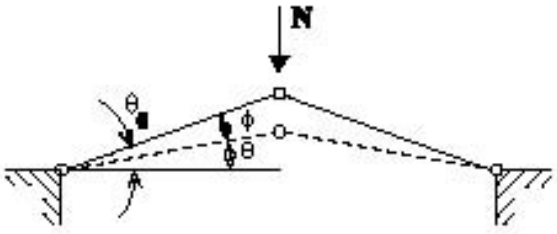
Figura 6 Ejemplos de comportamiento post-crítico

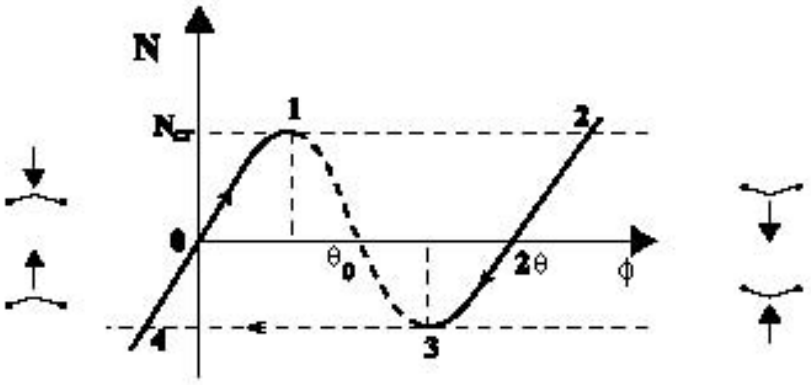
6. PUNTO LÍMITE DE PANDEO

El pandeo asociado con la bifurcación del equilibrio no es la única forma de inestabilidad que puede darse. En el caso de arcos bajos, bóvedas esféricas y celosías de poco canto, por ejemplo, puede darse un pandeo brusco cuando la trayectoria inicialmente estable alcanza la proximidad de un máximo local de la carga, que se suele llamar "punto límite" del sistema. Esto se muestra en la Figura 7a, que también ilustra como la respuesta de un sistema imperfecto es similar al de un sistema perfecto.



(a) Punto límite de pandeo en un sistema perfecto e imperfecto





(b) Punto límite de pandeo en una viga de poco canto

Figura 7 Punto límite de pandeo

La Figura 7b ilustra el comportamiento a pandeo presentando una estructura formada por dos barras articuladas. Cuando se aplica la carga por primera vez el camino seguido es el 0 -1. En el punto 1, se pierde la estabilidad y se produce un salto dinámico a través de un estado de desequilibrio desde el punto 1 al 2, estando la estructura en una posición invertida (pandeo brusco acompañado de un "crac" característico). El punto 2 también se encuentra en una posición estable, y el proceso de carga puede continuar. Por ejemplo, podría darse un proceso de descarga siguiendo la trayectoria del punto 2 al 3 en el cual, una vez más, se perdería la estabilidad produciéndose un salto dinámico desde el punto 3 al 4. En el punto 4, la estructura se encuentra en su trayectoria original y la carga puede volver a comenzar. En este ejemplo se puede ver que la trayectoria entre los puntos 1 y 3, que representa los estados de equilibrio inestable, es totalmente inaccesible durante el proceso de carga.

7. COINCIDENCIA DE VARIOS MODOS DE INESTABILIDAD

En ciertos casos, las estructuras pueden exhibir varios modos o configuraciones inestables casi con la misma carga crítica o con cargas críticas que son casi iguales. En estas situaciones, llamadas bifurcaciones acopladas, la existencia de imperfecciones pueden significar una reducción importante en la carga última en comparación con las de cada uno de los modos. Las estructuras con bifurcaciones acopladas son, en general, difíciles de analizar. A continuación se enumeran algunos de las inestabilidades acopladas que se pueden presentar en las estructuras metálicas:

- el acoplamiento del pandeo de columnas y de placas en columnas de espesor muy delgado.
- el acoplamiento de pandeo lateral y pandeo de placas en vigas de pequeño espesor.
- el acoplamiento del pandeo general y del pandeo de un miembro en pilares compuestos.
- el acoplamiento del pandeo individual de una columna y el pandeo del pórtico al que pertenece.
- el acoplamiento del pandeo de los rigidizadores y el pandeo de la chapa en el caso de chapas rigidizadas o cerramientos.

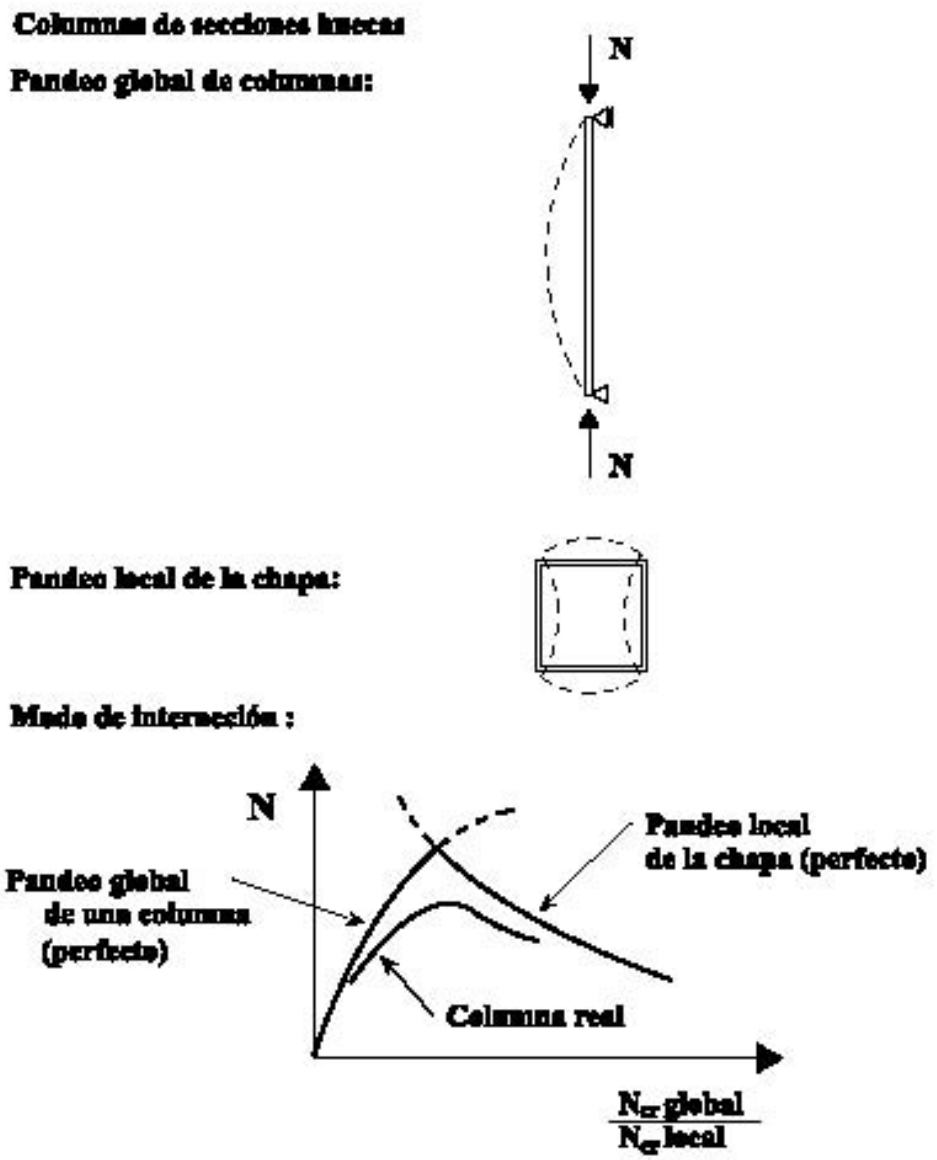


Figura 8 Acoplamiento de dos modos de pandeo

La Figura 8 muestra la reducción en la carga crítica debida al acoplamiento de los modos de pandeo local y global siguientes:

- pandeo local de las placas que forman las cuatro lados de la sección tubular.
- pandeo global euleriano de la columna.

8. RESUMEN FINAL

1. El equilibrio estable o inestable de un sistema estructural puede definirse a través de la energía potencial del sistema; la existencia de un mínimo relativo de dicha energía es una condición suficiente para la estabilidad.
2. El punto de bifurcación o el punto límite definen el tipo de inestabilidad del sistema estructural.
3. El comportamiento postcrítico es una característica importante de toda estructura.
4. Si la estructura presenta varios modos inestables en la cercanía de una carga crítica, la existencia de imperfecciones estructurales conlleva una disminución en la carga última cuando ésta se compara con las cargas últimas de cada uno de los modos por separado.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, 2nd Edition, New York, 1961.

2. Allen, H. G. and Bulson, P. S., "Background to Buckling", McGraw-Hill, London, 1980.

3. Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley and Sons, London, 1973.

4. Galambos, T. V. (editor), "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", John Wiley and Sons, 4th Edition, New York, 1988.

ESDEP TOMO 8
ESTABILIDAD APLICADA

Lección 8.2: Criterios Generales de Estabilidad Elástica

OBJETIVOS/CONTENIDO

Establecer criterios generales para la estabilidad elástica y el equilibrio neutro como preparación al estudio de los métodos energéticos para el cálculo de las cargas críticas que se expondrá en la Lección 8.4.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lección 8.1: Definición de Equilibrio Elástico Estable e Inestable

LECCIONES AFINES

Lección 8.3: Modelos de Inestabilidad Elástica

Lección 8.4: Métodos Generales para el Cálculo de Cargas Críticas

Lección 8.5: Métodos Iterativos para resolver Problemas de Estabilidad

RESUMEN

El diseño de estructuras requiere que la posición de equilibrio de la estructura, bajo las cargas prescritas, sea estable; el análisis de los problemas de estabilidad se suele realizar empleando los métodos energéticos. En esta lección, se introducirán el Principio de los Trabajos Virtuales y el Principio de Conservación de la Energía. Como consecuencia directa de estos principios se establecerá el criterio general de estabilidad estática y se calcularán las cargas críticas correspondientes al equilibrio neutro. El estudio se limitará a los sistemas conservativos. El criterio de estabilidad se ilustrará mediante dos ejemplos.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de cualquier estructura implica la determinación de los esfuerzos internos en el equilibrio (momentos, cortantes, etc.), bajo la carga establecida, y también la confirmación de que la estructura es estable bajos dichas condiciones. Es de vital importancia asegurarse de que si la estructura es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio por fuerzas, impactos, vibraciones, imperfecciones, tensiones residuales, etc., volverá a ella al cesar dichas perturbaciones; esta exigencia de estabilidad estática es aún más crítica en nuestros días debido al incremento en el uso de materiales de alta resistencia que posibilitan el uso de elementos más ligeros y esbeltos.

La teoría sobre la estabilidad elástica, más conocida como pandeo, proporciona métodos para determinar:

- la estabilidad de una configuración de equilibrio.
- el valor de la carga crítica bajo la cual se produce la inestabilidad.

La mayor parte de estos métodos se derivan de los criterios generales de energía que tienen su origen en los principios energéticos de la Mecánica. El objetivo de esta lección será presentar brevemente, al estudiante o ingeniero, los principios de la Mecánica necesarios para entender los criterios de estabilidad y los métodos empleados en las investigaciones sobre pandeo, que se estudian más profundamente en la Lección 8.4.

Los contenidos de esta lección se limitan a los siguientes sistemas:

- sistemas elásticos conservativos con cargas igualmente conservativas (sistemas completamente conservativos).
- sistemas cuyas posiciones puedan ser expresadas como funciones de un número finito de parámetros de desplazamiento.

Es necesario añadir que sólo se tratarán los aspectos estáticos de la estabilidad.

2. GENERALIDADES

En esta lección se estudiarán los cambios de configuración de un sistema con respecto a su posición inicial; todo cambio de configuración es considerado un desplazamiento del sistema. Una posición puede ser definida empleando un número finito de variables independientes, llamadas coordenadas generalizadas, que se llamarán q_1, q_2, ... q_n o abreviadamente q_i. Una viga con un solo vano puede tener un número infinito de coordenadas generalizadas que representen su deformada, como los coeficientes q_i de una serie de Fourier:

$$y = \sum_i q_i \sin i\pi x / L$$

Esta serie, sin embargo, puede ser aproximada por un número finito de términos con un número finito de coordenadas generalizadas, que indicarán los grados de libertad del sistema. Si se considera la viga de la Figura 1, las coordenadas generalizadas pueden ser los grados de libertad de los nudos i y j en los extremos de la viga: dos desplazamientos u y v y una rotación θ por nudo (todos en el plano). Si se admite que la deformada elástica de la viga puede ser definida usando funciones de interpolación, entonces el vector desplazamiento de la viga puede expresarse de la siguiente forma $D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j)$.

En los apoyos, las condiciones de contorno imponen restricciones a las coordenadas generalizadas. En la Figura 2, por ejemplo, las condiciones de contorno imponen la nulidad del vector desplazamiento en el empotramiento de la viga en voladizo: $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Un sistema estructural se encuentra sometido, en general, a fuerzas internas y externas; las fuerzas internas suelen ser fuerzas de tracción, como las debidas a tensiones que aparecen en las caras de los cubos infinitesimales del material. Las fuerzas externas actúan sobre el volumen (por ejemplo la gravedad) y/o sobre la superficie de los elementos del sistema (fuerzas de contacto o momentos).

Al producirse un cambio en la configuración del sistema la Ley de Conservación de la Energía puede expresarse como:

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \qquad (1)$$

donde: W_{ext} es el trabajo desarrollado sobre el sistema por las fuerzas externas

Q es el calor que entra en el sistema

ΔT es el incremento de la energía cinética

ΔU es el incremento de la energía interna

ΔU también se le conoce como energía de deformación.

Por otro lado, la Ley de la Energía Cinética se puede expresar como:

$$W = W_{ext+W_{int}} = \Delta T \qquad (2)$$

donde: W_{int} es el trabajo desarrollado por las fuerzas internas

W es trabajo total ejercido sobre el sistema por todas las fuerzas

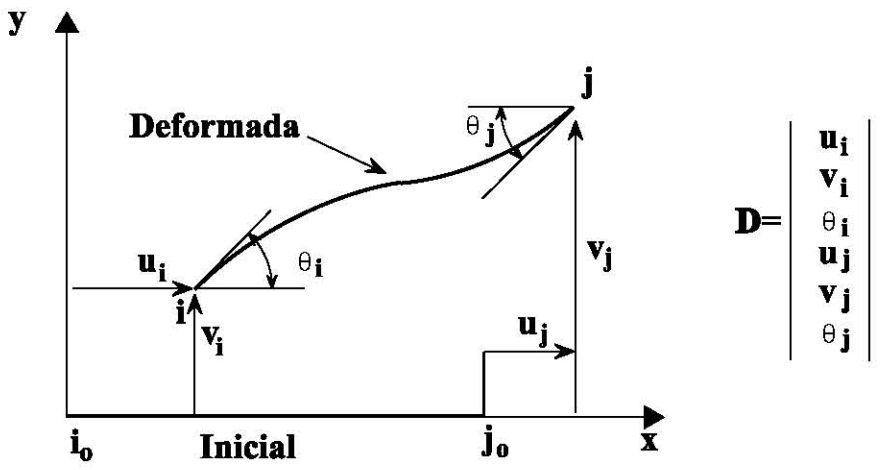


Figura 1

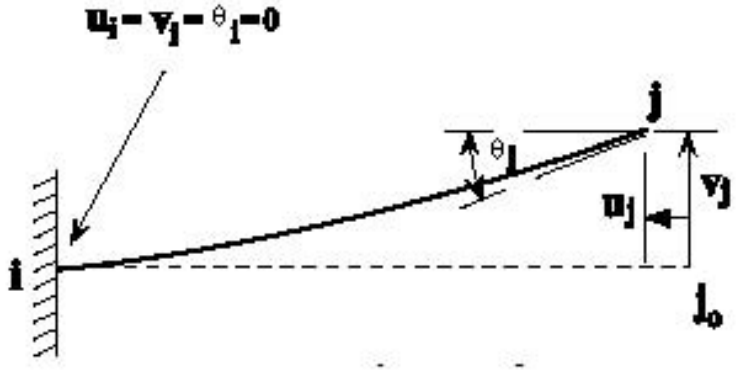


Figura 2

$$D = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix}$$

Nota: ΔU sólo tiene sentido en sistemas deformables; para sistemas rígidos:

$$\Delta U = 0$$

por lo que

$$W_{int} = 0 \quad (5)$$

Si tan sólo se consideran los aspectos estáticos, no habrá variación en la energía cinética durante el desplazamiento (velocidad muy baja):

$$\Delta T = 0 \quad (6)$$

y las Ecuaciones (1), (2) y (5) derivan en:

$$W_{ext} = \Delta U \quad (7)$$

$$W_{ext} + W_{int} = 0 \quad (8)$$

Ecuaciones (1) y (2) derivan en:

$$W_{int} = Q \cdot \Delta U \quad (3)$$

Puesto que sólo se consideran procesos adiabáticos, $Q = 0$ y la Ecuación (3) se puede rescribir en la siguiente forma:

$$W_{int} = -\Delta U \quad (4)$$

3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales que se discutirá en esta sección es ampliamente usado en la resolución de problemas de estabilidad. El primer paso será establecer cuál es la configuración de equilibrio del sistema para después estudiar su estabilidad.

Un sistema dado puede tomar cualquiera de las posibles configuraciones que sean compatibles con sus condiciones de contorno, pero sólo en una de ellas las fuerzas aplicadas estarán en condición de equilibrio con las reacciones en los apoyos.

Supóngase que el sistema en esa situación de equilibrio está definido por las coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots q_n$.

El sistema podría verse sometido a un pequeño desplazamiento arbitrario en su configuración, que le permitiría seguir cumpliendo las condiciones de contorno, pero de forma que las fuerzas siguieran actuando con sus valores iniciales. Estos pequeños desplazamientos no tienen por que ocurrir en la realidad; son imaginarios y tienen por único objeto realizar comparaciones, por lo que se denominan desplazamientos virtuales; estos desplazamientos virtuales son independientes de la carga y se denotarán como δq_i. Por lo tanto, toda la energía o trabajo desarrollado sobre el sistema será trabajo o energía virtual.

Para un sistema rígido las ecuaciones (5) y (8) llevan a:

$$\delta W_{ext} = 0 \qquad (9)$$

donde δW_{ext} es el trabajo virtual de las fuerzas externas realizado a lo largo del desplazamiento virtual; el Principio de los Trabajos Virtuales se expresará como sigue:

"Un sistema rígido se encuentra en una configuración de equilibrio si el trabajo virtual de todas las fuerzas externas actuantes sobre él es nulo para cualquier desplazamiento virtual que cumpla las condiciones de contorno."

Para un sistema deformable, la Ecuación (7) es:

$$\delta W_{ext} = \delta U \qquad (10)$$

donde δU es la variación de la energía de deformación debida al desplazamiento virtual, y el Principio de los Trabajos Virtuales tomará la forma:

"Un sistema deformable estará en su situación de equilibrio si el trabajo virtual de todas las fuerzas externas actuando sobre él es igual a la variación de la energía de deformación para cualesquiera desplazamientos virtuales compatibles con las condiciones de contorno."

Esta es la expresión del Principio que se usa frecuentemente en el análisis estructural; usando la Ecuación (8), es equivalente a la condición:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \qquad (11)$$

Configuración de Equilibrio Verdadera

Para un sistema con un número finito de coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \ldots q_n)$, el trabajo virtual δW correspondiente a un desplazamiento virtual desde la posición $(q_1, q_2, \ldots q_n)$ hasta una posición vecina $(q_1 + \delta q_1, \ldots q_n + \delta q_n)$ puede representarse como una función lineal de las coordenadas:

$$\delta W = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots = \sum_i Q_i \, \delta q_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (12)$$

donde $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ son ciertas funciones de las coordenadas generalizadas qi, y de las fuerzas internas (para sistemas deformables) y externas.

Por analogía con el trrabajo desarrollado por una fuerza, las funciones $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ se llaman componentes de las fuerzas generalizadas. Los términos Qi no tienen necesariamente dimensiones de una fuerza, y frecuentemente

no tienen las mismas dimensiones; su dimensión está condicionada por el hecho de que el producto $Q_i\ \delta q_i$ tiene dimensiones de trabajo. Las Ecuaciones (11) y (12) llevan a:

$$\sum_i Q_i\,\delta q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

Como δq_i son arbitrarios, independientes de las variaciones en qi, las Ecuación (13) implica que:

$$Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

La solución de estas n ecuaciones simultáneas de equilibrio suministran los valores de las coordenadas qi en la configuración verdadera de equilibrio.

4. PRINCIPIO DEL VALOR ESTACIONARIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL

Las fuerzas internas y externas serán ambas conservativas (sistema completamente conservativo). Las fuerzas internas derivan de una función escalar de las coordenadas generalizadas $U(q_1, q_2, \ldots q_n)$ siendo U la energía de deformación que se definió en la Ecuación (4). Igualmente, las fuerzas externas provienen de una función $\Omega(q_1, q_2, \ldots q_n)$ siendo Ω la energía potencial de dichas fuerzas. De ello se deduce que todas las fuerzas son función de una sola función escalar $V(q_1, q_2, \ldots q_n)$ llamada función potencial total, siendo su valor la energía potencial total del sistema. Esta energía potencial total puede expresarse como:

$$V = U + \Omega \qquad (15)$$

La cantidad de energía potencial generalmente se desconoce. Sólo los cambios en la energía potencial son medibles.

Como el sistema se supone conservativo,

$$\delta W = -\delta V \qquad (16)$$

donde δV es la variación de la energía potencial total debida a un desplazamiento virtual, y las Ecuaciones (11) y (16) se convierten en:

$$\delta V = 0 \qquad (17)$$

La Ecuación (17) es la expresión analítica del Principio del Valor Estacionario de la Energía Potencial Total que puede enunciarse del siguiente modo:

"De todas las configuraciones geométricamente posibles que un sistema puede adoptar, la que corresponde a un estado de equilibrio entre fuerzas aplicadas y reacciones inducidas, es aquélla en la cual la energía potencial total del sistema tiene un valor estacionario."

Configuración de Equilibrio Verdadera

Como $V = V(q_1, q_2, \ldots q_n)$, δV puede expresarse así:

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\delta V}{\delta q_2} \cdot \delta q_2 + \ldots = \sum_i \frac{\delta V}{\delta q_i} \cdot \delta q_i \qquad (18)$$

En donde los valores de δqi son arbitrarios e independientes por lo que si $\delta V = 0$, entonces:

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots, n \qquad (19)$$

El Principio suministra n ecuaciones de equilibrio en términos de las cargas aplicadas y de las coordenadas generalizadas q_i de las que se pueden deducir los valores de q_i, que definen la configuración de equilibrio.

No debe olvidarse que las Ecuaciones (12), (16), (18) y (19), y el hecho de que los valores de δq_i sean arbitrarios e independendientes implican que:

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = -Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (20)$$

En resumen, debe tenerse en cuenta que para sistemas conservativos, el Principio de los Trabajos Virtuales se convierte en el Principio del Valor Estacionario de la Energía Potencial Total. Este Principio es muy potente y puede ser usado para desarrollar métodos aproximados para resolver problemas de estabilidad en el diseño de estructuras.